This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Sci 895.50

Harvard College Library

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.

AND HIS WIDOW

ELIZA FARRAR

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY"

SCIENCE CENTER LIBRARY

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES

(RIVISTA DI MATEMATICA)

PUBLIÉE PAR

G. PEANO

Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin

Tome VI

TURIN

BOCCA FRÈRES

LIBRAIRES

—

1896-1899

TABLE DES MATIÈRES

Pag.

G. Peano. — Introduction au tome II du Formulaire de mathématiques 1
P. Poretsky. — La loi des racines en Logique 5
M. Pieri. — Un sistema di postulati per la Geometria proiettiva degli iperspazî 9
Recensione. — Ezequiel Perez, *El cultivo de la matematica y la forma deductiva de la inferencia.* (G. Vailati) 17
G. Morera. — Dimostrazione di una formola di calcolo integrale . 19
A. Nagy. — Alcuni teoremi intorno alle funzioni logiche . . . 21
F. Gerbaldi. — Sulla serie di funzioni analitiche 24
F. Bagnera. — Sul teorema dell'esistenza delle funzioni Fuchsiane 31
A. Padoa. — Di alcune proposizioni fondamentali relative al mutuo separarsi di coppie di punti 35
Recensione. — Der logische Algorithmus in seinen Wesen, in seiner Anwendung, und in seiner philosophischen Bedeutung von Joseph Honthein (G. Vailati) 42
G. Peano. — Sulle formule di Logica (F_2 § 1) 48
G. Frege. — Lettera all'Editore 58
G. Peano. — Risposta 60
Prix Lobatchefsky 62
Additions et corrections à F_2 65
G. Peano. — Sul § 2 del Formulario, t. II Aritmetica 75
A. Padoa. — Ideografia delle frazioni irriducibili 90
Recensione. — E. Schröder. *Ueber Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien.* (G. Peano) 95
Recensione. — A. N. Whitehead. *A treatise on Universal algebra.* (G. Vacca) 101
A. Padoa. — Note di logica matematica 105
G. Vacca. — Sui precursori della logica matematica I 121
G. Peano. — Sui numeri irrazionali 126
C. Burali-Forti. — Les propriétés formales des opérations algébriques 141
Recensione. — G. Ingrami. *Elementi di Geometria* per le scuole secondarie superiori (M. Pieri) 178
G. Vacca. — Sui precursori della logica matematica II 183
Congrès international de Philosophie 187
» » *des Mathématiciens* 188

HARVARD COLLEGE LIBRARY
APR 28 1896
CAMBRIDGE, MASS.

Sc. 895.50

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES

(RIVISTA DI MATEMATICA)

PUBLIÉE PAR

G. PEANO

Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin

TOME VI - N° 1

SOMMAIRE

Introduction au tome II du « Formulaire de Mathématiques » (G. Peano).
La loi des racines en Logique (P. Poretsky).
Un sistema di postulati per la Geometria projettiva astratta degli iperspazî (M. Pieri).
Ezequiel Porez, *El cultivo de la matemática y la forma deductiva de la inferencia* (G. Vailati).
Dimostrazione di una formola di calcolo integrale (G. Morera).
Alcuni teoremi intorno alle funzioni logiche (A. Nagy).
Sulla serie di funzioni analitiche (F. Gerbaldi).
Sul teorema dell'esistenza delle funzioni Fucheiane (F. Bagnera).
Di alcune proposizioni fondamentali relative al mutuo separarsi di coppie di punti (A. Padoa).

TURIN

BOCCA FRÈRES

LIBRAIRES

1896

La REVUE DE MATHÉMATIQUES a pour objet principal la publication du FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES, recueil de théorèmes, de définitions et de démonstrations, exprimés par les symboles de la logique mathématique.

Prix de l'abonnement au tome VI de la Revue, et au tome II du Formulaire : Italie L. 10; étranger 11 fr.

Rivista di Matematica, tomes I-V, 1891-95, chaque tome 8 fr.

Introduction au Formulaire, 1894, 2 fr.

Formulaire de Mathématiques, t. I, 1895, 6 fr.

AVVISO

L'Associazione "MATHESIO" fra Insegnanti di Matematica di scuole secondarie fa noto che si è costituito il suo Comitato Direttivo.

Il suo primo anno sociale comincierà col 1° luglio 1896.

La sede sociale per il primo biennio (1896-97, 97-98) è Torino, *presso il* Presidente, Prof. Rodolfo Bettazzi, Corso S. Martino, 1.

Per quanto concerne l'amministrazione, l'inscrizione a Socio, il pagamento delle quote, le domande di stampati, ecc. occorre rivolgersi al Segretario-Tesoriere, Prof. Francesco Giudice, Corso Ugo Bassi, 40, Genova.

Il Comitato farà conoscere dopo la sua prima adunanza ordinaria autunnale il regolamento che avrà redatto per il funzionamento dell'Associazione.

Torino, 3 aprile 1896.

per il Comitato
Prof. RODOLFO BETTAZZI

AUG 25 1896

REVUE DE MATHÉMATIQUES
Tome VI — 1896

Introduction au tome II du " Formulaire de Mathématiques „

par G. Peano

Gottfried Wilhelm Leibniz, pendant toute sa vie (1646-1716) s'est occupé d' « une manière de Spécieuse Générale, où toutes les vérités de raison seroient réduites à une façon de calcul. Ce pourroit être en mêmes tems une manière de Langue ou d'Écriture universelle, mais infinement différente de toutes celles qu'on a projetées jusqu'ici; car les caractères, et les paroles mêmes, y dirigeroient la Raison; et les erreurs excepté celles de fait, n'y seroient que des erreurs de calcul. Il seroit très difficile de former ou d'inventer cette langue ou caractéristique; mais très aisé de l'apprendre sans aucuns dictionnaires » (Opera philosophica, a. 1840, p. 701).

Il énonce ce projet dans son premier travail, ou, comme il l'appelle, dans son « essai d'écolier » intitulé « de arte combinatoria a. 1666 ». Dans l' « Historia et commentatio linguae charactericae universalis, quae simul sit ars inveniendi et judicandi » (ib. p. 162), il dit que ces pensées « semper altissime infixae menti haesere ». Il fixe le temps nécessaire à la former: « aliquot selectos homines rem intra quinquennium absolvere posse puto ». Il trouve cette découverte plus importante que l'invention des télescopes et des microscopes; elle est l'étoile polaire du raisonnement. Il ajoute enfin « Itaque repeto, quod saepe dixi, hominem, qui neque Propheta sit neque Princeps, majus aliquid generis humani bono, nec divinae gloriae accomodatius suscipere nunquam posse ».

Dans ses dernières lettres il regrette « que si j'avois été moins distrait, ou si j'étois plus jeune, ou assisté par des jeunes gents bien disposés, j'espérerois donner une manière de » cette spécieuse (pag. 701). Il dit aussi (pag. 703) « J'ai parlé de ma spécieuse générale à Mr. le Marquis de l'Hospital, et à d'autres; mais ils n' y ont point donné plus d' attention que si je leur avois conté un songe. Il foudrait que je l'appuyasse par quelque usage palpable; mais pour cet effet il faudroit fabriquer une partie au moins de ma Charactéristique; ce qui n'est pas aisé, surtout dans l'était où je suis ».

Après deux siècles, ce « songe » de l'inventeur du Calcul infinitésimal est devenu une réalité. Leibniz a publié bien peu sur ce problème; mais dans ses manuscrits, publiés en 1840 par Erdmann, on trouve des idées précises, et beaucoup de propositions qui constituent la Logique mathématique (1ère partie du Formulaire). Plusieurs auteurs ont continués ces études (1). Enfin nous sommes arrivés à terminer l'analyse des idées de logique, exprimées dans le langage ordinaire par une foule de termes (est, sont, soit, être, exister, avoir, pouvoir, donner, prendre, oui, non, et, ou, si, lorsque, déduire, tout, rien, quelque, chaque, égal, partie,...), en les exprimant toutes au moyen des idées représentées par les signes ε, $\supset$, $=$, $\cup$, $\cap$, $-$, Λ, lesquelles sont encore réductibles.

Dans le petit livre « Arithmetices principia, nova methodo esposita, a. 1889 », nous avons pour la première fois exposé toute une théorie, théorèmes, définitions et démonstrations, en symboles qui remplacent tout-à-fait le langage ordinaire.

Nous avons donc la solution du problème proposé par Leibniz. Je dis « la solution » et non « une solution », car elle est unique. La Logique mathématique, la nouvelle science composée de ces recherches, a pour objet les propriétés des opérations et des relations de logique. Son objet est donc un ensemble de vérités, et non de conventions.

L'étude des propriétés différentes des idées représentées par les signes ε et $\supset$ nous empêche de les représenter par le même signe, bien que dans le langage ils correspondent à peu près au même terme « être ». L'identité des propriétés des expressions « est contenu » et « on déduit » nous indique qu'il n'y a entre elles qu'une différence grammaticale, et nous porte à les indiquer par le même signe $\supset$. Et ainsi de suite. En changeant le forme des signes ε, $\supset$,... on ne change pas ces vérités.

Ces résultats sont merveilleux, et bien dignes des éloges de Leibniz à la science qu'il avait deviné. Toutefois pour apprendre l'usage des symboles il faut de l'exercice. Nous disons par ex. q'on peut lire les signes $\cap$, $\cup$, $-$ par les mots « et, ou, non »; en effet on obtient ainsi en général une passable lecture des formules; mais avec un peu d'habitude on lit les propositions en symboles avec la forme même qu'ont les propositions dans le langage ordinaire.

La transformation du langage ordinaire en symboles présente des difficultés plus grandes. Il faut d'abord analyser complètement les

---

(1) Les travaux plus importants sur ce sujet ont été mentionnés et analysés dans les volumes de la « Rivista di Matematica » a. 1891 et suivants.

propositions qu'on veut écrire en symboles. Mais cette analyse a son avantage; combien de fois la proposition se transforme-t-elle en une identité, ou on y découvre des inexactitudes, des lacunes, des ambiguités!

On a déjà appliqué ces résultats soit à énoncer avec précision quelques propositions, soit à analyser des théories complètes, spécialement relatives aux principes toujours controversés des mathématiques. « Itaque profertur hic calculus quidam novus et mirificus, qui in omnibus nostris ratiocinationibus locum habet, et qui non minus accurate procedit quam Arithmetica aut Algebra. Quo adhibito semper terminari possunt controversiae quantum ex datis eas determinari possibile est, manu tantum ad calamum admoto, ut sufficiat duos disputantes omissis verborum concertationibus sibi invecem dicere: *calculemus*, ita enim perinde ac si duo Arithmetici disputarent de quodam calculi errore » (Leibniz, p. 98).

L'écriture simple et précise qui découle de la Logique mathématique nous donne l'instrument pour résoudre une question pratique qui s'impose tous les jours davantage. Citons encore Leibniz (p. 165):

« Quand je considère combien nous avons de belles découvertes, combien de méditations solides et importantes, et combien se trouvent d'esprits excellens qui ne manquent pas d'ardeur pour la recherche de la vérité, je crois que nous sommes en état d'aller plus loin et que les affaires du genre humain, quant aux sciences, pourraient en peu de temps merveilleusement changer de face. Mais quand je vois de l'autre côté le peu de concert des desseins, les routes opposées qu'on tient,... enfin quand je considère... qu'on se contente des discours spécieux au lieu d'une méthode sérieuse et décisive, j'apprehende que nous ne soyons pour demeurer long tems dans la confusion... Je crains même, qu'on ne se dégoûte des sciences et que par un désespoir fatal les hommes ne retombent dans la barbarie. À quoi cette horrible masse de livres, qui va toujours en augmentant, pourrait contribuer beaucoup. Car enfin le désordre se rendra presque insurmontable, la multitude des auteurs qui deviendra infinie en peu de tems, les exposera tous ensemble au danger d'un oubli général, l'experance de la gloire, qui anime bien des gens dans le travail des études, cessera tout d'un coup, il sera peut être aussi honteux d'être auteur, qu'il étoit honorable autre fois ».

Mais il ajoute « je ne laisse pas d'espérer le contraire pour des raisons très fortes ». En effet bien de travaux sont justement récompensés par l'oubli complet, qui s'attache aussi à des travaux qui ne mériteraient pas cette fin.

Or il est possible de publier un *Formulaire de Mathématiques* qui contienne toutes les propositions connues dans les sciences mathématiques,

toutes les démonstrations, toutes les méthodes. Elles, écrites en symboles, occupent peu de place, beaucoup moins qu'on ne pourrait croire. Il y a une infinité de livres et de Mémoires inutiles, erronés, ou dans lesquelles on répète ce que d'autres auteurs ont déjà dit. Ce qui reste à écrire dans le Formulaire n'est qu'une partie infiniment petite de ce qu'on a publié jusqu'à présent.

Je suppose ce formulaire terminé, ou près de l'être. Veut-on étudier un sujet quelconque? On ouvre ce Formulaire à la place convenable car on peut ordonner les sujets selon les signes qui les composent, comme on ordonne dans un dictionnaire les mots selon les lettres qui les constituent. On trouvera en quelques pages toutes les vérités connues sur ce sujet, avec leurs démonstrations et indications historiques. Si le lecteur connaît encore une proposition, qu'il a découverte, ou qu'il a trouvée, dans quelque livre, ou s'il remarque quelque inexactitude dans ces propositions, il communiquera ces additions et corrections à la Rédaction du Formulaire, qui l'annoncera dans quelque publication périodique, et en tiendra compte dans une édition suivante.

Chaque professeur pourra adopter pour texte ce Formulaire, car il doit contenir toutes les propositions et toutes les méthodes. Son enseignement sera réduit à montrer à lire ces formules, et à indiquer aux élèves les propositions qu'il désire expliquer dans son cours.

Ce projet est assurément beau. Malheureusement son execution surpasse les forces, non d'un homme, mais de plusieurs hommes. Seulement une société nombreuse et bien organisée pourrait l'accomplir.

En attendant que quelque société savante s'empare de ce projet, nous avons publié, avec la collaboration de plusieurs collègues, le I tome du Formulaire.

Car il n'est pas nécessaire que tout ce travail soit fini pour porter son avantage. Chaque partie publiée sert déjà aux étudiants de ces sujets particuliers.

Ce premier essai présente naturellement des lacunes. Nous commençons maintenant le II volume du Formulaire; et nous publions de nouveau les parties du I tome, sur lesquelles on nous a indiqué de nombreuses corrections et additions.

La loi des racines en Logique

par M. P. Poretsky, *à Gorodnia (Russie).*

Soit donnée une équation logique générale

$$f(a, b, c, d, \ldots) = 0 \tag{1}$$

contenant $n+1$ lettres a, b, c, d, ... Nous pouvons résoudre cette équation relativement à chacun des $n+1$ symboles a, b, c, ... et aux $n+1$ négations a_0, b_0, c_0, ... Pour la résoudre relativement à a ou a_0 nous commençons par la réduire à la forme suivante:

$$Ga + Ha_0 = 0, \tag{2}$$

où G et H sont les fonctions de n lettres restantes b, c, d, ... En multipliant les deux membres de l'équation (2) par le produit GH nous avons la conclusion:

$$GHa + GHa_0 = GH = 0. \tag{3}$$

La condition (3) est l'une des conséquences nécessaires de l'équation (1) ou (2).

J'ai démontré (en 1884) que l'équation (2) est équivalente à l'équation

$$a = G_0 a + Ha_0, \tag{4}$$

qui nous donne la description logique de tous les a satisfaisant à l'équation donnée (1) ou (2). Je veux à présent utiliser cette description pour trouver le nombre et les valeurs de toutes les racines a de l'équation donnée (1).

Voici cette description: la classe a est contenue en G_0 et contient H. Pour que cette description soit réelle, il faut que H soit contenu en G_0; ce qui coïncide avec l'équation (3).

Allons plus loin. Nous pouvons écrire ainsi les fonctions G_0 et H :

$$G_0 = G_0H + G_0H_0\,, \qquad H = G_0H\,. \tag{5}$$

Le terme GH étant égal à 0, nous le rejetons de la formule pour H. La description de la classe a devient alors: a contient G_0H et est contenu en $G_0H + G_0H_0$, c'est-à-dire que les a diverses contiennent tout G_0H et des parties diverses de la classe G_0H_0. Il s'en suit que tous les a doivent satisfaire à la condition suivante:

$$a = G_0H + xG_0H_0\,, \tag{6}$$

où x est une classe tout-à-fait arbitraire.

Ici se présente cette question grave: devons-nous chercher les a exprimés au moyen des n lettres restantes du discours seulement, c'est-à-dire des lettres b, c, d, ..., ou ne pouvons-nous pas nous borner aux limites du discours, et chercher les a avec l'aide des lettres b, c, d, ... et des lettres étrangères α, β, γ, ...?

M. Schröder pense que les limites du discours ne sont pas obligatoires pour nous. En tel cas nous devons nous contenter de la formule (6) et dire que le nombre des racines a est infini. Mais je pense autrement et j'avoue que chercher les valeurs de a exprimées à l'aide des lettres étrangères au discours est une action non logique. Par cette raison nous devons traiter la classe arbitraire x comme une fonction de n lettres seulement b, c, d, ... et aller encore plus loin. Cette voie nous conduit à la loi même des racines en Logique.

On sait que avec n lettres nous pouvons composer seulement le nombre 2^{2^n} des classes diverses. Par conséquent le nombre des racines a ne doit pas surpasser ce nombre. Mais beaucoup des valeurs de x substituées dans la formule (6) ne nous donnent qu'une seule valeur de a. Par exemple les valeurs $x = 0$, G, H, GH, GH_0, G_0H, $G + H$ nous donnent la même valeur $a = G_0H$. Par cette raison le nombre des racines a devient encore plus limité.

On sait que avec n lettres nous pouvons composer le nombre 2^n de classes indécomposables en subclasses sans l'aide de lettres étrangères au discours. Nous nommerons ces classes *les éléments du discours*. L'un de ces éléments est le produit des n lettres du discours. Tous les autres éléments s'obtiennent de ce même produit en attribuant le signe $_0$ consécutivement à l'un de ses facteurs, à deux, à trois et ainsi de suite.

On peut démontrer que les éléments possèdent les propriétés suivantes: 1) le produit de deux éléments est égal à zéro; 2) le produit d'un élément quelconque par la fonction quelconque du discours est

égal ou à zéro ou à ce même élément; et 3) chaque classe du discours est composée de la somme de quelques éléments.

Pour décomposer une classe donnée dans la somme des éléments, il faut décomposer chacun des ses termes (monômes) séparément et rejeter toutes les réitérations de chacun des éléments. Pour décomposer le monôme ayant i facteurs, il faut le multiplier par le produit de $n - i$ binômes de la forme $q + q_0$ composés à l'aide de toutes les lettres manquantes à ce monôme, après quoi le monôme donné se transforme dans la somme des éléments, en nombre 2^{n-i}.

Supposons à présent que la fonction G_0H_0, qui figure dans la formule (6) se décompose dans la somme de m éléments divers suivants:

$$G_0H_0 = e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} + \ldots + e^{(m)}. \tag{7}$$

La formule (6) devient alors:

$$a = G_0H + x\,(e^{(1)} + e^{(2)} + \ldots + e^{(m)}). \tag{8}$$

Mais nous savons déjà par ce qui précède, que le produit de la fonction quelconque x du discours pour la somme de m éléments ne peut nous donner que la somme de quelques-uns de ces mêmes éléments. Pour cette cause toutes les valeurs possibles de x en nombre 2^{2^n} multipliées par la somme de m éléments doivent nous donner toutes les 2^m classes diverses que l'on peut composer avec ces m éléments. D'où nous concluons que *le nombre total des racines diverses a est égal à* 2^m, *m étant le nombre des éléments divers de la fonction* G_0H_0.

Si nous désignons par le symbole $\Sigma\,(e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(m)})$ toutes les 2^m classes que l'on peut composer des éléments $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(m)}$, la formule (8) devient:

$$a = G_0H + \Sigma\,(e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(m)}).$$

Cette formule exprime *la loi des racines* en Logique. *Toutes les* 2^m *racines a s'obtiennent en ajoutant à la même fonction* G_0H *toutes les combinaisons des éléments de la fonction* G_0H_0.

Pour les racines a_0 nous aurons la formule:

$$a_0 = GH_0 + \Sigma\,(e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(m)}).$$

Pour avoir les racines b et b_0 il faut réduire l'équation donnée (1) à la forme $G'b + H'b_0 = 0$. Et ainsi de suite.

Exemple. — Pour l'équation

$$a(bc + b_0c_0) + a_0b = 0$$

nous avons:

$$G = bc + b_0c_0\,, \quad H = b\,, \quad G_0 = bc_0 + b_0c\,, \quad H_0 = b_0\,, \quad G_0H_0 = b_0c\,,$$
$$G_0H = bc_0\,, \quad GH_0 = b_0c_0\,.$$

Le nombre m est égal a 1, et les deux racines a et a_0 sont:

$$a^{(1)} = bc_0\,, \quad a^{(2)} = bc_0 + b_0c\,; \quad a_0^{(1)} = b_0c_0\,, \quad a_0^{(2)} = b_0c_0 + b_0c = b_0\,.$$

La réduction de la même équation à la forme

$$b\,(a_0 + c) + b_0ac_0 = 0$$

nous donne:

$$G = a_0 + c\,, \quad H = ac_0\,, \quad G_0 = ac\,, \quad H_0 = e_0 + c\,, \quad G_0H_0 = 0\,,$$
$$G_0H = ac_0\,, \quad GH_0 = a_0 + c.$$

Ici le nombre m est égal à zéro et les racines uniques b et b_0 seront:

$$b = ac_0\,, \quad b_0 = a_0 + c.$$

Enfin la réduction de la même équation à la forme

$$cb + c_0\,(ab_0 + a_0b) = 0$$

nous donne

$$G = b\,, \quad H = ab_0 + a_0b\,, \quad G_0 = b_0\,, \quad H_0 = ab + a_0b_0\,, \quad G_0H_0 = a_0b_0\,,$$
$$G_0H = ab_0\,, \quad NH_0 = ab\,;$$
$$c^{(1)} = ab_0\,, \quad c^{(2)} = ab_0 + a_0b_0 = b_0\,; \quad c_0^{(1)} = ab\,, \quad c_0^{(2)} = ab + a_0b_0\,.$$

P. Poretsky.

Un sistema di postulati per la Geometria Projettiva astratta degli iperspazî

Nota di Mario Pieri

§ 1. — La Geometria projettiva degli spazî da quante si vogliano dimensioni, intesa come scienza autonoma, rimane tuttavia soggetto di controversia per molti, a cui non sembra che tutti i suoi principî siano affermati con quel grado di chiarezza e di rigore, che si pretende a ragione in ogni ramo di scienza esatta. Una succinta analisi delle premesse, su cui potrebbe logicamente fondarsi una dottrina projettiva degli iperspazî, non è dunque fuor di proposito; quantunque non manchino lavori di molto pregio vôlti al medesimo scopo, od aventi un fine prossimo a quello (*).

In uno studio recente « *Sui principî che reggono la Geometria di Posizione* » (**) ho proposto diciannove postulati atti a fondare l'ordinaria Geometria Projettiva come scienza deduttiva astratta, indipendente da ogni altro corpo di dottrine matematiche o fisiche, e in particolare dagli assiomi, od ipotesi, della Geometria elementare euclidèa; e successivamente ho mostrato (***) che essi sono realmente sufficienti agli scopi della pura Geometria di posizione (« costruirende Geometrie »), poichè se ne deduce la rappresentazione dei punti projettivi mediante coordinate. Qui nulla ho da mutare circa l'indirizzo ivi adottato, che

(*) Ved. p. e. Amodeo « *Quali possono essere i postulati, ecc.* » (Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, 1891). — Veronese « *Fondamenti di Geometria a più dimensioni, ecc.* (Padova, 1891). — Fano « *Sui postulati fondamentali della Geometria Projettiva, ecc.* (Giornale di Matematiche, 1891). — Enriques « *Sui fondamenti della Geometria Projettiva* » (Rendic. del R. Istituto Lombardo, 1894).

(**) Atti d. Accad. d. Scienze di Torino, 1895. Citerò appresso questa memoria col segno *m*.1.

(***) In altre due Note, che fan seguito a quella (Atti di Torino, 1896).

è un indirizzo *puramente deduttivo* ed *astratto* (*); e poco da aggiungere e togliere per passare dal campo delle rette e dei piani projettivi a quello molto più vasto delle forme lineari di n^a specie in uno *spazio generale*; entro un ambiente, cioè, dove esistano forme lineari di specie comunque grande: così che il presente scritto può aversi come appendice, o complemento, di quello. In particolare nulla è da modificare circa i postulati *del separarsi,* i quali saranno qui riprodotti (§ 5) senza amplificazione di sorta, rinviandosi per maggiori notizie il lettore alla memoria citata. Dalla quale è sperabile che emerga eziandio la possibilità di provare coi metodi della logica algebrica alcune affermazioni, che i termini del presente articolo non consentono di approfondire quanto sarebbe opportuno.

Circa i seguenti postulati non è detto che siano *indipendenti* fra loro, nè *irreduttibili*: condizioni queste, che toccano quasi alla perfezione ideale; soltanto si afferma che essi *bastano* (in un cogli assiomi logici (**), o leggi del pensiero) a sostener l'intero edifizio d'una geometria projettiva astratta degli iperspazî.

§ 2. — Il simbolo [0] leggasi « *punto projettivo* », o « *classe dei punti projettivi* », od anche « *spazio generale* ». Il fatto che la parola « punto » denota qui una *classe* di enti, ossia che ha valore di nome *collettivo*, può affermarsi esplicitamente con un primo postulato:

(I) $$[0] \varepsilon K \qquad \text{Pp}$$

Con un secondo postulato si dirà poi che questa classe non è *illusoria,* ossia che contiene almeno un individuo:

(II) $$[0] - = \Lambda \qquad \text{Pp.}$$

(*) *Astratto,* in quanto prescinde da ogni interpretazione *fisica* delle premesse, e quindi anche dalla loro *evidenza,* ed *intuitività geometrica*: a differenza di un altro indirizzo (che chiamerei *fisico-geometrico*) secondo il quale gli enti primitivi e gli assiomi voglion esser desunti dall'osservazione diretta del mondo esterno, e identificati con le idee che si acquistano per via d'induzione sperimentale da certi determinati oggetti e fatti fisici (Pasch, Peano, ...).

(**) Alle quali (seguendo in questo il Dedekind ed altri) ascriveremo altresì le proposizioni primitive sul *numero intero positivo* — come ad es. il principio d'*induzione* (o, piuttosto, di *deduzione*) *completa* — poichè non par guari possibile alcuna scienza deduttiva senza il loro concorso. — Questa comunanza di assiomi (è noto che l'*Analisi pura* non ha postulati suoi proprî, se tali non siano i principî sul *numero* (int. pos.) e sull'idea di *successivo ad un numero*) è una conferma della solidarietà esistente fra le discipline analitiche e geometriche.

Questo ente « punto » *non è definito,* o (come altri si esprime) è *definito in sè stesso* da tutte quelle proprietà che gli verranno attribuite man mano (*). Col postulato seguente s'impone, ad es., che « se a è un punto, esista ancora un punto diverso da quello »:

(III) $$a \varepsilon [0] . \supset : [0] - \iota a . - = \Lambda$$ Pp.

Essendo a, b due punti non coincidenti (ipotesi non assurda in virtù di (I) e (II)), col simbolo ab si rappresenta un nuovo ente primitivo, a cui si attribuiscono intanto le qualità seguenti:

(IV) $$a, b \varepsilon [0] . a - = b : \supset . ab \varepsilon K$$ Pp.

(V) $$\quad » \quad » \quad : \supset . ab \supset [0]$$ Pp.

che si potrebbero entrambe racchiudere nell'unica proposizione $a, b \varepsilon [0]. a - = b : \supset . ab \varepsilon K[0]$ (**) esprimente che « se a, b sono punti distinti, ab è una classe o varietà di punti, ossia *una figura* ». Con ciò non è detto ancora che il simbolo ab rappresenti una figura *individuata* mediante a, b: questa ed altre determinazioni del contenuto di « ab » risulteranno a poco per volta dai postulati seguenti:

(VI) $$a, b \varepsilon [0] . a - = b : \supset . a \varepsilon ab$$ Pp.

(VII) $$\quad » \quad » \quad : \supset . ab \supset ba$$ Pp.

Cioè « sotto le stesse ipotesi, la figura ab deve contenere il punto a ed esser contenuta nella figura ba ». Di qui segue immediatamente:

$$a, b \varepsilon [0] . a - = b : \supset . ab = ba$$ Teor.

$$\quad » \quad » \quad : \supset . b \varepsilon ab$$ Teor.

Adesso può *definirsi,* come l'insieme di tutti i possibili enti « ab », un nuovo ente « [1] » da chiamarsi « *retta projettiva* »:

$$[1] = \overline{r \varepsilon} \{a, b \varepsilon [0] . a - = b . r = ab : - =_{a, b} \Lambda\}$$ Def.

[1] è pertanto il simbolo d'una *classe di classi di punti,* non illusoria in virtù delle cose precedenti:

$$[1] \varepsilon KK[0] \qquad [1] - = \Lambda$$ Teor^{i}

(*) Ved. Burali-Forti « *Logica matematica* » (Milano, Hœpli, 1894), pag. 129.

(**) Così fu fatto in *m*.1, § 2, dove è anche taciuto il postulato (I).

In ordine agl'individui di questa classe ammetteremo ancora i postulati seguenti:

(VIII) $a, b \varepsilon [0] . a - = b : \supset : ab - \iota a - \iota b . - = \Lambda$ Pp.

(IX) $a, b \varepsilon [0] . a - = b . c \varepsilon ab - \iota a : \supset . ab \supset ac$ Pp.

cioè che « essendo a, b due punti distinti, la figura ab contiene un punto almeno diverso da a e da b; e se c è un punto di ab diverso da a, ab è contenuta in ac ». E da questi e dai precedenti si deduce:

$a, b \varepsilon [0] . a - = b . c \varepsilon ab - \iota a : \supset . ab = ac$ Teor.

» » $c \varepsilon ab - \iota b : \supset . ab = bc$ (*) Teor.

» » $c \varepsilon ab - \iota a - \iota b : \supset . ac = bc$ Teor.

onde si può dimostrare (m.1, § 2) qualmente:

$a, b, c, d \varepsilon [0] . a - = b . a = c . b = d : \supset . ab = cd$ Teor.

ossia che « essendo dati i punti (distinti) a e b, l'ente ab non può mutare, se questi punti non mutano ». Il simbolo « ab » può leggersi « retta projettiva ab ».

§ 3. — Essendo a un punto e k una classe arbitraria di punti, col simbolo ak denoteremo « la *visuale* (**) di k da a » vale a dire l'insieme di tutti i punti delle rette che uniscono il punto a coi varî punti di k diversi da a:

$k \varepsilon K[0] . a \varepsilon [0] : \supset . ak = \overline{x \varepsilon} (y \varepsilon k - \iota a . x \varepsilon ay : - =_y \Lambda)$ Def.

Tale nozione è fondamentale in Geometria Projettiva: per mezzo di essa è possibile una *definizione* delle varie *forme fondamentali* o *spazî lineari*, a cominciare dal *piano projettivo*. Essendo r una retta, ed a un punto fuori di r, si chiamerà « piano projettivo ar » la visuale di r da a; cosicchè:

$r \varepsilon [1] . a \varepsilon [0] - r : \supset . ar \varepsilon K[0]$ Def.

Diremo poi « *classe dei piani projettivi* », o semplicemente « *piano*

(*) Questa proposizione, equivalente al prodotto logico di (VII) e (IX), teneva luogo dapprima (m.1, § 2) a questi postulati: la sua scomposizione in (VII) e (IX) mi fu poi suggerita dal sig. Dott. A. Padoa.

(**) Parola da me proposta per rendere il tedesco « Schein » nel senso di Staudt.

projettivo », e indicheremo con [2], l'insieme di tutti i possibili piani ar; vale a dire:

$$[2] = \overline{p\,\varepsilon}\,\{r\,\varepsilon\,[1]\,.\,a\,\varepsilon\,[0] - r\,.\,p = ar : - =_{r,a} \Lambda\} \qquad \text{Def.}$$

La classe [2] è, come la [1], una *classe di classi di punti*: $[2]\,\varepsilon\,KK[0]$; ma non è anche detto che essa contenga individui, cioè che sia $r\,\varepsilon\,[1]\,.\,a\,\varepsilon\,[0] - r : - =_{r,a} \Lambda$; ciò per altro risulterà dal postulato (XI). È poi facile a vedersi, che un individuo qualsivoglia della classe [2] non può esser nè *retta*, nè *punto*; e viceversa.

In ordine al piano projettivo sembra altresì necessario un postulato speciale, che si può scegliere ad es. sotto la forma (Ved. *m*.1, § 5):

$$\text{(X)} \qquad a\,,b\,,c\,\varepsilon\,[0]\,.\,b - = c\,.\,a - \varepsilon\,bc\,.\,d\,\varepsilon\,a(bc) - \iota\,b : \supset .\,bd \supset a(bc) \qquad \text{Pp.}$$

per mezzo del quale si dimostra che « un piano è individuato da tre qualunque dei suoi punti non allineati »; che « due rette giacenti in un medesimo piano hanno sempre almeno un punto a comune »; ecc., ecc. (Ved. *m*. 1, § 5). La proposizione (X) è in fondo un nuovo predicato sulle categorie « punto projettivo » e « congiungente due punti projettivi » (§ 2).

Procedendo in modo al tutto simile, può introdursi la *forma fondamentale di 3ª specie*, o *spazio projettivo (lineare) a tre dimensioni*, mediante la definizione seguente:

$$[3] = \overline{s\,\varepsilon}\,\{p\,\varepsilon\,[2]\,.\,a\,\varepsilon\,[0] - p\,.\,s = ap : - =_{p,a} \Lambda\} \qquad \text{Def.}$$

in virtù della quale $[3]\,\varepsilon\,KK[0]$, ecc. Se ora ad es. si vuole che il massimo ambiente possibile per le figure, cioè la *classe dei punti*, sia precisamente uno spazio [3] — cioè se si vuol fare la geometria projettiva *a tre dimensioni* — conviene dar luogo ulteriormente ai tre postulati seguenti (Ved. *m*.1, §§ 2 e 6):

$$r\,\varepsilon\,[1]\,.\supset : [0] - r\,.\,- = \Lambda$$
$$p\,\varepsilon\,[2]\,.\supset : [0] - p\,.\,- = \Lambda$$
$$r\,\varepsilon\,[1]\,.\,p\,\varepsilon\,[2] : \supset .\,r \frown p - = \Lambda$$

oltre a quelli che han per soggetto il *segmento projettivo* e saranno enunciati fra poco (§ 5); cosicchè allora si potranno contare in tutto *ventidue* postulati (*).

(*) Il simile è da dire circa la geometria projettiva ad n dimensioni, posto che n sia un numero (int. pos.) dato aritmeticamente. I postulati (sufficienti) saranno per essa in numero di $10 + n + 9 = n + 19$. In questi casi per altro, il simbolo [0] non è da chiamarsi spazio *generale* (§ 1).

§ 4. — Ma il mio scopo è di protrarre *in infinito* la serie [1], [2], [3], ..., mediante un numero *finito* di definizioni e postulati. A ciò si riesce in virtù del principio logico d'*induzione completa* (*). Accanto alla definizione (§ 2):

$$(\alpha) \qquad [1] = \overline{r} \varepsilon \{a, b \varepsilon [0] . a - = b . r = ab : - =_{a, b} \Lambda\} \qquad \text{Def.}$$

pongasi l'altra:

$$(\beta) \qquad n \varepsilon 1 + \mathrm{N} . \supset . [n] = \mathrm{K}[0] \cap \overline{x} \varepsilon \{y \varepsilon [n-1] . a \varepsilon [0] - y . x = ay : - =_{y, a} \Lambda\} \qquad \text{Def.}$$

dove il simbolo $[n]$ può leggersi « *forma fondamentale di* n^a^ *specie* » o « *spazio projettivo* (*lineare*) *ad* n *dimensioni* (**). L'ultima dice in sostanza che « l'$[n]$, o spazio lineare ad n dimensioni — supposto n numero intero positivo maggior d'uno — è la classe di tutte le possibili *figure* x, per ognuna delle quali esiste un individuo y della classe $[n-1]$ (il quale alla sua volta sarà classe di punti o *figura* quand'anche fosse $n-1=1$ (§ 2)) ed un punto a fuori di esso, di guisa che x sia la visuale di y da a ». Le proposizioni (α) e (β) prese insieme costituiscono una *definizione induttiva di 2ª specie* (***), la quale determina pienamente il valore del segno $[n]$ *per n intero positivo arbitrario.* Il numero n si dirà *specie,* o *dimensione,* di $[n]$.

Per affermar poi l'esistenza (ideale) di così fatti enti $[n]$, basterà che si ammetta p. e. il postulato seguente:

$$\text{(XI)} \qquad n \varepsilon \mathrm{N} . \sigma \varepsilon [n] : \supset : [0] - \sigma . - = \Lambda \qquad \text{Pp.}$$

cioè che « dato uno spazio lineare di n^a specie, esiste almeno un punto che non gli appartiene » — onde si può dimostrare che:

$$n \varepsilon \mathrm{N} . \supset . [n] - = \Lambda \qquad \text{Teor.}$$

Supposto invero $n > 1$ ed $[n-1] - = \Lambda$, non sarà assurda l'ipotesi $y \varepsilon [n-1]$; e quindi, per il postulato (XI), nemmeno la proposizione $a \varepsilon [0] - y$. Di poi, per la definizione (α)(β), y sarà una classe di punti, e tale p. c. anche la sua visuale $x = ay$ presa dal punto a. Esisterà

(*) Ved. p. es. Burali-Forti, loc. cit., pagg. 100-103 e 126-128.

(**) Il segno $[n]$ è tolto da H. Schubert: Math. Annalen, Bd. 26.

(***) Burali-Forti, loc. cit., pag. 128. La condizione imposta ad ogni spazio $[n]$ di essere una $\mathrm{K}[0]$ giova a che tutti i segni del secondo membro di (β) abbiano un senso ancorchè resti indeterminato il valore numerico di n; ma essa potrebbe ciò non ostante sopprimersi, dopo di che quel secondo membro avrebbe sempre un significato preciso, quando ad n si dessero *successivamente* i valori 2, 3, 4, ...

dunque allora un individuo x almeno della classe rappresentata nel secondo membro di (β). D'altra parte si sa già (§ 2) che $[1] - = \Lambda$: quindi il teorema, in forza del principio d'induzione completa, dovrà esser vero per qualsivoglia n (*).

Per le proprietà che si aggirano intorno *all'appartenersi* degli enti $[0]$ ed $[n]$, ossia intorno alle mutue projezioni e intersezioni di spazî lineari, non c'è bisogno d'altri postulati oltre quelli ammessi finora (*undici* in tutto). Così p. e. il fatto che « una retta ed un piano giacenti in un medesimo spazio projettivo di 3ª specie hanno sempre (almeno) un punto a comune », ossia che:

$$\sigma \varepsilon [3] . r \varepsilon [1] . p \varepsilon [2] . r \cup p \supset \sigma : \supset . r \cap p - = \Lambda \qquad \text{Teor.}$$

si può dimostrare in modo perfettamente simile a quello da me seguito nel caso di due rette giacenti nel medesimo piano (m.1, pag. 18). Ed è similmente un teorema la proposizione che « una retta ed un piano che non abbiano alcun punto comune individuano un $[4]$ che li contiene ». Ecc., ecc.

§ 5. — Essendo a, b, c tre punti distinti sopra una retta projettiva data, il simbolo (abc) leggasi « *segmento projettivo abc* ».

$$\text{(XII)} \quad r \varepsilon [1] . a, b, c \varepsilon r . a - = b . b - = c . c - = a : \supset . (abc) \varepsilon \mathrm{K}r \qquad \text{Pp.}$$

$$\text{(XIII)} \quad » \quad » \quad » \quad : \supset . a - \varepsilon (abc) \qquad »$$

$$\text{(XIV)} \quad » \quad » \quad » \quad : \supset . (abc) = (cba) \qquad »$$

$$\text{(XV)} \quad r \varepsilon [1] . a, b, c \varepsilon r . a - = b . b - = c . c - = a . d \varepsilon r - (abc) - \iota a : \\ : \supset . d \varepsilon (bca) \qquad \text{Pp.}$$

$$\text{(XVI)} \quad r \varepsilon [1] . a, b, c \varepsilon r . a - = b . b - = c . c - = a : \supset : r - \iota a - \iota c - \\ - (abc) . - = \Lambda \qquad \text{Pp.}$$

$$\text{(XVII)} \quad r \varepsilon [1] . a, b, c \varepsilon r . a - = b . b - = c . c - = a . d \varepsilon (bca) \cap (cab) : \\ : \supset . d - \varepsilon (abc) \qquad \text{Pp.}$$

$$\text{(XVIII)} \quad r \varepsilon [1] . a, b, c \varepsilon r . a - = b . b - = c . c - = a . d \varepsilon (abc) : \\ : \supset . (abc) = (adc) \qquad \text{Pp.}$$

(*) Viceversa dal teorema si deduce il postulato; onde questo potrebbe esser sostituito da quello. — Si può osservare che il postulato (XI) abbraccia *infinite* affermazioni, per altro organizzate sotto *un'unica legge*. Un fatto simile accade p. e. nell'assioma:

$$a \varepsilon \mathrm{N} . \supset . a + 1 \varepsilon \mathrm{N}$$

che si può sciogliere in infinite proposizioni, cioè: se 1 è un numero, il successivo di 1 (cioè 2) è un numero; se 2 è un numero ...

(XIX) $r \varepsilon [1] . a, b, c \varepsilon r . a - = b . b - = c . c - = a : h, k \varepsilon K[0].$
$h, k - = \Lambda . h \cup k = (abc) .\cdot. x \varepsilon h . y \varepsilon k : \supset_{x,y} . y \varepsilon (acx) ::$
$:: \supset :\cdot: z \varepsilon (abc) .\cdot. u \varepsilon (abc) . z \varepsilon (acu) : \supset_u . u \varepsilon h .\cdot. v \varepsilon (abc).$
$. v \varepsilon (acz) : \supset_v . v \varepsilon k :: - =_z \Lambda$ Pp.

Queste proposizioni corrono al tutto indipendenti dai Postulati (I), ..., (XI), potendosi qui legger dovunque $r \varepsilon K$ al posto di $r \varepsilon [1]$. Sopra di esse potrebbe dunque costruirsi un trattato *della struttura* o *connessione* di certe classi (ad una dimensione), di cui la *retta projettiva* non è che un caso particolare.

Conviene per ultimo ammettere il postulato seguente, che giova agli scopi della Geometria projettiva:

(XX) $r, r' \varepsilon [1] . r - = r' . a, b, c, d \varepsilon r . a - = b . b - = c . c - = a .$
$a', b', c', d' \varepsilon r' . a' - = b' . b' - = c' . c' - = a' .\cdot. p \varepsilon [0] . (a, a', p) \varepsilon \mathrm{Cl} .$
$. (b, b', p) \varepsilon \mathrm{Cl} . (c, c', p) \varepsilon \mathrm{Cl} . (d, d', p) \varepsilon \mathrm{Cl} : - =_p \Lambda :: \supset : d \varepsilon (abc) .$
$. \supset . d' \varepsilon (a'b'c')$ Pp.

dove il valore del segno « ε Cl » (sono *collineari*) viene espresso da:

$a, b, c \varepsilon [0] . \supset :: (a, b, c) \varepsilon \mathrm{Cl} . = .\cdot. x, y \varepsilon [0] . x - = y . a, b, c \varepsilon xy : - =_{x,y} \Lambda$ Def.

Torino, febbraio 1896.

El cultivo de la matematica y la forma deductiva de la inferencia por el ingeniero geografo EZEQUIEL PEREZ, jefe del Departamento de Pesos y medidas del Ministerio de Fomento. — Mexico (*Memorias y Revistas de la Sociedad cientifica « Antonio Alzate »*, Tomo VIII).

Questo breve scritto contiene parecchie sensate osservazioni sulla convenienza di trattare la teoria del sillogismo e in generale la logica deduttiva con procedimenti matematici e sul vantaggio che presenta lo studio della matematica per tutti quelli che devono spesso far uso del ragionamento deduttivo (*para todos los que cultivan la forma deductiva de la prueba*).

L'Autore dice di essere stato spinto a occuparsi di questi argomenti dal desiderio di determinare le cause che conferiscono al ragionamento per deduzione quel rigore che lo contraddistingue dalle altre forme d'inferenza (*par el interes de buscar el porquè del rigor de las conclusiones syllogisticas*). Non mi pare però che il suo lavoro porti alcun contributo sostanziale verso la soluzione di tale questione che, come tante altre delle questioni cosidette *filosofiche*, presenta maggior difficoltà ad essere bene posta ed esattamente formulata che non a essere risolta, una volta che sia stata enunciata in modo preciso e determinato. Il che certamente non equivale a dire che essa sia una questione di poca importanza e che non esiga per esser trattata convenientemente una conoscenza profonda e comprensiva dei varî metodi e processi mentali che entrano in azione nelle ricerche scientifiche, dei loro rispettivi pregi ed inconvenienti ed in modo speciale della funzione (rôle) del ragionamento deduttivo e delle cause che lo rendono applicabile ed efficace in certi rami d'investigazione e non in certi altri (*).

(*) Tra i filosofi contemporanei quello che, a mio parere, ha trattato più a fondo e in modo più esauriente questa questione è lo Stuart Mill nel suo « *System of Logic inductive and deductive* ». Anche il *Cours de philosophie positive* del Comte nella parte dedicata alle scienze matematiche e fisiche (v. specialmente il II volume dove parla dell'importanza delle ipotesi per la ricerca scientifica) è pieno di osservazioni acute e di geniali *aperçus* su questo soggetto. Dell'influenza esercitata a questo riguardo dagli scritti di questi due grandi pensatori, porta evidenti traccie la classica opera del Prof. Mach sulla Storia della Meccanica (*Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*. Leizig, Brockhaus) la

Dopo aver accennato vagamente ad alcune superficiali analogie tra le operazioni della logica e quelle dell'algebra l'A. passa ad esporre un suo sistema di notazioni logiche il quale a dir vero non differisce che per qualche dettaglio da quelli comunemente adottati dai cultori della logica matematica anteriori al Leibniz e al Boole e da quei molti altri posteriori che non ne hanno subita l'influenza (come per es. lo Stanley Jevons). Il torto principale loro e del Perez è quello di volere ad ogni costo investire le operazioni della logica di *tutte* le proprietà delle corrispondenti dell'algebra e di non essersi ancora reso perfettamente conto che ciò che rende opportuna e vantaggiosa l'introduzione dei simboli è semplicemente il fatto di poterli assoggettare a delle *regole fisse e generali,* coincidano poi queste o no, o coincidano in tutto o solo in parte colle regole dell'algebra ordinaria. Questa tendenza, che si riconnette a un concetto troppo ristretto di ciò che è l'*algebra*, conduce da una parte a una inutile complicazione nei simboli adottati mentre la sola ragione d'essere di questi starebbe nel portare una semplificazione ai processi del linguaggio ordinario (*), e d'altra parte induce a porre a base della trattazione non le operazioni e relazioni effettivamente più atte ad occupare tal posto, ma invece altre che non presentano, in compenso di molti inconvenienti, altro vantaggio che quello di offrire qualche maggiore analogia con quelle adoperate dall'aritmetica (**).

L'articolo finisce colla traduzione di parecchie pagine d'un discorso del Prof. Bougaieff dell'Università di Mosca, sul valore degli studi matematici come preparazione per le ricerche scientifiche e come disciplina mentale (*como instrumento cientifico y pedagogico*).

G. Vailati.

---

quale alla sua volta ha direttamente contribuito a determinare le vedute generali sui metodi d'investigazione scientifica che informano la magistrale opera postuma dello Herz sui principî della meccanica (Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1890, v. la prefazione a pag. XXVI e l'introduzione a pag. 10).

(*) Così per esempio nel simbolo: $A = \frac{B}{n}$ che il Perez adopera per indicare l'inclusione della classe A nella classe B, figurano, oltre ad A e B, tre segni mentre non c'è affatto ragione di adoperarne più di uno.

(**) Così l'operazione di « somma di classi », che il Perez considera, è ancora la somma nel senso dell'algebra.

Dimostrazione di una formula di calcolo integrale.

Il Direttore della « *Rivista* » recentemente mi faceva notare che « una funzione di due variabili, integrabile in un'area piana, può non essere integrabile lungo segmenti rettilinei che cadono in quell'area ».

Questa osservazione rende necessario modificare la consueta dimostrazione della notissima formula;

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} ds = - \int f \cos(n \,.\, x)\, dl \,,$$

dove: f rappresenta una funzione uniforme, finita e continua nell'area s, limitata dalla linea l, ed n indica la direzione della normale interna al contorno.

La formula in parola si dimostra solitamente ponendo $ds = dxdy$ ed eseguendo dapprima la integrazione rispetto ad x. Ora perchè tale dimostrazione sia rigorosa bisogna supporre $\frac{\partial f}{\partial x}$ integrabile lungo ogni segmento rettilineo del campo s, parallelo all'asse delle x, il che non è dimostrato dover necessariamente accadere quando si *supponga soltanto che* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *sia finita ed integrabile in tutta l'area* s.

Ritenuta la linea l percorsa nel senso positivo, cioè in guisa che l'osservatore abbia sempre l'area racchiusa da quella stessa parte dalla quale un'osservatore, percorrente l'asse delle x nel senso positivo, ha la regione delle y positive, si ha ovviamente:

$$- \int f \cos(n\,, x)\, dl = \int_l f\, dy \,.$$

Si immagini suddivisa l in tante parti per mezzo di tante parallele all'asse delle x; detta Δy la distanza fra due parallele consecutive $(y\,, y + \Delta y)$ e distinti cogli indici e ed u un punto di entrata ed il successivo punto di uscita nell'area s della parallela y all'asse delle x, avremo:

$$-\int f\cos(n\,.\,x)\,dl = \lim \sum_{(\Delta y)} \big(f(x_u\,,y) - f(x_e\,,y)\big)\,\Delta y \quad (*).$$

Si immagini inoltre condotte attraverso l'area s tante parallele x all'asse delle y: il segmento eu riuscirà così suddiviso in tante parti Δx, ed avremo:

$$f(x_u\,,y) - f(x_e\,,u) = \sum_{(\Delta x)} f'_x(x_i\,,y)\,\Delta x\,,$$

dove x_i è uno dei valori che la x prende lungo il segmento Δx.

Sarà quindi:

$$-\int f\cos(n\,,x)\,dl = \lim \sum_{(\Delta y)} \sum_{(\Delta x)} f'_x(x_i\,,y)\,.\,\Delta x\,.\,\Delta y\,,$$

dove il numero delle dividenti parallele all'asse delle y è arbitrario.

Si può adunque fare in guisa che le Δx, crescendo il loro numero all'infinito, divengano tutte quante infinitesime insieme alle Δy e perciò essendo $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ integrabile, si conchiude:

$$-\int f\cos(n\,,x)\,dl = \int \frac{\partial f}{\partial x}\,ds\,. \qquad \text{c. d. d.}$$

La formula continua a sussistere anche quando $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ diventi infinito, con segno determinato o non, in un numero finito di punti del campo s o del suo contorno. Infatti, esclusi questi dal campo di integrazione togliendo dal medesimo tanti intorni dei punti stessi, all'area residua è applicabile la formula: ma qualunque sia la forma degli intorni gli integrali $\int f\cos(n\,.\,x)\,dl$, estesi ai rispettivi contorni, sono tutti evanescenti colle dimensioni degli intorni stessi, e però col passaggio al limite si conclude la validità della formula.

Così pure si dimostra valida la formula anche quando il numero dei punti di infinito sia infinitamente grande, ma tale però che divenga finito togliendo intorni arbitrariamente piccoli di parecchi punti limiti.

Con considerazioni affatto simili si dimostra rigorosamente la validità delle note formule congeneri, relative alle funzioni di 3 variabili, per es. di quella formula da me data ultimamente nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » (**).

G. Morera.

(*) Per semplicità si suppone che le parallele y all'asse delle x non incontrino la linea l in più di due punti.

(**) Cfr. il tomo X, adunanza del 22 Dicembre 1895.

Alcuni teoremi intorno alle funzioni logiche.

Già il Boole aveva dimostrato che, per ottenere il prodotto di due funzioni, basta moltiplicare i coefficienti omonimi dei loro sviluppi secondo un determinato argomento. Lo Schröder, nelle sue *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, riprodusse questo teorema al n° 45 (Vol. I, p. 421), vi premise l'analogo per la somma (Vorbemerkung zu Th. 45, p. 420) e vi aggiunse l'altro (n° 46, p. 422): « la negazione di una funzione sviluppata si ottiene negando i coefficienti e lasciando invariati i costituenti ». Donde concluse che « in virtù di tali teoremi si può dire che ogni operazione, da eseguirsi con o su funzioni, si può semplicemente trasportare ai coefficienti dei loro sviluppi ».

Nella Nota presente si dimostra direttamente tale teorema, dividendolo in due e preponendovi come lemmi, I° una proposizione analoga al teorema così detto dei coefficienti eguali, nella teoria delle funzioni analitiche, e II° la proposizione intorno alla negazione (n° 46 dello Schröder).

Lemma I° — Per una funzione vi è uno ed un solo sviluppo secondo un dato argomento. Ossia:

1) Due funzioni $f(a)$ e $g(a)$ tra loro identiche, cioè eguali per ogni valore di a, hanno i coefficienti di sviluppo omonimi rispettivamente eguali.

Diffatti, sussistendo la eguaglianza

$$f(a) = g(a)$$

per tutti i valori di a, sarà, per $a = 1$ e per $a = 0$:

$$f(1) = g(1) \quad \text{e} \quad f(0) = g(0) . \qquad \text{c. v. d.}$$

2) Due funzioni che hanno i coefficienti di sviluppo omonimi rispettivamente eguali, sono tra loro identiche.

Si ha per ipotesi:

$$f(1) = g(1)$$
$$f(0) = g(0) .$$

Presi un qualunque valore a della variabile e la sua negazione a_1, si ha, moltiplicando la prima equazione per a e la seconda per a_1 ed addendo:

$$f(1)a + f(0)a_1 = g(1)a + g(0)a_1 ;$$

ossia

$$f(a) = g(a) . \qquad \text{c. v. d.}$$

Lemma II° — Per negare una funzione sviluppata basta negare i coefficienti.

$$\begin{aligned} f_1(a) = [f(1)a + f(0)a_1]_1 &= [f_1(1) + a_1]\,[f_1(0) + a] \\ &= f_1(1)\,f_1(0) + f_1(1)a + f_1(0)a_1 \\ &= f_1(1)\,f_1(0)a + f_1(1)\,f_1(0)a_1 + f_1(1)a + f_1(0)a_1 \\ &= f_1(1)a + f_1(0)a_1 . \qquad \text{c. v. d.} \end{aligned}$$

Teorema I° — Per eseguire una qualsiasi operazione (G) su di una funzione sviluppata (f) basta eseguirla sui coefficienti.

Ossia: posto

$$G[f(a)] = \psi(a) ,$$

sarà:

$$\psi(1) = G[f(1)] \quad \text{e} \quad \psi(0) = G[f(0)] .$$

Difatti, sviluppando G per $f(a)$:

$$\psi(a) = G(1)f(a) + G(0)f_1(a)$$

e quindi sviluppando per a è

$$= G(1)\,\{f(1)a + f(0)a_1\} + G(0)\,\{f_1(1)a + f_1(0)a_1\} ,$$

per il lemma II°.

Mettendo in evidenza a ed a_1:

$$\begin{aligned} &= \{G(1)f(1) + G(0)f_1(1)\}a + \{G(1)f(0) + G(0)f_1(0)\}a_1 \\ &= G[f(1)] \,.\, a + G[f(0)] \,.\, a_1 , \end{aligned}$$

si ottiene, per il lemma I°, eguagliando i coefficienti:

$$\psi(1) = G[f(1)] \quad \text{e} \quad \psi(0) = G[f(0)] . \qquad \text{c. v. d.}$$

Teorema II° — Per eseguire una qualsiasi operazione con funzioni logiche, basta eseguirla fra i coefficienti omonimi dei loro sviluppi.

Ossia: posto

$$G[f(a) , g(a)] = \psi(a) ,$$

sarà:

$$\psi(1) = G[f(1) , g(1)] \quad \text{e} \quad \psi(0) = G[f(0) , g(0)] .$$

Difatti, sviluppando G per $f(a)$ e $g(a)$:

$$\psi(a)=G(1,1)f(a)g(a)+G(1,0)f(a)g_1(a)+G(0,1)f_1(a)g(a)+G(0,0)f_1(a)g_1(a),$$

e quindi sviluppando per a, e mettendo in evidenza a ed a_1, è:

$$\psi(a)=\{G(1,1)f(1)g(1)+G(1,0)f(1)g_1(1)+G(0,1)f_1(1)g(1)+G(0,0)f_1(1)g_1(1)\}a$$
$$+\{G(1,1)f(0)g(0)+G(1,0)f(0)g_1(0)+G(0,1)f_1(0)g_1(0)+G(0,0)f_1(0)g_1(0)\}a_1$$
$$=G[f(1),g(1)].a+G[f(0),g(0)].a_1$$

ed eguagliando i coefficienti, si ottiene:

$$\psi(1)=G[f(1),g(1)] \quad \text{e} \quad \psi(0)=G[f(0),g(0)]. \qquad \text{c. v. d.}$$

Il teorema si può facilmente estendere, con la prova da n ad $n+1$, per qualsivoglia numero di funzioni. I due teoremi dati dallo Schröder, al n° 45, si deducono come corollarî.

Roma, gennaio 1896.

Albino Nagy.

NOUVELLES PUBLICATIONS

E. Carvallo. — *Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou trascendantes.* Paris, Nony, 1896.

F. Klein. — *Conferenze sopra alcune questioni di Geometria elementare,* redatte da F. Tägert, e tradotte dal tedesco dal Prof. F. Giudice, con una prefazione del Prof. Gino Loria. Torino, Rosenberg e Sellier, 1896; L. 3.

F. Klein. — *Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire.* Rédaction française par J. Gries. Paris, Nony, 1896; 2 fr.

H. Grassmann. — *Gesammelte Werke.* I Band, II Theil. *Die Ausdehnungslehre von 1862.* Leipzig, Teubner, 1896; pag. VIII+511.

E. Goursat. — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.* Tome I, Paris, Hermann, 1896; pag. VIII+226, prix 7,50 fr.

Dr O. Stolz. — *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung.* Zweiter Theil, Leipzig, Teubner, 1896; pag. VIII+338.

Dr G. M. Testi. — *Corso di Matematiche.* Vol. II, *Geometria elementare.* Livorno, Giusti, 1896; pag. XI+448.

A. Messina. — *I misuratori di energia elettrica.* Palermo, Reber, 1896, pag. XIX+130; L. 5.

Sulle serie di funzioni analitiche

Osservazioni di F. GERBALDI, *a Palermo*

Nell'importante opera del CASORATI « Teorica delle funzioni di variabile complessa. Pavia, 1868 » si legge a pag. 267 il seguente teorema:

Se entro una porzione S *del piano z le*

$$Q_1(z),\ Q_2(z),\ \ldots$$

sono funzioni monodrome, continue e finite, e la serie

$$(1) \qquad Q_1(z) + Q_2(z) + \ldots$$

è convergente:

1° *La somma* $\Phi(z)$ *di questa serie sarà pure funzione monodroma, continua e finita entro* S*;*

2° *Entro* S *si avrà:*

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{dQ_1(z)}{dz} + \frac{dQ_2(z)}{dz} + \ldots;$$

3° *Si avrà pure:*

$$\int \Phi(z)\,dz = \int Q_1(z)\,dz + \int Q_2(z)\,dz + \ldots,$$

intendendo che gli integrali siano presi tutti lungo una medesima linea di lunghezza finita tracciata entro S.

Questo teorema non si trova dimostrato nell'opera suddetta; il CASORATI si limita ad accennare in nota [1] che una dimostrazione era stata data dal sig. H. LAURENT (1865).

La continuità della funzione rappresentata da una serie convergente,

[1] V. anche la nota a pag. IX della Prefazione.

i cui termini sono funzioni continue di una variabile reale, o di una variabile imaginaria nel senso generale inteso da CAUCHY, risale a CAUCHY medesimo (1821). Ma il teorema da lui esposto nel suo celebre « Cours d'Analyse de l'École Polytechnique », a pag. 131 e 279, ha bisogno di restrizioni, siccome osservò per il primo ABEL (1826) nella sua memoria sulla serie binomiale (1).

Ritornato più tardi CAUCHY sullo stesso argomento, nella « Note sur les séries convergentes dont les diverses termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données » (2), limitò la natura della convergenza della serie, supponendo che essa sia, come oggi si dice, in ugual grado (o uniforme, o equabile); e con questa restrizione la continuità della funzione rappresentata dalla serie fu rigorosamente stabilita. Inoltre, a proposito delle serie i cui termini sono funzioni di variabile imaginaria, nella *Note* ora citata il CAUCHY asserisce senza dimostrazione: *Nello stesso caso, se ogni termine offre una derivata unica, la serie formata colle derivate dei diversi termini sarà ancora una serie convergente, di cui la somma offrirà una sola derivata equivalente alla derivata della somma della serie proposta.* In questo luogo di CAUCHY troviamo per la prima volta pubblicate le parti prima e seconda del teorema sopra enunciato, coll'aggiunta però della restrizione della equabile convergenza della serie.

Per ciò che riguarda la terza parte, CAUCHY ritenne sufficiente la sola convergenza della serie in tutto il campo di integrazione (3).

Assai prima che comparisse la *Note* sopra citata di CAUCHY, il WEIERSTRASS era in possesso delle due prime parti del teorema, rigorosamente enunciate e dimostrate, siccome ora risulta dalla pubblicazione delle sue opere (4). Quivi di fatto troviamo una memoria « Zur Theorie der Potenzreihen », scritta a Münster nel 1841, nella quale (5) si stabilisce che:

Se

$$F_0(x_1, x_2, \dots x_\rho), \quad F_1(x_1, x_2, \dots x_\rho), \quad F_2(x_1, x_2, \dots x_\rho), \dots$$

denotano funzioni a un sol valore, analitiche, delle variabili $x_1, x_2, \dots x_\rho$,

---

(1) *Crelle's Journal*, Bd. I, pp. 311-339.

(2) *Comptes rendus*, XXXVI (14 mars 1853).

(3) Cfr. MOIGNO « Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, redigées d'après les méthodes de M. Cauchy, Paris, t. II (1844), pag. 70 ».

(4) *Mathematische Werke von Karl Weierstrass*, Berlin, Bd. I (1894), Bd. II (1895).

(5) l. c., Bd. II, pag. 73.

le quali soddisfano alla condizione che, per tutti i sistemi di valori appartenenti ad un campo connesso G, *la serie*

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\rho)$$

è assolutamente ed uniformemente convergente, la sua somma rappresenta dentro al campo G *una funzione ad un sol valore, analitica, di* $x_1, x_2, \dots x_\rho$, *ed inoltre si ha (per* $\lambda = 1, 2, \dots \rho$*):*

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\rho) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\rho).$$

Limitando questa proposizione al caso di funzioni di una sola variabile, e tenendo presente che una funzione della variabile complessa, monogena (secondo Cauchy), monodroma e continua in un campo G [1], coincide, per il celebre teorema di Cauchy (1832) sulla sviluppabilità di tali funzioni in serie di potenze, con una funzione *analitica* (secondo Weierstrass) di z in quel campo, si vede subito che in quest'ultima proposizione sono contenute le parti prima e seconda del teorema enunciato in principio, colla restrizione della convergenza della serie assoluta ed uniforme.

Questa stessa restrizione avvertì il Weierstrass, prima del 1870 [2], doversi fare per essere sicuri che una serie di funzioni sia integrabile termine a termine. Il Darboux nel suo « Mémoire sur les fonctions discontinues » [3] ed il Dini nei suoi « Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa 1878 » diedero esempi di serie convergenti, ma non uniformemente, tali che la somma è continua, e ciò nonostante la serie degli integrali non converge, o, essendo convergente, non rappresenta l'integrale della serie data. Questi matematici inoltre stabilirono rigorosamente per le serie di funzioni di variabile reale che, affinchè sia applicabile l'integrazione termine a termine è sufficiente la convergenza equabile della serie nello intervallo di integrazione, ed affinchè sia applicabile la derivazione termine a termine, è sufficiente che la serie delle derivate sia uniformemente convergente in un intorno finito del punto, in cui si prendono le derivata; e con ciò apportarono

---

(1) o, come altri dicono, una *funzione olomorfa*, o *sinettica*, in un campo G.

(2) Cfr. E. Heine: « Ueber trigonometrische Reihen », *Crelles Journal*, Bd. 71, pag. 353.

(3) *Annales de l'École Normale Supérieure*, 1875.

all'analisi con variabile reale quei perfezionamenti che il CASORATI desiderava fin dal 1868 (v. nota a pag. 268 della sua « Teorica »).

Tali risultati si estendono subito alle serie i cui termini sono funzioni di variabile complessa; e però, per applicare con sicurezza le parti prima e seconda del teorema, gli analisti rigorosi vollero eziandio per le funzioni di variabile complessa studiare ogni volta insieme alla serie data anche la serie delle derivate. Citiamo ad esempio la memoria del DINI « Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa », scritta nell'ottobre 1880, ed inserita nei *Collectanea Mathematica in memoriam D. Chelini* (cfr. pag. 260).

Se non che ben diceva il CASORATI nella nota, già citata, a pag. 267 della sua « Teorica »: *Nel presente argomento della continuità e derivazione delle serie, non meno che in tutte le altre parti dell'analisi delle funzioni, la considerazione della variabile complessa, congiunta coll'adottato concetto di funzione, permette di introdurre una regolarità e semplicità, che non si può avere quando la variabile è limitata a punti-valore costituenti una estensione d'una sola dimensione, ciò è dire infine, a valori reali.* Ed invero, se i termini d'una serie sono funzioni di variabile complessa, olomorfe in un'area S, per conchiudere le parti prima e seconda del teorema, è sufficiente che la serie sia in quell'area assolutamente e uniformemente convergente; la considerazione della serie delle derivate è superflua. Ciò segue non soltanto dal teorema del WEIERSTRASS, sopra riportato, che non sembra sia stato pubblicato prima del 1894, ma eziandio del teorema seguente, che lo stesso WEIERSTRASS diede nella sua memoria « Zur Functionenlehre », presentata il 12 agosto 1880 all'Accademia delle Scienze di Berlino [1].

Siano date, in un ordine determinato, infinite serie di potenze d'una variabile $z = x + iy$

$$P(z)\,,\ P_1(z)\,,\ P_2(z)\,,\ \ldots$$

ciascuna serie potendo contenere un numero qualunque di potenze positive e negative, e sia possibile assegnare due numeri R *e* R′, *dei quali il primo sia positivo o nullo, e il secondo sia più grande del primo, e tali che nel campo definito dalla limitazione*

$$R < |z| < R'$$

---

[1] *Monatsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* 1880, pag. 719. Cfr. pure: *Abhandlungen aus der Functionenlehre* (Berlin 1886) pag. 74; *Mathematische Werke,* Bd. II, pag. 205; e ancora: BIERMANN, *Theorie der analytischen Functionen* (Berlin 1887) pag. 146; FORSYTH, *Theory of Functions of a complexe Variable* (Cambridge 1893), pag. 129.

non solamente ciascuna delle date serie converge, ma converge ancora la somma $\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z)$, *e veramente quest'ultima converge uniformemente per tutti quei valori della variabile che hanno uno stesso modulo. — Allora, se* $A_\mu^{(\nu)}$ *indica il coefficiente di* z^μ *in* $P_\nu(z)$, *la somma* $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}$ *avrà, per ogni valore di* μ, *un valore finito, che si indicherà con* A_μ, *e per ogni valore di* z, *il cui modulo cade tra* R *e* R', *la serie* $\sum_\mu A_\mu z^\mu$ *converge, e si ha*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z) = \sum_\mu A_\mu z^\mu. \quad (^1)$$

Si ha inoltre (²)

$$\frac{d}{dz} \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d P_\nu(z)}{dz} .$$

Questo teorema è oggigiorno da ritenersi come fondamentale nella teoria delle funzioni di variabile complessa, per le importanti e numerose applicazioni che dal 1880 in qua se ne sono fatte nell'analisi; tra le quali basti accennare, oltre a quelle dovute al WEIERSTRASS stesso, quella che ha servito al MITTAG-LEFFLER (³) per stabilire il celebre teorema che porta il suo nome, e quella fattane dal POINCARÉ nel costruire le funzioni thetafuchsiane (⁴).

Appunto per il vantaggio, che offre il teorema in discorso, di risparmiare (se non sempre, almeno in un numero grandissimo di casi) lo studio della serie delle derivate, sarebbe stato utile che esso avesse trovato posto nell'eccellente trattato del JORDAN « Cours d'Analyse de l'École Polytechnique », dove si ha da rilevare che esso fu bensì

(¹) La traduzione in questi termini è tolta dalla Nota del Prof. C. ARZELÀ: « Sulla teoria delle funzioni analitiche », *Rendiconto delle Sessioni della R. Acc. delle Sc. dell'Istituto di Bologna*, dicembre 1887.

(²) V. ad es. nei *Mathematische Werke* la nota a pag. 208, del Bd. II.

(³) « Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable independante », *Acta Mathematica*, v. IV (1884), pag. 14.

(⁴) « Mémoire sur les fonctions Fuchsiennes », *Acta Mathematica*, v. I (1882). È chiaro, sebbene non lo richiami espressamente, che il POINCARÉ si appoggia sul teorema in discorso, per concludere (l. c., pag. 208), appena dimostrata la convergenza assoluta ed equabile della serie $\Theta(z)$ in un certo campo, che questa rappresenta ivi una funzione olomorfa, e per applicare in seguito alla stessa serie la derivazione termine per termine.

enunciato nell'indice (pag. XII) del tomo I (2eme édition) colle parole: « *Une série uniformément convergente, à termes synectiques, est synectique* »; ma non è svolto nel testo.

Il vantaggio poi diventa anche maggiore, se si tien conto di una proposizione dimostrata dal RUNGE [1], per la quale basta avere verificata la uniforme convergenza della serie al contorno dell'area S, quando questo contorno è finito; giacchè dalla uniforme convergenza lungo il contorno, segue la uniforme convergenza della serie in un'area qualunque S', che abbia tutti i punti intermi ad S. Così che il teorema si può enunciare come segue:

Sia una serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *ed un'area* S *semplicemente connessa. Se le funzioni* $f_n(z)$ *sono funzioni della variabile complessa* z *olomorfe nell'area* S *e continue al contorno, e se la serie converge uniformemente sul contorno:* 1°) *la serie converge uniformemente in ogni area* S', *che ha tutti i punti interni ad* S, *e rappresenta una funzione* F(z) *di variabile complessa olomorfa in* S'; 2°) *le serie formate colle derivate* m^{esime} *dei termini* $f_n(z)$ *convergono pur esse uniformemente in* S' *e rappresentano le derivate* m^{esime} *di* F(z).

Sotto questa forma il teorema è stato enunciato e dimostrato da P. PAINLEVÉ (giugno 1887) nella tesi: « Sur les lignes singulières des fonctions analytiques », tesi che fu poi inserita negli *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II (1888). Il PAINLEVÉ lo stabilisce con un procedimento del tutto indipendente da quello tenuto dal WEIERSTRASS; la dimostrazione del PAINLEVÉ si legge anche nel « Cours d'Analyse professé par M. DEMARTRES, Paris (1892), 2eme partie, p. 74 ».

Intorno allo stesso teorema citeremo ancora due note, l'una di DE LA VALLÉE POUSSIN « Note sur les séries dont les termes sont fonctions d'une variable complexe », l'altra di LERCH « Sur la différentiation des séries », inserite entrambe nel v. XI (1892) del *Jornal de Sciencias Math. e Astr.*, dove si vede che questi autori si sono occupati ciascuno direttamente della questione, senza essere informati dei lavori precedenti di WEIERSTRASS, di RUNGE e PAINLEVÉ.

Frattanto resta pienamente stabilito che la uniforme convergenza della serie al contorno dell'area S è sufficiente per concludere tutte tre le parti del teorema. Ma è essa necessaria?

Per la serie di funzioni di variabile reale, tutte finite e continue in uno stesso intervallo, le condizioni necessarie e sufficienti perchè sia applicabile la derivazione e la integrazione termine a termine furono

---

[1] « Zur Theorie der analytischen Functionen », *Acta Mathematica*, VI (1885).

stabilite dal Prof. ARZELÀ [1], il quale ha a questo scopo introdotto il concetto d'una particolare maniera di convergenza delle serie di funzioni, che è più generale della convergenza uniforme, e che egli ha chiamato *convergenza uniforme a tratti.*

Per le serie di funzioni di variabile complessa, olomorfe in un campo comune, il RUNGE mostrò per il primo, nel lavoro che di lui abbiamo sopra citato, con un esempio d'una serie di funzioni razionali intere, che la convergenza uniforme della serie in quel campo non è necessaria, e che questa può cessare lungo certe linee del campo, mentre tuttavia la serie converge e rappresenta una funzione olomorfa nel campo.

Questa osservazione del RUNGE spinse il prof. ARZELÀ a cercare le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè una serie di funzioni di variabile complessa, olomorfe in un'area S semplicemente connessa, rappresenti pure una funzione olomorfa in quest'area; tali condizioni furono da lui trovate ed esposte nella Nota « Sulla teoria delle funzioni analitiche » più sopra citata, nella quale è introdotto il concetto della *convergenza uniforme a strati* per una serie di funzioni di due variabili reali, o di funzioni di una variabile complessa.

Palermo, dicembre 1895.

F. GERBALDI.

---

[1] « Intorno alla continuità delle somme di infinite funzioni continue », *Rendic. dell'Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna,* 17 aprile 1884. — « Sull'integrabilità d'una serie di funzioni », *Rendic. della R. Acc. dei Lincei,* v. I, s. IV, maggio 1885.

Sul teorema dell'esistenza delle funzioni Fuchsiane

Nota del Dr. F. Bagnera, *a Palermo*

Sia G un gruppo Fuchsiano, le cui sostituzioni

$$T_n = \left[z \, , \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} \right]$$

lasciano inalterata la circonferenza C, che diremo *fondamentale,* col centro nell'origine e col raggio eguale all'unità.

Si sa che in corrispondenza ad un tale gruppo, esiste un modo (anzi infiniti modi) di dividere *tutto* il piano in regioni R tali che, da una di esse R_0, si passa ad un'altra qualunque R_n, mediante una ben determinata sostituzione di G: ogni regione R confina, lungo tutto il suo perimetro, con certe sue trasformate, ed è costituita di due poligoni normali, ciascuno ad un sol contorno, ovvero di un solo poligono normale, ma a più contorni, secondo che i punti ove G è continuo, tutti situati sopra la circonferenza fondamentale, esauriscono, o no, tutti i punti di questa.

Ha alta importanza il fatto che, per ogni gruppo tale che G, esistono infinite funzioni uniformi della variabile complessa z, legate due a due da relazioni algebriche, che restano inalterate per tutte le sostituzioni del gruppo. Per arrivare a questo risultato, il sig. H. Poincaré (*) dimostra, supponendo l'intero m maggiore dell'unità, la convergenza assoluta ed equabile della serie

$$\Theta(z) = \Sigma \, H\left(\frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}\right)(c_n z + d_n)^{-2m}, \tag{1}$$

purchè z non sia:

(*) *Mémoire sur les fonctions Fuchsiennes,* Acta Mathematica, I, pag. 207.

1°) Uno dei trasformati, per qualche sostituzione di G, dei poli della funzione razionale $H(z)$, nessuno dei quali cade sopra C,

2°) Un punto come $-\frac{d_n}{c_n}$, quando è $c_n \neq 0$, trasformato del punto ∞ per una sostituzione di G,

3°) Un punto singolare essenziale di G, cioè un punto ove detto gruppo è continuo.

Scopo della presente nota è di dare, di detta convergenza, una dimostrazione che, oltre all'estrema semplicità, ha il vantaggio di mettere in rilievo la continuità della funzione $\Theta(z)$ rispetto ai parametri che definiscono le sostituzioni fondamentali del gruppo G; giacchè, le diseguaglianze, che si stabiliranno, non cessano di sussistere quando si facciano subire a detti parametri variazioni sufficientemente piccole (*).

Il punto z che si considera sarà dunque interno (o sul perimetro) ad un poligono generatore di G, che chiameremo R_0, ed è possibile segnare un contorno chiuso C_0, tutto compreso in R_0, che contenga internamente (o sul perimetro) z, ma nessuno dei punti esclusi precedentemente.

La somma delle aree A_n limitate dai contorni C_n, trasformati di C_0 mediante le diverse sostituzioni di G, è finita. Il fatto è evidente se C_0 è tutto interno a C, il che è lecito supporre tutte le volte che z è interiore a C o sopra C, giacchè dette aree sono allora tutte interne a C e, d'altronde, non si sovrappongono; quando invece z è esterno a C, si considereranno le reciproche delle aree A_n rispetto a C, per osservare che nessuna di esse contiene l'origine, perchè dietro le ipotesi ammesse, nessuna delle A_n contiene il punto ∞; quindi dette reciproche sono tutte esteriori ad una circonferenza concentrica a C e di raggio convenientemente piccolo; entro la reciproca di questa circonferenza cadono certamente tutte le aree A_n.

Ciò posto, sia Γ una circonferenza di raggio maggiore dell'unità e concentrica a C. Dei punti come $-\frac{d_n}{c_n}$, che sono tutti esteriori a C, quelli che cadono esternamente a Γ sono in numero finito; altrimenti l'insieme dei trasformati dell'origine, per le sostituzioni di G, avrebbe un punto limite non situato sopra C; poi, quelli che cadono internamente a Γ hanno, da un punto qualunque z di C_0, una distanza $\left|z+\frac{d_n}{c_n}\right|$ finita. Inoltre, l'insieme dei punti $-\frac{d_n}{c_n}$ non ha, per ipotesi,

(*) Cfr. D'Ovidio: « Sulle funzioni Thetafuchsiane ». *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, vol. XXIX.

alcun punto limite sopra C_0; quindi è possibile trovare due numeri p, q positivi tali che, qualunque sia n, è

$$p < \left| z + \frac{d_n}{c_n} \right|^2 < q,$$

per tutti i valori di z che rappresentano punti del contorno C_0.

D'altra parte, siccome le sostituzioni di G conservano gli angoli, due elementi d'area che si corrispondono mediante la sostituzione T_n, stanno come i quadrati degli elementi lineari, il cui rapporto è

$$\frac{1}{|c_n z + d_n|^4};$$

quindi,

$$A_n = \iint_{A_0} \frac{dx\,dy}{|c_n z + d_n|^4}.$$

Si conclude che

$$A_n > \frac{A_0}{|c_n|^4 q^2} > \frac{A_0 p^2}{|c_n|^4 \left| z + \frac{d_n}{c_n} \right|^4 q^2};$$

ossia

$$\frac{1}{|c_n z + d_n|^4} < \frac{q^2}{p^2} \frac{A_n}{A_0}.$$

Se si tiene presente la convergenza della serie ΣA_n e si osserva che l'ultima diseguaglianza ha luogo anche nel caso finora escluso, cioè quando $c_n = 0$, perchè allora è $\left|\frac{1}{d_n}\right|^4 = \frac{A_n}{A_0}$, si vede che la serie

$$\Sigma\, |c_n z + d_n|^{-2m},$$

per $m = 2$, converge equabilmente sopra il contorno C_0. Se poi m supera 2, la detta serie converge ancora più, giacchè, confrontandola colla serie, che si ha per il caso $m = 2$, il rapporto

$$\frac{1}{|c_n z + d_n|^{2(m-2)}}$$

tende a zero quando n cresce oltre ogni limite.

Se z è un punto qualunque di C_0, l'insieme dei punti

$$\frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$$

ha tutti i suoi punti limiti situati sopra C, dove, per ipotesi, non cadono poli di $H(z)$; pertanto, si può dedurre una circonferenza, concentrica a C, in modo che nella corona determinata da detta circonferenza e da C, cadano infiniti punti dell'insieme, ma nessun polo di $H(z)$; allora, giacchè i punti dell'insieme che stanno fuori della corona sono in numero finito, ed inoltre la funzione $H(z)$ è supposta finita sopra i singoli contorni C_n, è possibile determinare un numero Q tale che, qualunque sia n, si abbia

$$\left| H\left(\frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}\right) \right| < Q,$$

per tutti i punti z di C_0: dunque, rimane pienamente dimostrata la convergenza assoluta ed equabile della serie (1) sopra il contorno C_0.

Allora, dal momento che i varî termini di detta serie sono funzioni olomorfe di z entro l'area A_0 e continue al contorno C_0, si può dire per un noto teorema (*) che la serie (1) definisce una funzione della variabile complessa z, che è olomorfa entro l'area racchiusa da C_0, e di cui la derivata è definita dalla serie che si ottiene derivando termine a termine la (1).

Palermo, novembre 1895.

G. Bagnera.

(*) V. le precedenti *Osservazioni sulle Serie di Funzioni Analitiche* del Prof Gerbaldi.

Di alcune proposizioni fondamentali relative al mutuo separarsi di coppie di punti.

Mi propongo di procedere nella via tracciata dal mio egregio amico Dott. G. Vailati per stabilire le proprietà fondamentali delle coppie di punti che si separano. È opportuno ch'io rammenti al lettore i risultati cui egli pervenne [1]).

***

Convenuto di rappresentare con S_1 la classe degli elementi considerati, ciascuno di questi con una lettera italica minuscola, col segno $||$ una relazione la quale soddisfi alle condizioni espresse dalle proposizioni

(1) $$ab \,||\, cd \,.=.\, cd \,||\, ab$$

(2) $$ab \,||\, cd \,.=.\, ab \,||\, dc$$

(3) $$ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, bd : = : \Lambda$$

(4) $$ab \,||\, cd \,.\cup.\, ac \,||\, bd \,.\cup.\, ad \,||\, bc$$

(5) $$ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, be : \circ : ac \,||\, de\,,$$

è chiaro che — tra le interpretazioni di cui sono suscettibili, dopo ciò, S_1 ed $ab \,||\, cd$ — v'è la seguente: S_1 è una linea continua, chiusa, priva di nodi, considerata come classe di punti; $ab \,||\, cd$ significa che le coppie ab e cd si separano.

---

[1]) G. Vailati. *Sulle relazioni di posizione tra punti d'una linea chiusa.* Rivista di Matematica, a. 1895. — G. Vailati. *Sulle proprietà caratteristiche delle varietà a una dimensione.* Rivista di Matematica, a. 1895.

Considerando come fondamentali le (1-5), l'A. dimostra, ricorrendo alle (1), (2) e (5), che

$$(6) \qquad ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, be : \supset : cd \,||\, be$$ [2])

e — ricorrendo a tutte le (1-5) — che

$$(7) \qquad ab \,||\, cd \,.\, ab \,||\, ce \,.\, ab \,||\, de : = : \Lambda \,.$$

Inoltre l'A., mediante la proposizione

$$\begin{aligned}(8) \qquad & ab \,||\, cd \,.\, cd \,||\, ae \,.\, ae \,||\, bd \,.\, bd \,||\, ce \,.\, ce \,||\, ab : \\ & \cup : ab \,||\, cd \,.\, cd \,||\, ae \,.\, ae \,||\, cb \,.\, cb \,||\, ed \,.\, ed \,||\, ab : \\ & \cup : ab \,||\, cd \,.\, cd \,||\, eb \,.\, eb \,||\, ac \,.\, ac \,||\, de \,.\, de \,||\, ab : \\ & \cup : ac \,||\, bd \,.\, bd \,||\, ec \,.\, ec \,||\, ad \,.\, ad \,||\, eb \,.\, eb \,||\, ac : \\ & \cup : ad \,||\, cb \,.\, cb \,||\, ae \,.\, ae \,||\, cd \,.\, cd \,||\, eb \,.\, eb \,||\, ad : \\ & \cup : ad \,||\, cb \,.\, cb \,||\, ed \,.\, ed \,||\, ac \,.\, ac \,||\, eb \,.\, eb \,||\, ad \,,\end{aligned}$$

definisce una relazione tra cinque elementi a, b, c, d, e di S_1 (o di due d, e rispetto a tre fissi a, b, c), la quale egli rappresenta con la notazione $e\,\mathrm{S}\,(abc)\,d$ (ch'egli suggerisce di leggere *e segue d nell'ordine abc*) [3]). Dalle proprietà anteriormente attribuite alla notazione $ab \,||\, cd$, l'A. deduce

$$(1') \qquad e\,\mathrm{S}\,(abc)\,d \,.\, d\,\mathrm{S}\,(abc)\,e : = : \Lambda$$

$$(2') \qquad \mathrm{f}\,\mathrm{S}\,(abc)\,e \,.\, e\,\mathrm{S}\,(abc)\,d : \supset : \mathrm{f}\,\mathrm{S}\,(abc)\,d$$

---

[2]) La proposizione

$$(1) \,.\, (2) \,.\, (5) : \supset : (6)$$

può dimostrarsi, più semplicemente, così:

$$\begin{aligned} & (5) \,.\!\cdot\!.\, \supset \,.\!\cdot\!.\, ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, be : \supset : ac \,||\, de \,.\, ab \,||\, cd \,, \\ & (1) \,.\, (2) \,.\!\cdot\!.\, \supset \,.\!\cdot\!.\, ac \,||\, de \,.\, ab \,||\, cd : = : ca \,||\, de \,.\, cd \,||\, ab \,, \\ & (5) \,.\, \begin{pmatrix} c & a & d & e & b \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} .\!\cdot\!.\, \supset \,.\!\cdot\!.\, ca \,||\, de \,.\, cd \,||\, ab : \supset : cd \,||\, eb \,, \\ & (2) : \supset : cd \,||\, eb \,.\, = \,.\, cd \,||\, be \,; \end{aligned}$$

quindi:

$$(1) \,.\, (2) \,.\, (5) : \supset : (6) \,.$$

[3]) La (8) poteva scriversi così:

$$\begin{aligned}(8') \qquad & ab \,||\, ec \,.\, ae \,||\, bd : \cup : ab \,||\, ed \,.\, ae \,||\, bc : \cup : ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, be : \\ & \cup : ad \,||\, ce \,.\, ac \,||\, db : \cup : ad \,||\, cb \,.\, ac \,||\, de : \cup : ad \,||\, eb \,.\, ae \,||\, dc \,.\end{aligned}$$

ed osserva che la proprietà invariantiva della relazione $e\,S\,(abc)\,d$ — da taluni autori assunta come fondamentale — segue immediatamente dalla proprietà invariantiva della relazione $ab \,||\, cd$, per il fatto che quella fu definita con questa.

Quanto alle proposizioni (1-5) — risguardate dall'A. come fondamentali — è tuttora irresoluta la questione se esse siano *assolutamente indipendenti* (tali, cioè, che nessuna di esse possa dedursi dal sistema delle *rimanenti*); certo è, per intanto, ch'esse sono *ordinatamente indipendenti* (tali, cioè, che, nell'ordine in cui sono state enunciate, nessuna di esse può dedursi dal sistema delle *precedenti*) [4].

***

Il fatto che, nelle (1-5), due lettere *diverse* rappresentino due elementi *distinti*, non è esplicitamente affermato dall'A.; e l'affermarlo —

La sua legge di formazione è evidente:

dalla prima terna di termini si ottiene la seconda, mediante la sostituzione $\begin{pmatrix} d\,b\,e\,c \\ b\,d\,c\,e \end{pmatrix}$;

nella prima terna, dal primo termine si ottengono, successivamente, gli altri due, mediante le sostituzioni $\begin{pmatrix} e\,b \\ b\,e \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e\,c \\ c\,e \end{pmatrix}$.

È opportuno accennare al modo di passare dalla (8) alla (8').

Dalle (5) e (6), mediante la sostituzione $\begin{pmatrix} e\,c\,d \\ c\,d\,e \end{pmatrix}$, si ottiene, complessivamente

(A) $$ab \,||\, ec \,.\, ae \,||\, bd : \supset : ae \,||\, cd \,.\, ec \,||\, bd \,.$$

Dalle (5), mediante la sostituzione $\begin{pmatrix} e\,b\,c \\ b\,c\,e \end{pmatrix}$, si ottiene

(B) $$ae \,||\, bd \,.\, ab \,||\, ec : \supset : ab \,||\, dc \,.$$

Quindi — tenendo presenti le (A), (B), (1) e (2) — il primo termine della (8) si può ridurre al primo termine della (8'). Analogamente si effettua la riduzione degli altri termini.

Avverto che, per ragione di simmetria, al 5° ed al 6° termine della (8) corrispondono, rispettivamente, il 6° ed il 5° della (8'). Gli altri termini si corrispondono ordinatamente.

Inoltre — quanto alla scelta della notazione esprimente la relazione definita dalla (8') — preferirei una delle seguenti: « verso (abc) . = . verso (ade) », « ordine (abc) . = . ordine (ade) », « (abc), $(ade)\,\varepsilon$ Eq », leggendo *equiversi* ovvero *equiordinati* in luogo di Eq.

[4]) Ciò io ho dimostrato con opportune interpretazioni dei simboli, come risulta dalla cortesissima nota del Dott. G. Vailati, inserita nel secondo dei suoi scritti citati.

per quanto mi disse — gli parve superfluo, perchè implicito nel sistema delle (1-5).

Invero — rappresentando d'or innanzi con lettere diverse elementi distinti — dalla (3), mediante le sostituzioni $\begin{pmatrix} a\,a\,a \\ b\,c\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\,a\,b \\ b\,c\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b\,a\,a\,a \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b\,a\,a\,b \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b\,a\,a\,c \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}$, si deduce, rispettivamente,

$$(\alpha) \qquad aa \,||\, aa \,.=.\, \Lambda, \quad aa \,||\, ab \,.=.\, \Lambda, \quad ba \,||\, aa \,.=.\, \Lambda,$$
$$ba \,||\, ab \,.=.\, \Lambda, \quad ba \,||\, ac \,.=.\, \Lambda;$$

ricorrendo alla (2), per dare alla (3) la forma

$$ab \,||\, dc \,.\, ac \,||\, db :=: \Lambda,$$

da questa, mediante le sostituzioni $\begin{pmatrix} a\,a\,b \\ b\,c\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b\,a \\ c\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b\,a\,a\,c \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}$, si deduce, rispettivamente,

$$(\beta) \qquad aa \,||\, ba \,.=.\, \Lambda, \quad ab \,||\, ab \,.=.\, \Lambda, \quad ba \,||\, ca \,.=.\, \Lambda;$$

ricorrendo alle (1) e (2), per dare alla (3) la forma

$$ab \,||\, cd \,.\, db \,||\, ca :=: \Lambda,$$

da questa, mediante le sostituzioni $\begin{pmatrix} a\,a \\ c\,d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$, si deduce, rispettivamente

$$(\gamma) \qquad ab \,||\, aa \,.=.\, \Lambda, \quad ab \,||\, ca \,.=.\, \Lambda;$$

ricorrendo alle (1), (2), per dare alla (3) la forma

$$ab \,||\, dc \,.\, db \,||\, ac :=: \Lambda,$$

da questa, mediante la sostituzione $\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$, si deduce

$$(\delta) \qquad ab \,||\, ac \,.=.\, \Lambda.$$

Colgo l'occasione per avvertire che, ivi, l'enunciato dell'ultima interpretazione è inesatto: ciò che si deve imputare esclusivamente a disattenzione mia. Esso va letto così: « S_1 è una retta, considerata come classe di punti, ed $ab \,||\, cd$ significa che i segmenti finiti ab e cd non hanno alcun punto comune ». In tal caso, è chiaro che sono vere le (1-4); a persuadersi della falsità della (5) basta por mente al caso in cui e, b, a, c, d si seguano in quest'ordine.

Però, dalle (1-5) mi par non si possa dedurre alcuna delle

$$(\varepsilon) \qquad aa \,||\, bb \,.=.\, \Lambda\,, \quad aa \,||\, bc \,.=.\, \Lambda\,, \quad bc \,||\, aa \,.=.\, \Lambda\,.$$

Comunque, mi sembrano degni di nota i fatti seguenti:

le proposizioni (α-ε) sono assolutamente indipendenti [5]);

ciascuna proposizione — non appartenente al sistema (α-ε) ed esprimente la condizione « non sussiste la relazione $ab \,||\, cd$ se a, b, c, d non rappresentano elementi a due a due distinti » — è deducibile da una delle (α-ε), sostituendo, a lettere tra loro uguali o diverse, lettere tra loro, rispettivamente ed ordinatamente, eguali o diverse;

dal sistema delle (α-ε) ed (1-5) non si può dedurre la condizione « ad S_1 appartengono quattro elementi, almeno, a due a due distinti »;

le condizioni enunciate nei due precedenti capoversi si deducono simultaneamente dal sistema delle (α-ε) e della

$$(\zeta) \qquad ab \,||\, cd \,.-=_{a,b,c,d}.\, \Lambda\,;$$

facendo seguire le (α-ζ) ed (1-5) [6]) in quest'ordine, si ottiene un sistema di proposizioni ordinatamente indipendenti [7]).

---

[5]) Invero — scelta ad arbitrio una delle (α-ε) e tenuto presente che, per esplicita convenzione fatta, nelle (α-ε), lettere diverse rappresentano elementi distinti — data ad $ab \,||\, cd$ l'interpretazione « a, b, c, d rappresentano elementi tra loro distinti o no in modo conforme al primo membro della proposizione prescelta », è chiaro che, tranne la prescelta, ciascuna delle (α-ε) è vera.

[6]) D'or innanzi la (4) si intenderà scritta così:

$$(\alpha\text{-}\varepsilon) : -\supset : ab \,||\, cd \,.=.\, \Lambda \,.\!:.\, \supset \,.\!:.\, ab \,||\, cd \,.\cup.\, ac \,||\, bd \,.\cup.\, ad \,||\, bc\,.$$

[7]) Ciò appare manifesto, tenendo presente la dimostrata indipendenza assoluta delle (α-ε) [5]), ed osservando che — dando ad S_1 l'interpretazione « classe cui appartengono non più di tre elementi, a due a due distinti » e ad $ab \,||\, cd$ l'interpretazione « a, b, c, d sono a due a due distinti » — son verificate le (α-ε) e non la (ζ), e che — dando in ciascun caso ad S_1 l'interpretazione « retta considerata come classe di punti » e ad $ab \,||\, cd$, successivamente, le interpretazioni

« b e c sono distinti ed appartengono al segmento finito ad, estremi esclusi »,

« i segmenti finiti ab e cd sono equipollenti, distinti »,

« i segmenti finiti ab e cd sono uguali, distinti »,

« i segmenti finiti ab e cd sono distinti ed i loro punti medî coincidono »,

« i segmenti finiti ab e cd non hanno alcun punto comune » —

son verificate, in ciascun caso, le (α-ζ) ed, inoltre, sono rispettivamente: false le (1-5); vera la (1) e false le (2-5); vere le (1), (2) e false le (3-5); vere le (1-3) e false le (4), (5); vere le (1-4) e falsa la (5) [4]).

Constatati questi fatti — e considerato come sia opportuno, in questa trattazione, che il concetto di *quaterna di elementi a due a due distinti* sia definito mediante la notazione $ab \,||\, cd$, senza introdurre alcuna parola di commento od alcun simbolo estraneo — proporrei di considerare come fondamentali le proposizioni (α-ζ) ed (1-5) in quest'ordine.

***

A chi si proponga di enunciare le proposizioni ordinatamente indipendenti esprimenti, simultaneamente, tutte le proprietà

del simbolo S_1 — in quanto esso si mantenga suscettibile dell'interpretazione « S_1 è una linea continua, chiusa, priva di nodi, considerata come classe di punti » — e

della notazione $ab \,||\, cd$ — in quanto essa si mantenga suscettibile dell'interpretazione « $ab \,||\, cd$ significa che le coppie ab e cd si separano » —

appaiono degni di nota i fatti seguenti:

dal sistema delle (α-ζ) ed (1-5) non si può dedurre la condizione « ad S_1 appartengono cinque elementi, almeno, a due a due distinti » [8]);

tale condizione si deduce dal sistema delle (α-ε), (3) e

$$(9) \qquad ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, be : - =_{a,b,c,d,e} : \Lambda \quad ^{9}\text{)};$$

la proposizione

$$(10) \qquad ab \,||\, cd : - =_{c} : \Lambda$$

è vera dando ad S_1 e ad $ab \,||\, cd$ le interpretazioni considerate nel principio di questo paragrafo;

---

[8]) Invero — dando ad S_1 l'interpretazione « classe cui appartengono quattro, e sol quattro, elementi, a due a due distinti » e ad $ab||cd$ l'interpretazione « permutazione circolare, diretta od inversa, di $a\,c\,b\,d$ » — son tutte vere le (α-ζ), (1-5) (la (5), in tal caso, è vera perchè la sua ipotesi è sempre assurda).

[9]) Dalla (9) si deduce immediatamente $ab \,||\, cd.- =.\Lambda$ ed anche $ac \,||\, be.- =.\Lambda$; da queste, dalle (α-ε) e da un'osservazione fatta nel paragrafo precedente, si deduce che a, b, c, d sono a due a due distinti e così pure a, c, b, e. Quindi — affinchè a, b, c, d, e non fossero a due a due distinti — dovrebbero coincidere d ed e; ma, allora, la (3) non sarebbe vera, contro il supposto. È superfluo avvertire che dalla (9) si deduce la (ζ).

Pubblicazioni della Casa Fratelli BOCCA

Cassani F. — Corso di matematica complementare: Complementi d'algebra. Torino 1885, in-12° . . . . . L. 3 —
— Elementi di stereometria. Torino 1885, in-12° . . . . » 2 50
Castellano F. — Algebra ad uso dei licei ed istituti. Torino 1891, in-12° . . . . . » 3 —
Cesàro E. — Corso di analisi algebrica con introduzione al calcolo infinitesimale. Torino 1894, in-8° . . . . . » 12 —
— Introduzione alla teoria matematica della elasticità. Torino 1894, in-8° . . . . . » 6 —
Cuffia G. — Aritmetica ragionata e primi elementi d'algebra e geometria. Bergamo 1876, in-16° . . . . . » 2 20
Daddi G. B. — Geometria pratica: Della combinazione delle osservazioni nel metodo dei minimi quadrati. Torino 1879, in-8° » 3 —
D'Ovidio E. — Geometria analitica. Torino, 1896, in-8° . » 10 —
Gatti S. — Elementi di geometria piana con applicazione dell'algebra. Torino 1876, in-8° . . . . . » 3 50
Gerbaldi F. — Primi elementi di aritmetica: 5 fasc. legati » 2 60
Peano G. — Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre* di H. Grassmann. Torino 1888, in-8° . . . . . » 3 50
— Principii di geometria logicamente esposti, 1889, in-8° . » 2 50
— Arithmetices principia nova methodo exposita, 1889, in-8° . » 2 50
— Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, 1887, in-8° » 10 —
— Lezioni di analisi infinitesimale, 2 vol. in-8°, 1893 (esaurito).
— Elementi di calcolo geometrico, in-8° . . . . . » 1 —
— (**Genocchi** A.) — Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale. Torino 1884, in-8° . . . . . » 10 —
Porta F. — Geometria analitica. Torino 1890, in-8° . . » 8 —
— Geometria piana. Torino 1889, in-16° . . . . . » 3 —
— Geometria solida. Torino 1887, in-16° . . . . . » 3 —
— Complementi di matematica, in-16° . . . . . » 3 50
— Goniometria e trigonometria piana. Torino 1885, in-16° . » 2 50
— Trigonometria sferica. Torino 1886, in-16° . . . . . » 2 —
Rivera A. R. — Problemi di geometria e di trigonometria, con le loro soluzioni. Torino 1861, in-8° . . . . . » 5 —
Serret G. A. — Trattato di trigonometria piana e sferica, in-16° » 3 50
Staudt. — Geometria di posizione, in-8° . . . . . » 8 —

RECENTISSIMA PUBBLICAZIONE:

D'OVIDIO ENRICO

Professore ordinario nella R. Università di Torino

GEOMETRIA ANALITICA

Un volume in-8° — L. 10

Rivista di Matematica, volumi I-V, ogni volume . . L. 8 —
Introduction au Formulaire . . . . . » 2 —
Formulaire de Mathématiques, tome I . . . . . » 6 —

F. CASTELLANO

Professore di Meccanica Razionale nella R. Accademia Militare

LEZIONI DI MECCANICA RAZIONALE

Un volume in-8° — L. 12

Deposito presso i librai Fratelli Bocca - Torino.

ERNESTO CESÀRO

Professore ordinario della R. Università di Napoli.

CORSO DI ANALISI ALGEBRICA

con introduzione al calcolo infinitesimale.

Un grosso vol. in-8° L. **12.**

Dello stesso Autore:

INTRODUZIONE alla TEORIA MATEMATICA della ELASTICITÀ

Un volume in-8° — L. 6

G. Peano, *Direttore responsabile.*

Torino - Tipografia Gerbone - Via Gaud. Ferrari, 3.

Sc 895.50

HARVARD COLLEGE LIBRARY
JAN 1 1900

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES

(RIVISTA DI MATEMATICA)

PUBLIÉE PAR

G. PEANO

Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin

TOME VI - N° 3

SOMMAIRE

Additions et corrections à F_2.
Sul § 2 del Formulario, t. II: Aritmetica (G. Peano).
Ideografia delle frazioni irriducibili (A. Padoa).
E. Scröder. *Ueber Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien* (G. Peano).
Alfred North Whithehead. *A treatise on Universal Algebra, with applications* (G. Vacca).

TURIN

BOCCA FRÈRES

LIBRAIRES

1898

La REVUE DE MATHÉMATIQUES a pour object principal la publication du FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES, recueil de théorèmes, de définitions et de démonstrations, exprimés par les symboles de la logique mathématique.

Prix de l'abonnement au tome VI de la Revue, et au tome II du Formulaire: Italie L. 10; étranger 11 fr.

Rivista di Matematica, tomes I-V, 1891-95, chaque tome 8 fr.

Introduction au Formulaire, 1894, 2 fr.

Formulaire de Mathématiques, t. I, 1895, 6 fr.

NOUVELLES PUBLICATIONS

C. ALASIA — *Su alcune proprietà dei numeri e delle congruenze.* Civitanova-Marche, Matalucci, 1898, pag. 64, L. 1.

A. BATTELLI — *Lavori eseguiti nell'Istituto di Fisica dell'Univzrsità di Pisa* (anno scolastico 1896-97), vol. II. Pisa, Pieraccini, 1898, pag. 206.

G. BELLACCHI — *Lezioni ed esercizi di Algebra complementare.* Fascicolo I. Firenze, Barbera, 1898, pag. 159, L. 2.

C. BURALI-FORTI e C. RAMORINO. — *Elementi di Aritmetica razionale* ad uso della 3ª classe della scuola tecnica. Torino, Petrini, 1898, p. 128, L. 1,25.

— *Elementi di Algebra*, ad uso della 1ª classe della scuola normale. Torino, Petrini 1898, p. 124, L. 1,25.

— *Elementi di Algebra*, ad uso della 3ª classe della scuola tecnica. Torino, Petrini, 1898, p. 132, L. 1,25.

— *Aritmetica e Norme per l'insegnamento nelle scuole elementari*, ad uso delle classi 2ª e 3ª delle scuole normali. Torino, Petrini, 1898, pag. XII+248. L. 2.

A. CAPELLI — *Lezioni di Algebra complementare*, ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria in scienze matematiche e fisiche. *Seconda edizione*, con aggiunte. Napoli, Pellerano, 1898, pagine XVI+680. L. 8,50.

E. CESÀRO — *Elementi di Calcolo Infinitesimale, con numerose applicazioni geometriche.* Napoli, L. Alvano, 1899, pag. 400 in-8° gr. Lire 12,50.

M. FROLOV — *La théorie des parallèles demontrée rigoureusement.* Paris, Carré & Naud, 1898, pag. 46, Fr. 2.

C. A. LAISANT — *La Mathématique*, philosophie - einseignement, pag. 292. Paris, Carré & Naud, 1898.

L. LORENZ — *Œuvres scientifiques*, revues et annotées par H. Valentiner, tome 1er, 2me fascicule.

HARVARD COLLEGE LIBRARY
JAN 1 1900

ADDITIONS ET CORRECTIONS A F_2

§1

Continuation. V. RdM t. VI p. 51

Note. « *a* » marque les P contenues dans ces additions.

Ajoutez les P 70′ 511 512 qui précèdent F_2§2, et les

44′. $a(bc) = (ab)c$

86. Dem P71.

| P81 .⊃. $(x; y) \varepsilon (z; t) \supset (x=z \,.\, y=t)$ (1)
$(x; y) = (a; b)$. (1) . P80 .⊃. $(a; b) \varepsilon (z; t) \supset (x=z \,.\, y=t)$.⊃. $x=a \,.\, y=b$ (2)
P81 .⊃. $x \varepsilon z \supset ((x; y)=(z; y))$ (3)
$x=a$. (3) . P80 .⊃. $a \varepsilon z \supset ((x; y)=(z; y))$.⊃. $(x; y)=(a; y)$ (4)
$y=b$. P80 . P81 .⊃. $(a; y)=(a; b)$ (5)
$x=a \,.\, y=b$. (4) . (5) . P83 .⊃. $(x; y)=(a; b)$ (6)
(2) . (6) .⊃. P] | C. Burali-Forti |

101. $x,y=\varepsilon a \;.=.\; x=\varepsilon a \,.\, y=\varepsilon a$ | Ex. §2P346·2·4a | Df
109′. $ab = ac \;.=.\; a=c = a=b$ { WHITEHEAD a.1898 p.40 }
123. $a=b = b=a \;.=.\; a=b$ {VAILATI a.1891 }

402″. $\exists\, a \cap b \;.\supset.\; \exists a \,.\, \exists b$ [Hp . P23 . P24 . P402 .⊃. P]
| C. Burali-Forti |

540. $\omega x = x$ | Le signe ω représente l'identité | Ex. §2P351′·5a Df
1. $u \varepsilon \mathrm{Cls} \;.\supset.\; \omega \varepsilon ufu \;.\; \omega \varepsilon (ufu)\mathrm{Sim} \;.\; \omega \varepsilon (ufu)\mathrm{rcp}$

pag. 34, lignes 4-8 en remontant. Remplacez par:

Miss Ladd, *On the Algebra of Logic*, a. 1883, et ensuite plusieurs A. par l'instrument de la Logique symbolique, ont découvert la fausseté des formes traditionnelles de syllogisme, appelées « Darapti, Felapton, Bamalip, Fesapo ». Correction suggérée par M. F. Invrea.

p. 42 ligne 5 en remontant: au lieu de a.1870 lisez a.1867

§2

pag. VII P450 au lieu de $x \supset a$ lisez $x \supset u$.
» P511 Lisez la Ths: $(ux)|x = u$
» ligne 22 en remontant, au lieu de: a est un a f b lisez: u est un a ɟ b.
» » 17 » » ɟ » f
pag. VIII ligne 5 en remontant. Ajoutez:
La sigle ⊐ désigne aussi les « Formule di Matematica » supplément à la RdM a. 1892, F_1I et F_1V.
Ajoutez la sigle ⊐ aux P 014·4 015·2·3 023·5 038·12 083·1·18 093·3 095·16 ·21·31·34 096·4 098·1 100·1·2·3 101·22·23·31 104·1 111·1 115·2 150·3 162·1 163·21 171·1·6·7 180·2·3 194·1 210·1·5·6 211·1 341·2 342·3.
Ajoutez la sigle ⊐ aux P 003·2·3 010 023·1·6·7 050·1 054 060 062·1·2 067·1·3 150·5 151·3·4 161·2 162·4·5·6 220·1·1′ 310·1·2 311·11 313·1
Ajoutez la sigle ⊐ aux P 011·7 017 030 200·1-·4 201·1·3 202.
Ajoutez la sigle « Vivanti F_1VI » aux P210·2·9.
p. 6 ligne 14 en remontant: lisez Paciuolo
Ajoutez et corrigez les P suivantes:
038·11′ $s, t, u \varepsilon \mathrm{Cls'n} . \supset . \mathrm{P019{\cdot}2{-}{\cdot}7} . (-|+) \mathrm{P019{\cdot}2{-}{\cdot}4} . (s|\mathrm{N}_0)\mathrm{P024}$.
038·13 $\mathrm{n}+\mathrm{n} = \mathrm{n}$ ⊐ ·14 $-\mathrm{n} = \mathrm{n}$ ⊐
044. Au lieu de ·1-·4 lisez ·2-·7 deux fois.
049·91 $ac = bc . c \neq 0 . \supset . a = b$ ⊐
·993 $a,b \varepsilon \mathrm{n}c . m,n \varepsilon \mathrm{n} . \supset . ma+nb \varepsilon \mathrm{n}c$ ⊐
055·1. $c \varepsilon \mathrm{N}_1 . a,b \varepsilon \mathrm{N}_1 \times c . \supset . (a+b)/c = a/c+b/c$ ⊐
·2. ——————. $a \varepsilon b+\mathrm{N}_1 . \supset . (a-b)/c = a/c-b/c$ ⊐

060 *Note.*

Selon le langage ordinaire, $\frac{a}{b}$ précède le nombre, ou la grandeur, sur laquelle on opère, et signifie « diviser par b et multiplier par a ». P. ex. « $\frac{3}{5}$ de 15 fr. » signifie « ce qu'on obtient en divisant 15 fr. par 5 et en multipliant le résultat par 3 ». Mais nous préferons de donner à a/b, qui suit le nombre sur lequel on opère, la signification « multiplier par a et diviser par b », afin de rendre possible l'opération dans un plus grand nombre de cas.

Les calculs sur les fractions étaient connus des anciens égyptiens, comme résulte du papyrus Rhind, (a. —1700 ⊢ —2200?) publié par:

Eisenlohr, *Ein Mathematisches Handbuch der alten Aegypter*, Leipzig, a. 1877.

Dans ce papyrus l'auteur ou le copiste Ahmès (Aahmesu) indique les fractions /2, /3, 2/3, /4 par des signes de forme spéciale.

Les fractions de la forme $/a$, où a est un entier supérieur à 4, sont indiquées par le nombre a surmonté d'un point, qui a la valeur du signe /.

On remarquera la suppression du numérateur de la fraction, lorsqu'il est l'unité, comme dans le Formulaire.

Toute fraction est exprimée par la somme de la partie entière, et de fractions décroissantes de la forme considérée; à peu près comme nous, dans la théorie, réduisons toute fraction à la forme a/b, où a et b sont des entiers, et dans la pratique aux fractions décimales.

Les dénominateurs des fractions égyptiennes sont quelques fois des puissances de 2; alors la fraction a une forme analogue à notres fractions décimales, mais dans la numération binaire. Dans d'autres cas lés termes successifs des expressions égyptiennes expriment la fraction donnée avec la plus grande approximation. Mais ces termes suivent aussi des lois plus compliquées.

Voici les résultats de quelques calculs contenus dans ce papyrus:

table I	$2/5=/3+/15$
table II	$2/23=/12+/276$
table IX, N. 6	$9/10=2/3+/5+/35$
table X, N. 21	$1-(/3+/15)=/5+/15$
table XI, N. 24	$19/(1+/7)=16+/2+/8$
table XIII, N. 34	$10/(1+/2+/4)=5+/2+/7+/14$

On peut aussi remarquer les signes de l'addition et de la soustraction: les jambes d'un homme qui va, ou qui vient (table XI, N. 28).

Voir: Rodet, *Journal Asiatique*, a. 1881 t. XVIII p. 184, 390.

Loria, *Studio intorno alla logistica greco-egiziana*, a. 1894, Giornale di Matem. t. 32.

063·6 $a+\mathrm{R}=\mathrm{R}$ ·7 $\mathrm{R}+\mathrm{R}=\mathrm{R}$ ⊐

064·1-·6. Au lieu de P034 lisez P043.

064·7 $a\times\mathrm{R}=\mathrm{R}$ ·8 $\mathrm{R}\times\mathrm{R}=\mathrm{R}$

·9 $\exists\, \mathrm{N}_1 \frown m \ni (ma, mb, mc, md\ \varepsilon\ \mathrm{N}_1)$ d d

·10 $\mathrm{N}_1 \supset \mathrm{R}$ d p

065. Au lieu de ·1-·25 lisez ·1-·24 (deux fois).

065·36 $/\mathrm{R}=\mathrm{R}$

071·41-·45 $a,b\ \varepsilon\ \mathrm{r}=\iota 0\ .\supset.\ /a\ \varepsilon\mathrm{r}$. P065·32-·35 ⊐

071·51 $a\varepsilon\ \mathrm{r}=\iota 0\ .\supset./-a=-/a$ ⊐

074·1. { Ahmès, N. 24-38 }

074·4 pag. 18 ligne 2 en remontant. Lisez: le quotient $[\ (d-b)/(a-c)\ ]$

075·2. { Ahmès, N. 63 }

076. $a,b,c\ \varepsilon\ \mathrm{r}=\iota 0\ .\ a=\!=b\ .\ b=\!=c\ .\ c=\!=a\ .\ a+b+c=0\ .\supset.$

$[(a-b)/c+(b-c)/a+(c-a)/b][c/(a-b)+a/(b-c)+b/(c-a)]=9$

{Lucas, *Th. des nombres*, a. 1891, p. 150} ⊲

083·18 Au lieu de $+12abc$ lisez $-12abc$ {Escott}

084·11 $(N_1+1)^2 \supset N_1^2+N_1^2+N_0^2+N_0^2$ ◁

{P. TANNERY, *Int. des math.*, a. 1898, t. 5, p. 281} ◁

095·8 $a,b,c,d \varepsilon N_0 . \supset .$

$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+(2ac\pm 2bd)^2+(2bc\mp 2ad)^2$ ◁

{P. TANNERY, *Int. des Math.* a. 1898, p. 282} ◁

095·20′ $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=4ab(a^2+b^2)$ ◁

·20″ $a(a-2b)^2-b(b-2a)^2=(a-b)(a+b)^2$ ◁

·44 $3(a+b+c)^2=(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+8(ab+ac+bc)$

·45 $a^4+b^4+c^4=(a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)+$
$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

·46 $(a+b+c)^6=(a+b-c)^6+(b+c-a)^6+(c+a-b)^6+$
$80abc(a^3+b^3+c^3)$

·47 $(a^6+b^6)(a+b)-2ab(a^5+b^5)=(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

.48 $(a^6+b^6)(a+b)-(a^3+b^3)(a^5+b^5)=(a-b)^2(a+b)(a^2+b^2)ab$

·49 $x=ab . y=(a+b)b . z=a(a+b)(a^2+ab+2b^2) .$
$w=a^2+ab+b^2 . \supset . x^4+y^4+z^2=w^4$

{P·44-·49. E. B. Escott (Grand Rapids, Mich. U. S. A.)}

·50 $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)^2+(a^3-a^2b+ab^2-b^3)^2=2(a^3+b^3)^2$

·51 $(a^3+a^2b-ab^2-b^3)^2-(a^3-a^2b-ab^2+b^3)^2=4ab(a^2-b^2)^2$

·52 $(a^3+a^2b-ab^2+b^3)^2-(a^3-a^2b-ab^2-b^3)^2=4ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

·53 $(a^4+ab^3-a^2b^2+ab^3+b^4)^2-(a^4-a^3b-a^2b^2-ab^3+b^4)^2=$
$4ab(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

·54 $(a^4+a^3b-a^2b^2-ab^3+b^4)^2-(a^4-a^3b-a^2b^2+ab^3+b^4)^2=$
$4ab(a^2-b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

{ ·50-·54. E. SADUN }

103·3 $m,n \varepsilon N_0 . f\varepsilon N_0 f 0\cdots m . g\varepsilon N_0 f 0\cdots n . \supset .$

$(\Sigma_0^m f)(\Sigma_0^n g) = \Sigma \{ \Sigma [(fr \times gs)|s, 0\cdots n] |r, 0\cdots m \}$

113·2 $m\varepsilon N_1 . \supset .$

$3\Sigma_1^m(2r-1)^2|r=3[1^2+3^2+5^2+\ldots+(2m-1)^2]=m(4m^2-1)$

$\Sigma_1^m(2r-1)^2|r=1^2+3^2+5^2+\ldots+(2m-1)^2=m^2(2m^2-1)$ ◁

{IBN ALBANNA, a. 1275?; *Le Talkhys d'Ibn Albanna publié et traduit par Aristide Marre*, Roma 1865. (Atti Ac. Pont. N. Linc., t. 17, a. 1864)} ◁

114·1 Lisez: $2s_1 = n(n+1)$

114·8 $2s_7=4s_3^2-s_2^2+s_1^2$ ·9. $2s_5=3s_2^2-s_1^2$ ◁

{LUCAS, *Th. des nombres*, a. 1891, p. 249} ◁

115·1. Ajoutez au premier membre $-(\Sigma_0^m xy)^2$

131. $n,a\varepsilon N_1 . \supset . a\upharpoonright(2^n)-1 = (a-1)\Pi_0^{n-1}(a\upharpoonright(2^r)+1)$ ⊲

$\text{———————} = (a-1)(a+1)(a^2+1)\ldots(a\upharpoonright(2^{n-1})+1)$ ⊲

152·1. $a,b\varepsilon N_0 . \supset : b>a .=. b-a\ \varepsilon N_1$ Df? d

·2. $a,b,c\varepsilon N_0 . a>b . b>c . \supset . a-b<a-c$ d

155·13 $a>b .=. a-b>0$ ∃

·14 $a>b . c<d . \supset . a-c>b-d$ ci.

·15 $a<b . c>d . \supset . a-c<b-d$ ci.

160′. $a,b\varepsilon n . c\varepsilon N_1 . \supset : a>b .=. ac>bc$ ∃

163·25 $a<b .=. \exists R\frown x\ni(a<x<b)$ d

·26 $a<b . m,n\varepsilon R . \supset . a<(ma+nb)/(m+n)<b$

173·3 $(a+b)^{m+1} > a^{m+1}+(m+1)a^m b$ ci.

·4 $< a^{m+1}+(m+1)(a+b)^m b$ {P113 ⊃ P·4·5}

173′. $a,b\varepsilon N_0 . a=b . \supset .$

·1 $a^{m+2}+b^{m+2} > ab(a^m+b^m)$

[$a^{m+2}+b^{m+2} - ab(a^m+b^m) = (a-b)(a^{m+1}-b^{m+1})$]

·2 $2^{m-1}(a^m+b^m) > (a+b)^m$ ⊲

175·1 $a\varepsilon R . m\varepsilon N_1+1 . \supset . (1+a)^m > 1+ma$

[$(1, a, m-1)|(a, b, m)$P173·4 .⊃P]

·2 $\text{———————} (1-a)^m > 1-ma$

[$(1-a, a, m-1)|(a, b, m)$P173·5 .⊃.P]

·3 $a,b\varepsilon R . a<b . m\varepsilon N_1 . \supset . \exists R\frown x\ni(a<x^m<b)$

180·4 $(\Sigma a)(\Sigma ax^2) \geqq (\Sigma ax)^2$ [$(1 \mid y)$P·3 ⊃ P] ∃

·5 $m\varepsilon N_1 . \supset . n^{m-1}(\Sigma x^m) \geqq (\Sigma x)^m$ ⊲

183. $n\varepsilon N_1+1 . x,y\ \varepsilon\ \mathrm{rf}\ 1\cdots n . a\varepsilon R\ \mathrm{f}\ 1\cdots n . \Sigma = \Sigma_1^n . \supset .$

·1-·4 = P180·1-·4

190. *Note.* Leibniz, *Math. Schrift.* t. 7. p. 219, pour indiquer mod a, a proposé la notation mol.a, abréviation du mot latin « moles ». ⊲

193·6′ $a\varepsilon\ \mathrm{r}\text{-}\iota 0 . m\varepsilon n . \supset .$ ThsP·6 ∃

·7 $\mathrm{mod}\,a = \mathrm{mod}\,b . = . a^2 = b^2$ ⊲

{Leibniz, *ibid.*:

Quantitates duae diversae, eandem molem habentes semper habent idem quadratum.} ⊲

203·2 $\mathrm{num}\ a\ \varepsilon\ N_0 \cup \iota\infty$ ∃

204. $a\varepsilon N_0 . \supset . a+\infty = \infty+a = \infty+\infty = \infty . a<\infty$ Df ∃

205. $a,b\ \varepsilon\ \mathrm{Cls} . \supset . ·1\text{-}·2 = 201·1\text{-}·2$

220·6″ $\exists u . a\varepsilon N_0 . = \exists\ w\frown(a+N_0) . \supset . \exists\ \iota\ \mathrm{max}\,u$ d

·6‴ $\exists u . \supset . \exists\ \iota\ \mathrm{min}\,u$ d

228. Hyp 220·6 . ⊃ . $\max(u \cap v) = (\max u) \cap (\max v)$ ◁
229. $u \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{R} . v \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{N}_0 . \exists \iota \max u . \exists \iota \max v . \supset$ ThsP228 ◁
240·4 Au lieu de Σ_0 lisez Σ_1.

Remplacez les P241-242·6 par

$$\mathrm{N}_0\ \mathrm{N}_1\ \mathrm{n}\ +\ -\ \times\ /\ \cdots\ \Pi\ !\quad \mathrm{Cmb}$$

241. $m \varepsilon \mathrm{n} . n \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset .$
·1. $\mathrm{Cmb}(m,n) = \mathrm{C}(m,n) = m(m-1)\ldots(m-n+1)/n!$ Df ◁
» $= [\Pi_0^{n-1}(m-r)|r]/n!$
·1′ $\mathrm{C}(m,0) = 1$ Df

Note. Le symbole « Cmb » ou « C » est une abréviation du mot « combinatio » adopté par Pascal, *Œuvres*, t. 3, p. 289. Euler a indiqué $\mathrm{C}(m,n)$ par le symbole $\left[\frac{m}{n}\right]$. Acta Acad. Sc. Petr. a. 1781, t. 1, p. 90.

Plusieurs A. adoptent les simboles $\binom{m}{n}$, m_n, etc. ◁

·2 $m \varepsilon \mathrm{N}_0 \cap (n+\mathrm{N}_0) . \supset . \mathrm{C}(m,n) = m!/[n!(m-n)!]$ Df? ◁
·3. $\mathrm{C}(m+1,n+1) = \mathrm{C}(m,n+1) + \mathrm{C}(m,n)$ ◁
·4 $m \varepsilon 0 \cdots (n-1) . \supset . \mathrm{C}(m,n) = 0$
·5 $\mathrm{C}(n,n) = 1$ ·6 $\mathrm{C}(m,1) = m$
·7 $m,n \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset . \mathrm{C}(-m,n) = (-1)^n\, \mathrm{C}(m+n-1,n)$ {Euler, *id.*}

$$\mathrm{N}_0\ +\ \mathrm{N}_1\ -\ \times\ /\ \uparrow\ \cdots\ \Sigma\ \mathrm{num}\ !\ \mathrm{Cmb}$$

242. $m,n \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset .$
·1. $\mathrm{C}(m+n,n) = \mathrm{C}(m+n,m)$ ◁
·2. $\mathrm{C}(m+n-1,m)/\mathrm{C}(m+n-1,n) = n/m$ ◁
·3. $\mathrm{C}(2m,m) = 2\mathrm{C}(2m-1,m)$ ◁
·4. $\mathrm{C}(m+n,n)/\mathrm{C}(m+n-1,n) = (m+n)/m$ ◁
·5. $\mathrm{C}(m+n,n)/\mathrm{C}(m+n,n+1) = (n+1)/m$ ◁
·6. $\mathrm{C}(m+n+1,n+1)/\mathrm{C}(m+n,n) = (m+n+1)/(n+1)$ ◁

pag. 42, ligne 4, au lieu de: $[m+1, n+1]$ lisez: $[m, n]$.
242·8 $a \varepsilon \mathrm{N}_1+1 . b \varepsilon 1 \cdots (a-1) . \supset . \mathrm{C}(a,b) \varepsilon \mathrm{N}_1 \times [(\mathrm{N}_1+1) \cap (a/\mathrm{N}_1)]$ ◁
{Leibniz, *Math. Schrift.*, t. 7, p. 103:
Quaelibet combinatio, exceptis duabus extremis, divisibilis est per aliquem divisorem sui numeri rerum.} ◁
243·2′ $\Sigma_0^n\, \mathrm{C}(m+r,r)|r = \mathrm{C}(m+n+1,m)$ ◁
243·3 Au lieu de m lisez n ◁
243·3′ $n \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset . \Sigma\{\mathrm{C}(n,s)|s, 0 \cdots n \cap (2\mathrm{N}_0)\} = 2^{n-1}$ ◁

243·3″ ——— $\Sigma\{C(n,s)|s,0\cdots n\frown(2N_0+1)\}=2^{n-1}$ ◁

{243·3·3′·3″. JACOB BERNOULLI a. 1654 ⊢1705, *Ars conjectandi*, Basileae, a. 1713, p. 104:

Numerus combinationum secundum omnes exponentes pares (incluso nullione) aequatur numerum combinationum secundum omnes impares, proinde utervis semissis est numeri omnium combinationum simpliciter (incluso quoque nullione) h. e. cum iste in rebus n, sit 2^n [P243·1] utervis illorum erit 2^{n-1}.} ◁

243·5·9·11 Supprimez.

243·6 Ajoutez:

{LAGRANGE a. 1770; *Œuvres*, t. 2] p. 182:

$1+n^2+[n(n-1)/2]^2+\ldots=[1\times3\times5\ldots(2n-1)/(1\times2\times3\ldots\times n)]2^n$ } ◁

302·8′ $a>b\ .\supset.\ a>2\,\mathrm{rest}(a,b)$ E

·19 $\mathrm{quot}(a+b,c)=\mathrm{quot}(a,c)+\mathrm{quot}\,[b+\mathrm{rest}(a,c),c]$ Ci.

.20 $\mathrm{rest}(a+b,c)=\mathrm{rest}\,[b+\mathrm{rest}(a,c),c]$ Ci.

310·10. Au lieu du dernier b lisez c

313·1 Dem

[Hp . P045·4·5 .⊃: $x\varepsilon N_1\ .\ a,b\varepsilon\ N_1\times x\ .=.\ x\varepsilon N_1\ .\ a+b,\ b\ \varepsilon\ N_1\times x$ (1)

Hp . (1) .⊃. $\max\ [\ N_1\frown x\ni(a,b\varepsilon\ N_1\times x)]=\max[N_1\frown x\ni(a+b,\ b\ \varepsilon\ N_1\times x)]$ (2)

Hp . (2) . P311·2 .⊃. Ths] D

313·30 $a,b\ \varepsilon\ N_1\ .\supset.\ D(a,b)=\max(N_1\frown a/N_1\frown b/N_1)$ Df? ◁

·31 $D(2a-1,\ 2a+1)=1$ D

·32 $a\varepsilon\ 2N_1\ .\ b\varepsilon\ 2N_1+1\ .\ a>b.\supset.\ D(a+b,\ a-b)=D(a,b)$ E

·33 $a,b\ \ \varepsilon\ \ 2N_1+1$ ———.⊃. ——————— $=2D(a,b)$ E

·34 $a,b,c,d\ \varepsilon N_1\ .\ D(a,b)=1\ .\ D(c,d)=1\ .\ a/b=c/d\ .\supset.\ a=c.b=d$

{EUCLIDES VII P21} D

·35 ———.———.$a/b=c/d\ .\supset.\ c/a=d/b=D(c,d)$

{EUCLIDES VII P20} D

·7 $D(a,b)=1.\supset.\ (N_1+1)\frown(a^2+b^2)/N_1\supset N_1^2+N_1^2$ ◁

314·1 $a,b\ \varepsilon\ N_1-N_1^2\ .\ ab\ \varepsilon\ N_1^2.\supset.\ D(a,b)\ \varepsilon\ N_1+1$ ◁

{LEIBNIZ, *Math. Schr.* t. 7, p. 122, a. 1678} ◁

315. $a,b,m\ \varepsilon\ N_1\ .\supset.$

·1 $D(a,b)=1\ .\supset.\ N_1\frown(a^2+b^2)/N_1\supset 4N_0+1$ ◁

·2 ——— .⊃. $N_1\frown(a^4+b^4)/N_1\supset 8N_0+1$ ◁

·3 ——— .⊃. $N_1\frown[a\restriction(2^m)+b\restriction(2^m)]/N_1\supset N_0\times2^{m+1}+1$ ◁

{315·1-·3, EULER, *Theor. circa divisores numerorum*, N. C. Petr. I. a. 1747-48, p. 20} ◁

316. $n\varepsilon\ N_1\ .\supset.\ N_1\frown(2^{4n}+1)/N_1\supset 16\,n\,N_0+1$ ◁

{LUCAS, *Atti Accad. d. Sc. di Torino*, a. 1878, t. 13, p. 281} ◁

317. $a,b,n \varepsilon N_1 . D(a,b)=1 . ab \varepsilon 4N_1+1 . \supset .$
$N_1 \frown (a^{2abn}+b^{2abn})/N_1 \supset 8abnN_0+1$ {LUCAS, *id.* p. 282} ◁

321·3 Lisez: $m(a,b) = m(b,a)$

332. $a\varepsilon 1+N_1 . \supset . \min[(1+N_1) \frown (a/N_1)] \varepsilon Np$ ⊐

336·2 Lisez l' Hp $a\varepsilon N_1+3$

336·51 $a\varepsilon Np \frown (4N_1-1) . b,c \varepsilon N_1 . b^2+c^2 \varepsilon N_1 \times a . \supset . b,c \varepsilon N_1 \times a$ ◁
{EULER, *ibid.* p. 26} ◁

337·4 {EULER, *Theor. circa divisores numerorum*, N. C. Petr. a. 1747, p. 20} ◁

337·9 $m\varepsilon N_1 . 4m+1 \varepsilon Np . \supset . m^m-1 \varepsilon N_1 \times (4m+1)$ ◁
{BIKMORE, a. 1896, *Ed. Times*, t. 65, p. 78} ◁

337·30 {Les chinois ont connu cette P pour $b=2$, dès le temps de *Confucius*, a. —550 ⊢ —477; cfr. Heans, *The messenger of math.*, a. 1898, t. 27, p. 174} ◁

339·1 $a\varepsilon N_1 . \supset . \min[(N_1+1) \frown x \ni (a!+1 \varepsilon x \times N_1)] \varepsilon Np \frown (N_1+a)$ ⊐

340·3 Invece di $(2a)!$ si legga $[(2a)!]^2$ ◁

344·1 $m\varepsilon N_1 . 2^m+1 \varepsilon Np . \supset . m\varepsilon 2 \upharpoonleft N_0$
{FERMAT, *Oeuvres*, t. 2, p. 205, a. 1640:

Soit par exemple la progression double depuis le binaire avec ses exposants au dessus:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	8	16	32	64	128	256

Je dis que, si vous augmentez les nombres de la progression de l'unité, et que vous fassiez 3, 5, 9, 17, etc. tous les dits nombres progressifs ainsi augmentés, qui se trouveront avoir pour exposants des nombres qui ne sont pas de la dite progression double, seront nombres composés.}

·2 $m\varepsilon 2 \upharpoonleft N_1 . \supset : 2^m+1 \varepsilon Np . = . 3 \upharpoonleft (2 \upharpoonleft (m-1))+1 \varepsilon N_1 \times [(2 \upharpoonleft m)+1]$ ◁
{PROTH, *Nouv. Corresp. Math.*, Bruxelles, a. 1878, p. 210} ◁

·3 $m\varepsilon N_1 . 2^m-1 \varepsilon Np . \supset . m \varepsilon Np$
{FERMAT, *Oeuvres*, t. 2, p. 198, a. 1640:

Les nombres moindres que l'unité que ceux qui procèdent de la progression double, comme

1	2	3	4	5	6	7
1	3	7	15	31	65	127 etc.,

soient appelés les radicaux des nombres parfaits, pour ce que, toutes les fois qu'ils sont premiers, ils les produisent.

Mettez, au dessus de ces nombres, autant en progression naturelle: 1, 2, 3, 4, 5, etc. qui soient appelés leurs exposants.

Cela supposé, je dis que:

Lorsque l'exposant d'un nombre radical est composé, son radical est aussi composé.} ◁

344·4 $m \varepsilon \mathrm{Np} . \supset . \mathrm{Np} \frown (2^m - 1)/\mathrm{N}_1 \supset 2m \times \mathrm{N}_1 + 1$

{FERMAT, id. p. 198:

...Lorsque l'exposant est un nombre premier je dis que son radical ne peut être mesuré par aucun nombre premier que par ceux qui sont plus grands de l'unité qu'un multiple du double de l'exposant ou que le double de l'exposant.}

·5 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 + 1 . \supset . \exists \mathrm{Np} \frown x \ni [\mathrm{mp}(x, n!) = 1]$

{LIOUVILLE, t. 2, série II, a. 1857, p. 278} ◁

345·1 $a \varepsilon \mathrm{Np} . b \varepsilon 1 \cdots (a-1) . \supset . \mathrm{Cmb}(a,b) \varepsilon \mathrm{N}_1 \times a$ ◁

{LEIBNIZ, *Math. Schr.*, t. VII, p. 102:

Si numerus rerum sit primitivus, combinatio ejus quaelibet per ipsum dividi potest, dempta prima et ultima.} ◁

345·2 $a \varepsilon \mathrm{Np} - \iota 2 . b \varepsilon 0 \cdots (a-1) . \supset . \mathrm{Cmb}(a-1, b) \varepsilon \mathrm{N}_0 \times a + (-1)^b$ ◁

·3 $a \varepsilon \mathrm{Np} . b \varepsilon 2 \cdots a . \supset . \mathrm{Cmb}(a+1, b) \varepsilon \mathrm{N}_1 \times a$ ◁

{·2·3, LUCAS, *Amer. Journ.*, t. 1, p. 229, a. 1878} ◁

346. $m,a,b,c \varepsilon \mathrm{N}_1 . 2c+1 \varepsilon \mathrm{Np} . \supset .$

·1 $a^{2c} + b^{2c} \varepsilon \mathrm{N}_1 \times (2c+1) . \supset . a,b \varepsilon \mathrm{N}_1 \times (2c+1)$ ◁

·2 $a,b - \varepsilon \mathrm{N}_1 \times (2c+1) . \supset . a^{2c} - b^{2c} \varepsilon \mathrm{N}_1 \times (2c+1)$ ◁

·3 ——————. $\supset$.

$a^c + b^c \varepsilon \mathrm{N}_1 \times (2c+1) . \cup . a^c - b^c \varepsilon \mathrm{n} \times (2c+1)$ ◁

·4 ——————. $\supset$.

$- \exists (a,b) \ni [a,b \varepsilon \mathrm{N}_1 . a^c + b^c, a^c - b^c \varepsilon \mathrm{n} \times (2c+1)]$ ◁

·5 $a^m + b^m \varepsilon \mathrm{Np} . \supset . m \varepsilon 2^{\mathrm{N}_0}$ ◁

·6 $a^m - b^m \varepsilon \mathrm{Np} . \supset . m \varepsilon \mathrm{Np} . a = b+1$ ◁

·7 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 . a^m + b^n \varepsilon \mathrm{Np} . \supset . \mathrm{D}(m,n) \varepsilon 2 \upharpoonright \mathrm{N}_0$ ◁

{LUCAS, a. 1891, *Th. des nomb.*, p. 342} ◁

347. $m,a,b,c \varepsilon \mathrm{N}_1 . 2c+1 \varepsilon \mathrm{Np} . \supset .$

·1 $a^m - b^m \varepsilon \mathrm{N}_1 \times (2c+1) . \supset . a \upharpoonright \mathrm{D}(m, 2c) - b \upharpoonright \mathrm{D}(m, 2c)$
$\varepsilon \mathrm{N}_1 \times (2c+1)$ ◁

·2 $\mathrm{D}(m, 2c) = 1 . a^m - b^m \varepsilon \mathrm{N}_1 \times (2c+1) . \supset . a - b \varepsilon \mathrm{N}_1 \times (2c+1)$

·3 $m \varepsilon \mathrm{Np} . \supset . \mathrm{N}_1 \frown (a^m - b^m)/\mathrm{N}_1 \supset [\mathrm{N}_1 \frown (a-b)/\mathrm{N}_1] \cup (\mathrm{N}_1 \times m + 1)$ ◁

·4 —— . $\supset . \mathrm{N}_1 \frown (2^m - 1)/\mathrm{N}_1 \supset \mathrm{N}_0 \times m + 1$ ◁

{346·1-·6, 347·1-·4, EULER, *Theor. circa div. numerorum*, N. C. Petr. I, a. 1747-48, p. 20} ◁

348. $q \varepsilon \mathrm{N}_1 . 4q+3, 8q+7 \varepsilon \mathrm{Np} . \supset . 2^{4q+3} - 1 \varepsilon (8q+7) \mathrm{N}_1$ ◁

{LUCAS, *Atti Accad. d. Sc. di Torino*, a. 1878, t. 13, p. 283} ◁

351'·1 $u \varepsilon \mathrm{Cls}' \mathrm{N}_0 . \mathrm{num}\, u \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset .$

$\Sigma u = \iota x \ni [f \varepsilon (u \mathrm{f} 1 \cdots \mathrm{num}\, u) \mathrm{rcp} . \supset f . x = \Sigma (f, 1 \cdots \mathrm{num}\, u)]$ Df

{ Ex. P352·6*a* }

·2 Hyp P·1 .⊃. $\Pi u = (\Pi \mid \Sigma)$Df·1 | Ex. P352·7a | Df

·3 $u \varepsilon \mathrm{Cls}`\mathrm{N}_0 . \mathrm{num}(u \leftarrow \iota 0) \varepsilon \mathrm{N}_1 .\supset. \Sigma u = \Sigma(u \leftarrow \iota 0)$ Df

·4 ——————1—————— $\Pi u = \Pi(u \leftarrow \iota 1)$ Df

·5 Hyp P·3 .⊃. $\Sigma u = \Sigma(\omega, u)$: Hyp P·4 .⊃. $\Pi u = \Pi(\omega, u)$ Df?

352·3, 2.e ligne. Au lieu de $a\upharpoonleft$ lisez $2\upharpoonleft$. Ajoutez:

{P·2·3 LEGENDRE a. 1797 p. 8}

352·4 $u \varepsilon \mathrm{Cls}`\mathrm{N}_1 . \exists u .\supset. \mathrm{Dvr} u = \Pi\{[x\upharpoonleft \min \mathrm{mp}(x,u)] \mid x, \mathrm{Np}\}$ ⊣

·5 ———. $\mathrm{num} u \varepsilon \mathrm{N}_1 .\supset. \mathrm{m} u =$———max——————

·6 $\Sigma(\mathrm{N}_1 \cap a/\mathrm{N}_1) = \Pi(\{[x\upharpoonleft(\mathrm{mp}(x,a)+1)-1]/(x-1)\} \mid x, \mathrm{Np})$

{ WALLIS J.: *Discours of combinations*, London a. 1685, cap. IV, 1 }

·7 $\Pi(\mathrm{N}_1 \cap a/\mathrm{N}_1)^2 = a\upharpoonleft \mathrm{num}(\mathrm{N}_1 \cap a/\mathrm{N}_1)$ ⊣

354·6 Au lieu de Σ lisez Π.

380·1′ $\mathrm{E}x =_1 \mathrm{n} \cap z \exists (x \leq z < x+1)$

·1″ $\mathrm{E}x =_1 \mathrm{n} \cap \{x - [(\mathrm{R} \cup \iota 0) \cap (1-\mathrm{R})]\}$ ⊲

380·3 Au lieu de $0<$ lisez $0\leq$

380·9 $x = = 0 .\supset. \mathrm{E}[(\mathrm{E}x)/x] - 1 = \mathrm{E}x + \mathrm{E}(-x)$ ⊲

384. $a,b \varepsilon \mathrm{N}_1 .\supset. \mathrm{D}(a,b) = b + \Sigma_1^b \mathrm{E}(ah/b) \mid h + \Sigma_1^b \mathrm{E}(-ah/b) \mid h$ ⊲

390·8 $a,b \varepsilon \mathrm{N}_1 .\supset. \mathrm{rest}(a,b) = b \times \Theta(a/b)$ Df?

391. { BERTRAND *Aritmetica*, a.1862 p.139 }

Les P391-395, qui ne contiennent pas le signe Θ, doivent venir après la 383.

396. $m,n \varepsilon \mathrm{N}_1 . a \varepsilon \mathrm{Np} .\supset.$

·1 $\mathrm{C}(m,n) \varepsilon \mathrm{C}[\mathrm{E}(m/a), \mathrm{E}(n/a)] \times \mathrm{C}[a\Theta(m/a), a\Theta(n/a)]$
$+ \mathrm{N}_1 \times a$ ⊲

·2 $\mathrm{C}(m,n) \varepsilon \Pi\{\mathrm{C}[a\,\Theta(m/a^r), a\,\Theta(n/a^r)] \mid r, \mathrm{N}_1\} + \mathrm{N}_1 \times a$ ⊲

{396·1·2, LUCAS, *Amer. Journ.*, a. 1878, t. 1, p. 230} ⊲

Sul § 2 del Formulario, t. II: Aritmetica

Il § 2, ultimamente pubblicato, contiene le proposizioni e dimostrazioni relative all'Aritmetica, già ridotte in simboli in lavori precedenti, insieme alle aggiunte proposte dai varii Collaboratori (vedi pag. VIII), e alle nuove proposizioni, ridotte in simboli in occasione di questa stampa, e che non portano sigle. Nel § 2 è solo contenuta la teoria dei numeri razionali. Quella degli irrazionali, e le successive, sono in corso di stampa.

Si sono dovute vincere molte difficoltà, di vario genere, affinchè questo F_2§2 potesse raggiungere il suo scopo; cioè riunire e coordinare il molto materiale, già contenuto in lavori precedenti, relativo alle teorie che formano oggetto del nuovo §; ordinare il tutto in modo da riuscirne facile la ricerca, e con una legge indipendente da ogni opinione personale, e da ogni abitudine invalsa; correggerlo e completarlo. Inoltre si doveva fare in modo da rendere facili le aggiunte e correzioni, le quali vanno completando e perfezionando il Formulario; e che in una prossima edizione (tomo III del Form.) non vada perduto il grande lavoro fatto nella correzione tipografica.

Le notazioni di Logica matematica furono ideate in modo da non presentare difficoltà tipografiche. Invero formule siffatte furono già stampate nelle più svariate tipografie di Torino, Milano, Roma, Napoli, Palermo, in Francia, Spagna, Germania, Russia, America, ecc. Ma per stampare un libro di pure formule, si è reso necessario un materiale tipografico apposito. Nel provvedere questo materiale si è cercato di riunire la chiarezza delle formule colla facilità della composizione. Si è fissata ad es. la lunghezza dei segni

$$= \quad > \quad \supset \quad + \quad - \quad \times \quad / \quad \upharpoonleft \quad \upharpoonright$$

proporzionale ai numeri

$$10 \quad 10 \quad 10 \quad 8 \quad 8 \quad 6 \quad 6 \quad 4 \quad 4$$

che le misurano in punti tipografici; queste dimensioni aiutano a leggere naturalmente le formule secondo le comuni convenzioni sulla soppressione delle parentesi. Si sono soppresse tutte le complicazioni non necessarie, ma dannose che alcuni A. amano introdurre nelle formule matematiche.

Le varie notazioni in uso sono riportate nelle note al Formulario, adottandone la più semplice. Si è introdotto un segno nuovo, per indicare la potenza, pure conservando l'usuale notazione dell'esponente in alto, quando esso ha una forma semplice; ma si usa il nuovo segno quando l'esponente ha una forma complicata. In conseguenza le formule di Matematica possono essere scritte, senza eccezioni, mediante segni seguentisi sullo stesso rigo; quantunque ciò non sia costantemente fatto nel F, onde non scostarci troppo dall'uso comune. Senza questa convenzione, siccome nel F si incontrano formule comunque complicate, gli esponenti possono portare altri esponenti, linee di divisione, indici, radicali, e così via; sicchè si aumenta indefinitamente il numero dei corpi tipografici, arrivando ben presto ai microscopici, senza che vi sia alcuna ragione per cui ciò che sta all'esponente sia meno leggibile di ciò che sta alla base.

Queste semplificazioni, per cui le formule si compongono come il testo ordinario, saranno molto apprezzate da chi ha qualche conoscenza dell'arte tipografica; alcune furono già accettate, e altre lo saranno da chi dovrà stampare a proprie spese un libro contenente molte formule.

Siccome le numerose e continue aggiunte rendono inapplicabile la stereotipia al F, finora si è deciso di conservarne la composizione, onde poterlo ristampare coi perfezionamenti, senza pericolo di nuovi errori.

Come si è già fatto pel §1 (RdM t. VI, pag. 48-52), anche qui è necessario dare la corrispondenza fra le P dei lavori precedenti e quelle del nuovo § 2, dando le ragioni delle modificazioni e soppressioni fatte. Queste ragioni saranno date un po' sommariamente, a causa del lungo cammino fatto da F_1 ad F_2.

Il segno « a » dopo il numero d'una P indica che occorre cercarla nelle aggiunte pubblicate in questo stesso fascicolo.

Confronto degli « *Arithmetices principia, nova methodo exposita* » a. 1889, con F_2 §2.

Il primo lavoro, che continuo ad indicare colla sigla ⊽, comincia la numerazione dall'unità invece che dallo 0, come in F. Fatto questo cambiamento, si ha che le P

1	6	7	8	9	di ⊽ §1 diventano le
002·1	·2	·3	·4	·5	di F_2 §2.

Le 2, 3, 4, 5 di ⊽ già furono enunciate nella logica F_2 §1 P81-84. Veramente la nuova Pp 002·3 è un po' meno restrittiva della antica 7; e precisamente le antiche P 7, 16 e 16′ valgono le nuove 003·5 003·2 002·3.

L'antica P10 ha dato luogo alla nuova 010.

Le P11, 12, 13, 14, 15, 17, trasformazioni logiche delle precedenti, si sono soppresse.

Le antiche	18	19	20	22	23	25	27
valgono le nuove	011·2	·3	012·3	·2	·4	·1	·5.

Le 21, 26, 28 si sono soppresse, causa la semplicità.

Le 24 e 24′ si sono incorporate nella dimostrazione della 012·1.

In ত §2 le P:

1	2	3	5	6	7	8	9	10	11
sono diventate con qualche perfezionamento, le									
021·1	150·1	·2	·1	021·3	·4	022·4	023·1	·7	·6

14	15	16	17	18	20, 21	22	23
151·2	·1	·3	152·2a	150·5	151·5	·6	·4

Soppresse le 4, 12, 13 19 perchè perdono importanza nelle trasformazioni fatte.

Le P di ত §3

	1	2	3	4
diventano	220·1	·1′	·6″ a	·6‴ a

La 5, di minore importanza, si è tralasciata.

Corrispondenza fra ত §4 ed F_2:

1	2	3	4	5	7	8	10	11, 12	13	15
041·22	·2	·3	043·2	041·23	043·4	·1	046	160·1	·2	043·5

Le 6, 9, 14 si sono tralasciate. Le antiche dimostrazioni si sono sostituite con quelle comparse in ত, ove si fa uso delle funzioni.

Le P di ত §5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
diventano	080·21	·2	·3	·22	081·1	·2	·3	173·1	·2.

Nel §6 di ত si erano introdotte le notazioni $a \supset b$ $b \sqsubset a$ $a \pi b$ per indicare rispettivamente le relazioni « a divide b » « b è divisibile per a » « a è primo con b ». Ma già nel tomo I di F, e ora nel tomo II, si sono soppresse queste notazioni (quantunque sia stretta la analogia dei segni $\supset$ e $\sqsubset$ coi $>$ e $<$), potendosi le due prime esprimere coi simboli precedenti sotto la forma $b \varepsilon N_1 \times a$, e la terza come è scritto in F_2 §2 P310 nota.

In conseguenza si sono soppresse le antiche P 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 22, 24, 31, 32; come pure, perchè poco importanti, le 8, 9. Le altre sono riportate come segue:

1	4	10	12	13	16	17	18	19	20	21	23
050·1	330	050·4	·6	·5	052·4	050·3	053·1	·7	·5	097	045·3

25	26	27	28	29, 30	33	34	35	36	37
055·1a	·2a	045·4	·5	049·993a	311·0	313·1	310·2	311·5	311·6

Le P1-24 del §7 di ত si sono trasformate ordinatamente nelle:

085·8, 045·9, ·9′, ·91, 313·3, ·31a, 093·1, 333, 340·1, 342·1, 319·9, 311·6, 334, 337·1, 311·12, ·13, ·15, ·11, 322·1, 323·2, 321·5, 338·3, 339, 337·30.

Nel §8 di ꝑ le P corrispondono alle nuove

1	2	3	4	5	6, 7	8, 10	9	11
054	062·1	060	050·6	062·2	062·3	313·34a	·35a	061·6, ·7

12, 12′, 13, 13′, 14	15	18	19, 20	21	22	23	24
064·9a	062·4	068·10	161·2	162·5	·4	·6	·3

25, 26, 27	28, 29	30	31	32	33	34	35
164·2	163·5·6·2·4	061·2	067·1	061·3	061·4	062·10	063·0

36	37	38	39	40	41
067·3	·2	062·22	064·0	062·24	065·1

Le proposizioni dei § 9 e 10 di ꝑ trattano degli irrazionali. Esse saranno riprodotte nel § 3.

Nello scritto « Sul concetto di numero, a. 1891 » indicato nel Form. col segno ꝑ, introdotto nel § 1 il concetto di funzione, ora contenuto in F_2 §1 P500 e segg., lo applicai a semplificare alcune proposizioni, e ad enunciarne delle nuove. Eccone la corrispondenza con F_2:

ꝑ §2	P1-10	§3	P1-3	4-6, 8	7	9
F_2§2	P002·1-·5, 003·1-·8		014·1-·3	017	016·2	012·1

§4	P1-3	7	4	5	6	8	9, 10	11	§5	P1	2
	150·1-·3	·5	151·2	·1	·3	·4	·5	·6		014·1	011·1

Le altre P di ꝑ §5 trattano dell'inversione; già furono riportate in F_1I, e ne abbiamo parlato in F_2 §1.

In ꝑ §6 si introducono i numeri negativi; ma questa trattazione si è cambiata in F_2, onde non far uso dell'inversione.

ꝑ §6	P1	1′	2	3	4	5	6	7	8
F_2§2	P041·0	·0′	·3	043·1	·4	042	043·6	080·0	·3

9	10	11
081·1	·3	·2

La P di ꝑ §8 diventa la 050·1.

ꝑ §9	P 1	2	3	4	5	7	10
F_2§2	P200·1	·2	201·1	202	200·4	200·3	100·0

Le antiche P6, 6′ trovansi in F_2 §1 P461 e 462; la 11 è diventata la 520 di F_2 §1.

Le antiche P8 e 9 sono soppresse, a causa delle nuove P210 più generali.

ꝑ §10	P 1	3	4	5	6	7
F_2§2	P053·2	060·0′, 071	064·9a	061·1	·2	·3

Il §11 di $\mathfrak{P}$ si occupa dei numeri reali Q e q; le P ivi contenute saranno riprodotte nel prossimo fascicolo del F. Sicchè quanto è contenuto nei miei lavori $\mathfrak{T}$ e $\mathfrak{P}$ è riportato in F_2, salvo gli ultimi § in corso di stampa.

Confronto del «Formulaire de Mathématiques», t. I, parti II, III, V e VI con F_2 §2.

F_1 II§1	P1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_2 §2	P011·3	012·2	·1	·3, ·4	011·1	038·1	·7	·2	·4	·8	·5

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
·3, ·6	·10	·11	021·3	022·4	021·8	023·2	·5	·7	150·3	·1, ·2

23	24	25	26, 27	31	32	33	34, 35	36	37
151·2	·1	·3	·12	038·18	·13	·14	063·7	020·2	072·1

41, 42, 43	44	45	51	52	53	54	55	56	58
190	191·3	·2	100·1·2	101·22·23	·12	·31	194·1	100·3	101.21

Le antiche P28, 29, 30 si sono soppresse, poichè semplici. Nel passaggio dalla P51 alla nuova 100 si è sostituito alla notazione del Dedekind la nuova per le ragioni ivi addotte in F_2. In conseguenza sparisce la P57.

F_1 II§2	P1	2	3	4	5	6	7	8	9	10, 11
F_2 §2	P041·3	·0′	·1	·22	048·2	043·4	043·5·6	·1	046	043·7

12, 13	14	15, 16	17	18, 19, 20	21-24	25
049·91a	045·1	160·1, 160′a	191·4	048·3, 164·8a	065·31-·34	074·1

26	27	28	29	30	31	32	33	34	36
052·4	051·8	053·6	062·3	·10	193·5	063·21	·22	071·51a	062·6

37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
·12	066·1·2	062·13	·8	·9	·14	121·22	·12	·31	103·2

47	48
121·51	194·2.

Alcune formule hanno subito trasformazioni, quali le 19 e 20, e quelle contenenti il segno Π, cioè le 43 e segg. La P35 si è soppressa, causa la semplicità.

F_1 II§3	P1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_2 §2	P080·3	·22	·23	·21	098·1	080·1	081·1	·3	·2	098·2

11	12, 13, 14	15	16, 17	18
096·4	193·6, ·7a	173·1	·2	125.

F_1 II§4	P1	2	3	4, 5	6	7	8	9	10
F_2 §2	P043·3	047	095·1	082·1	095·2	·3	083·11	049·8	·9

11	12	13	21	22	23	24	25	26	27	28
095·7	·4	·5	·10	082·2	083·1	·12	·13	095·11	·12	·13

29, 34, 35	30	31	32	33	36	40	41	42	43
·14	095·5	083·13	·14	095·16	·17	·20	082·3	083·16	·17

44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
095·25	·26	·27	·30	·21	·32	·33	·34	·35	083·3	095·28	083·18

56	57	58	59	60	61	62	63
095·31	·20′a	·20″a	·22	·23	·40	083·4	·5

F_1II§5	P2	3	4	11	12	13	14	15	16	17
F_2 §2	P160·3	170·1	·7	171·1	·2	174·1	·2	171·6,·9	·15	·7

18	19	20	21	22	23	24	25	26
·12	·11	·8,·14	·4	·17	171·19	162·1	·3	·2

Le P di F_1 II §6 e §7 saranno contenute in F_2 §3.

F_1II§8	P1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_2 §2	P021·4	074·1	·2	·3	·4	075·1	·2	·5	·6	·3	·4

Le seguenti saranno contenute in F_2 §3; come pure quelle di F_1II§9

F_1II§10	P1, 2	3	5-9	10	11	12	13	14	15
F_2 §2	P113	244	114·1	104·4	·5	130	104·3	·2	181·1

17	20
080·1	081·3

Delle P contenute nelle aggiunte a F_1II (pag. 117) si ha la corrispondenza:

F_1II§2	P42′	§4	P14-39	52′	60′	66	67
F_2 §2	P062·2		soppresse	095·36	083·2	·6	·7

§10	P25	26	27, 28	29
	115·2	180·3	·4a	·2

Alcune P tralasciate troveranno il loro posto in altre teorie.

F_1III§1	P6	7	8	20	21, 22	23, 24	25, 26	27	28, 29
F_2 §2	P045·3	·4,·5	·6	·8	·9	·91	093·1	094	085·1

30	31	32	33	34
240·1	·2′	·3′	·4	020·3

Le P1-5 e 10-15 si sono soppresse, perchè semplici, ovvero riferentesi alla teorie delle congruenze, che non ha ancora trovato posto in F_2.

F_1III§2	P1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_2 §2	P300·0	·2	·3	·10	302·1	·2	·3	·4	·6	300·4	302·7

12	13	14	15	16	17
·8	·8′a	300·5	·6	·9	·7.

Sono soppresse le P18-20.

F_1III§3	P1	2, 5	6	7	8	8′	9	10	10′	13	14
F_2 §2	P311·2	·3	·4	311·1	·4	·3	·5	·6	·8	·7	313·32a

15	16	17	18	19	19′	21
·33a	·5	311·9	·11	·13	·14	·15

Fra le P soppresse menzioneremo le Def P3 e 4, di cui non si è più fatto uso, modificando alquanto alcune P successive. Potrebbero essere utili in altre teorie.

F_1III§4	P1	2, 3	4	5	6	8	9, 10	11	12
F_2 §2	P321·2	·3	·4	323·2	·1	321·5	322·4	321·7	323·5

F_1III§5	P1	2	3, 4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_2 §2	P330	331	333	340·1	342·1	·2	·3	334	337·1	·2	·30

13	16	17	18	19	20	21	24	25	41	42
341·1	339	338·2	·3	350·1	·2·3	·4	·5	341·2	352·1	350·5

43	44
352·6a	·7a.

F_1III§6	P1	3	4	5	11, 12	13	14	17	18	20	21
F_2 §2	P352·2	350·6	352·5a	·3	353·1	·2	·3	354·4	·3	·5	·6

Nelle agg. a F_1III (pag. 118) le §1 P27′ §3 P8″ §5 P1′ §6 P3 sono diventate F_2§2 P093·3 313·3a 330 350·6

F_1V§1	P1	2	3	4	5	6	7	8	11
F_2 §2	P200·1	·2	·3	203·1	·2a	204a	201·1	·2	·3

Le P9 e 10 sono già contenute in F_2§1. Le P12-16 sono contenute nella P210.

F_1V§2	P1	2	3	4	5	6	7	10	11	12
F_2 §2	P220·1	·1′	227	220·7′a	·7a	223·7a	·7′a	220·6	·6′	222

13	14, 15	16
222′	223·9	224

I successivi § di F_1V saranno pubblicati in seguito.

Si sono pure riportate alcune delle P di F_1VI, sulla teoria degli aggregati, raccolte dal prof. VIVANTI.

Delle due notazioni ∞ e Nc, dovute rispettivamente al Cantor ed al Vivanti, si è conservata solo la seconda, perchè più semplice. In conseguenza l'antica P1 del §1 diventa la nuova 210·1.

Le 2, 3, 4 si trasformano in altre già enunciate in Logica. La 5 diventa la 211·1; le antiche 6, 7, 10, 11 si trasformano nelle nuove 210·2 ·9 ·5 ·6, Le 8, 9, 12 e successive racchiudono le idee di numero algebrico, q, q′, ... non ancora definite in F_2.

In F_1 VI §2 la P1 diventa la nuova 210·1. La P2 si potrà rimettere quando se ne continui la teoria. Ma le successive definizioni non soddisfano alle leggi delle definizioni simboliche.

Così la P3

$$u, v \varepsilon K . u \frown v = \Lambda . \supset . Nc`u + Nc`v = Nc`(u + v)$$

che è vera, non si può assumere come definizione della somma di due numeri cardinali; perchè dovrebbe avere la forma « Somma di due numeri cardinali = funzione nota di essi ». Bisognerebbe ridurla ad es. alla forma:

$$a, b \varepsilon Nc . \supset . a + b = \iota z \varepsilon [u, v \varepsilon Cls . - \exists u \frown v . Nc`u = a . Nc`v = b . \supset_{u,v} . z = Nc`(u \smile v)]$$

cioè « dicesi somma dei due numeri cardinali a e b il valore costante dell'espressione $Nc`(u \smile v)$, ove u e v sono classi qualunque, non aventi individui comuni, ed aventi per numeri cardinali rispettivamente a e b ».

Parimenti la P7 contiene non solo nel primo membro dell'eguaglianza, ma anche nel secondo, un segno non noto; cosa del resto ben avvertita dall'A. in RdM, a. 1894, p. 136.

In conseguenza, queste P e le successive non possono essere riportate nel Formulario, finchè qualcuno non le abbia riordinate, dando definizioni puramente simboliche, e non aventi bisogno del linguaggio ordinario per essere intese.

L'ordinamento del migliaio di P contenute nel F portò pure un lavoro lungo, che si è dovuto rifare più volte. I termini « Aritmetica, Algebra, Teoria dei numeri », non esprimono punto scienze con confini nettamente definiti. Chi fa cominciare l'Algebra coll'uso delle lettere chi coi numeri negativi. Da nazione a nazione questi termini cambiano affatto significato; e in una nazione stessa i varii A. attribuiscono loro senso differente. Ciò che si chiama « ordine logico » non è spesso che una abitudine più o meno invalsa. Per rendere il Formulario indipendente da ogni arbitrio personale, si sono raggruppate le P a seconda dei segni che le compongono (F_2 §2 pag. VIII).

I segni si seguono in un ordine tale che ogni segno, eccettuati i primitivi, sia definito mediante i precedenti. Ciò non vuol dire che ogni segno debba seguire immediatamente quelli mediante cui vien definito; cioè questa legge non basta a ordinare tutti i segni. Ad es. dopo il gruppo di idee primitive 0 N_0 + (P001–019) si può passare, come si è fatto, agli N_1 (P020) o al — (P021), come pure al × (P041), ai ··· e Σ (P100 e segg.), al > (P150), al num (P200); poichè ognuno di questi segni è definito mediante i primi.

Si è cercato di comporre il Formulario in modo che si possa leggere in tutti gli ordini legittimi, come si scorge dai titoli delle P.

La numerazione delle P che era progressiva, con lacune, nel § 1, qui si è fatta parte progressiva, e parte decimale, il che rende più facile l'interpolazione di formule. Tuttavia essa è ancora incomoda assai nei rimaneggiamenti di formule che si sono dovuti fare; poichè ognuno di essi richiede la correzione attenta di tutte le citazioni. In una futura pubblicazione si tenterà un sistema più comodo.

Le indicazioni storiche sia sulle proposizioni, come sulle notazioni, utili sempre, sono utilissime nel Formulario, perchè riposano un po' il lettore, e manifestano meglio l'importanza delle proposizioni, e spesso il vantaggio della ideografia. Ma anch'esse richiedono molto lavoro per poter avere un qualche valore. Le indicazioni che trovansi nei libri delle generazioni passate, e ancora in qualche libro moderno, secondo cui p. e. l'Algebra è dovuta a Des Cartes, o a Viète, o ai matematici italiani del secolo XIII, o agli arabi, o agli indiani, o ai greci, non hanno alcuna precisione. Nè l'ha ad es. l'affermazione più precisa che l'uso delle lettere sia dovuto a Viète, trovandosi esse in Aristotele, e di uso comune in Euclide, come risulta dalle citazioni contenute nel F.

Nè possono essere utili per noi indicazioni della forma: « Il segno + è dovuto a Leonardo da Vinci ». L'esame d'una frase siffatta importa un lunghissimo lavoro; da cui risulta che effettivamente il segno + fu usato da questo scienziato per indicare la cifra 4; e l'attribuire a questi l'uso del segno + vale quanto attribuirlo al primo abitante delle caverne che abbia incisa una croce. Simile è la citazione di Widman.

Le indicazioni poi che portano con precisione il nome dell'Autore, e la pagina del libro citato, passando per più mani, a causa degli errori materiali accumulati, spesso sono inesatte; e invano si cerca al posto indicato il passo in questione. Altre volte lo si trova, ma ha senso ben diverso da quello che gli attribuiva lo storico.

In conseguenza si è dovuto rimontare all'origine dei passi citati; le citazioni del F portano le indicazioni precise, in modo che chiunque possa facilmente confrontare il libro citato; e spesso si riporta il passo citato. Ciò finchè fu possibile; perchè anche nel F alcune citazioni attendono di essere meglio precisate.

Si badi poi che le indicazioni storiche contenute nel F non pretendono punto di rimontare alla prima origine della P in questione; ma solo di indicare un A. ove essa si trova. Uno studio ulteriore potrà sempre sostituire ad esse altre citazioni relative ad epoca più antica. Del resto qui si è fatto uso delle ricerche storiche di M. Marie, M. Cantor, di quelle contenute nell'*Intermédiaire des Mathématiciens*, ed in varii altri lavori stati menzionati.

Il Formulario d'Aritmetica, nello stato attuale, contiene già l'analisi completa delle idee d'Aritmetica. Ogni segno è posto eguale per

definizione, ad un gruppo di simboli precedentemente definiti; e ciò finchè si arriva alle idee primitive. Questa analisi che io ho fatta in massima parte nel citato lavoro del 1889, è ciò che differenzia nella forma e nella sostanza questo F dagli altri libri. Alcuni di questi studii già furono introdotti in trattati scolastici, quali:

C. Burali-Forti e A. Ramorino, *Aritmetica*, Torino 1898

P. Gazzaniga, *Libro di Aritmetica e di Algebra elementare*, Padova, a. 1897

M. Nassò, *Algebra elementare*, Torino 1898

ma le proposizioni, private della loro forma simbolica perdono assai della loro chiarezza e ragione d'essere; sicchè non sempre il lettore rimane convinto che questa via sia migliore di altre. Lasciando in disparte i trattati mal fatti, su cui ben parlò il prof. Ciamberlini al Congresso della Società « Mathesis » (Periodico di Matematica, a. 1898, p. 37), molti A. cominciano l'aritmetica con definizioni che hanno la forma di circoli viziosi.

Così la Df

« Numerare oggetti significa considerarli come omogenei, insieme raccoglierli, e ad essi singoli far corrispondere altri oggetti che si considerano anche come omogenei »;

traduzione letterale di quella con cui comincia l' « Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, a. 1898, p. 1 », e a cui l'A. si arresta dopo l'esame di molte definizioni del numero, non è che un accozzamento di parole. Invero con essa sarebbe definito il « Zählen » quando fossero precedentemente definiti i termini « gleichartig, ansehen, auffassen, zuordnen, ... », i quali ad un lettore possono riuscire più complicati del termine che si vuol definire; e ciò si può dimostrare con argomenti tratti dalla filologia, dalla storia delle civiltà e dalla pedagogia.

Insomma, trattandosi di termini che si incontrano nel linguaggio comune, affinchè una definizione possa avere un qualche valore, è necessario che prima sia costrutta una tabella di parole, delle quali si suppone noto il significato, e poi che la definizione, oltre al termine che si vuol definire, non contenga che termini di quella tabella. Ma chi fa questo lavoro, ricostruisce la Logica matematica.

L'analisi delle idee d'Aritmetica contenute in F_2 §2 è l'unica che esista attualmente. Per quel gruppo di proposizioni 002·1–·5, che si potrebbero chiamare definizione del numero intero positivo, usando la parola definizione in un significato più ampio di quello dato in F_2§1P7, il lavoro più prossimo è quello del Dedekind, a. 1888, di cui nel Formulario, pag. 3 si sono riportati i passi più importanti, in guisa da

formare un testo intelligibile di per sè. Già vi appare un principio di Logica matematica, coi segni di deduzione e moltiplicazione logica fra classi, usati sotto forma speciale. Ma vi mancano tutti gli altri segni di Logica matematica che costituiscono un'ideografia completa.

La composizione del mio lavoro a. 1889 fu ancora indipendente dallo scritto menzionato del Dedekind; prima della stampa, ebbi la prova morale dell'indipendenza delle proposizioni primitive da cui io partivo, nella loro coincidenza sostanziale colle definizioni del Dedekind. In seguito riuscii a dimostrarne l'indipendenza.

I così detti numeri negativi ed i fratti sono definiti come operazioni, sottrarre e dividere; essi rimontano così alla più remota antichità, e rappresentano bene l'uso che di essi facciamo; la teoria ne risulta molto semplice. Così sono considerati in varii trattati, in modo più o meno chiaro.

Altri A. invece nell'introduzione di questi enti rasentano l'assurdo.

Invero, avendo ancora la parola «numero» il significato di «numero naturale» o N_1, se per 3—5, o per 3/5 si definisce quel numero che sommato con 5, o moltiplicato per 5, dà 3, si deve rispondere che tal numero non esiste. Nè se ne può ammettere l'esistenza per postulato, come alcuno fa, essendo tal postulato una proposizione falsa.

Nè vale l'aggiungere «esso non esiste; ma per ovviare a siffatto inconveniente, e per la generalità delle operazioni, noi lo creeremo». Queste parole, di veste troppo diversa da quella consueta nelle scienze matematiche, portano a conchiudere che si può far esistere ciò che non esiste; e quindi a togliere ogni distinzione fra il sì e il no, fra il vero e il falso. Queste difficoltà in cui si sono imbattuti alcuni Autori credo provengano dalla terminologia non precisa, come l'uso non fisso della parola *numero*, che, seguita da aggettivi, acquista un significato più ampio.

Il Formulario ha indirizzo puramente scientifico. I risultati nuovi contenuti in esso non sono già i teoremi, dovuti ad Autori spesso antichissimi, ma lo studio della loro dipendenza; l'affermazione e la prova che una determinata idea si possa, o non si possa definire, che una data proposizione si possa dimostrare o meno, e la raccolta delle varie definizioni, dimostrazioni e teorie possibili, è ciò che contiene di nuovo il F; e alla soluzione di questi problemi è necessaria la Logica matematica quale qui fu costrutta, o uno strumento equivalenteda costruirsi.

I risultati che così si ottengono sono tanto importanti dal lato teorico quanto la scoperta d'ogni altra verità matematica. Essi sono poi direttamente utili alla pratica; perchè è utile, e direi doveroso per gli insegnanti il sapere a che punto si è arrivati con questo strumento analitico, ancorchè non lo si voglia introdurre nella scuola.

Del resto quest'anno mi sono deciso ad introdurre il nuovo F nell'insegnamento superiore, con ottimi risultati. Ho visto gli allievi interessarsi vivamente alla precisione e chiarezza della scrittura ideografica, apprendendola assai più facilmente di quanto mi sarei immaginato. Essi invero per apprendere ciò, hanno dovuto fare molto minor fatica di quella che dovemmo fare noi.

Ma si può tener conto di questi studii anche nell'insegnamento secondario ed elementare, col sopprimere tutte quelle definizioni di numero, e di somma, che sono pure parole; questa soppressione, e semplificazione dell'insegnamento già è stata proposta per ragioni didattiche da alcuni, eseguita da lungo tempo da altri; pur tuttavia ricompaiono in qualche libro. Da alcuni anni meditavo come si potrebbe compilare un libro di Aritmetica elementare, che seguisse fedelmente il mio lavoro del 1889; mi accorsi che nelle linee generali questo libro coincideva coll'*Aritmetica* che il prof. Gerbaldi aveva pubblicato, seguendo essenzialmente ragioni didattiche.

Il Formul. § 2 potrebbe forse essere usato nelle scuole liceali come libro di consultazione, quali tavole di logaritmi. A un professore che ne manifestò desiderio, ottenni che le copie siano cedute al puro prezzo di costo. Credo poi che queste teorie siano già sufficientemente mature perchè si possa fare un trattato d'Aritmetica e d'Algebra ad uso delle scuole secondarie, introducendo e facendo uso costante della Logica matematica.

Se questo formulario di Aritmetica in una prima lettura si presenta come una abbondante raccolta di teoremi, dimostrazioni, teorie e note storiche, ogni lettore più attento vi scorgerà lacune numerose e gravi.

Ad es. mentre di tutti i segni introdotti è data la definizione simbolica, cosa che non era ancor fatta in F_1, le dimostrazioni spesso mancano.

Il colmare queste lacune non spetta a me, editore di questa pubblicazione, assorto in conseguenza in svariati affari, e desideroso di andare avanti, onde raccogliere le numerose teorie cui si è già applicato lo stesso metodo analitico, ed applicarlo ad altre. Nè spetta ai Collaboratori che volonterosi mi aiutano in questa impresa, ma che sono ancora pochi. Spetta invece ai tanti studiosi della Matematica, che trovansi dovunque, e numerosi in Italia, i quali potrebbero portare un utilissimo contributo al perfezionamento del Formulario.

Fra le lacune più appariscenti, menzionerò le dimostrazioni alle teorie del Dvr (P310) e mlt (P320). Queste dimostrazioni sono pregevoli alcune per la loro remota antichità, altre, recenti, per la loro semplicità.

Le definizioni e teoremi sui Dvr e mlt si possono estendere ai numeri razionali, come trovasi ad es, nell'Aritmetica del Bertrand; questa estensione può essere fatta con cura da qualche cooperatore.

La teoria dei Np (P330 e segg.) è un aggruppamento di alcune proposizioni; essa è quasi completamente a scrivere. L'analisi indeterminata manca.

La teoria delle operazioni sui numeri espressi in cifre, esige la costruzione d'un simbolismo appropriato onde potersi scrivere. Questa teoria è importante sia per le applicazioni pratiche, che sotto l'aspetto storico.

Sui numeri cardinali (P210) non sono raccolte che poche proposizioni, mentrechè molte più sono note, anche di quelle che possono stare in F_2 §2, cioè che non dipendono dai numeri irrazionali, non ancora stampati. Oltre alla ricca bibliografia contenuta in F_1VI, si confronti: Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, a. 1898.

Non sono raccolte le P sul grado e divisibilità dei polinomii, sul loro massimo comun divisore, ecc. Qualche cosa è fatta in F_1IX; ma per sviluppare questa teoria occorrono nuove notazioni; e ritengo che per errore esse trovano posto nell'insegnamento secondario.

Un utile modo di collaborare al Formulario si è di confrontarlo con trattati. Si può usare un trattato qualunque, antico o moderno, e sempre un lettore attento scorge, frammezzo a tante questioni che già sono svolte in F, alcune volte anche meglio, delle altre che in F non sono sufficientemente trattate. Il confronto con libri antichi permette spesso di aggiungere o modificare indicazioni storiche. E ritengo utile il confronto con qualunque siasi trattato, poichè, in Italia specialmente, le condizioni librarie sono così poco floride, che se un A. si decide a pubblicare un libro, lo fa per esporre una qualche sua idea originale. Spesso però il libro, migliore degli altri in alcuni punti, ne è inferiore in altri, sia perchè non havvi autore enciclopedico, sia perchè egli si stanca durante il lavoro. Ciò non avviene nel F, che non deve ubbidire ad alcun programma prefisso, ma pubblica le proposizioni man mano che qualcuno ad esse si interessa, le riunisce e le invia per essere stampate.

I varii giornali di Matematica sono pure una miniera di P da aggiungersi al Formulario, perdute frammezzo ad altre che non hanno i pregi della novità e del rigore.

Sono pure utili le pubblicazioni aventi un indirizzo affine a quello del Formulario; quali:

Laska, *Sammlung von Formeln*, *Braunschweig*, a. 1888-9.

Hagen, *Synopsis der höheren Mathematik*, Berlin, a. 1891-4.

Pascal, *Repertorio di Matematiche superiori*, Milano a. 1898,

e l'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Leipzig a. 1888 di cui è ora uscito il 1° fascicolo.

Chiunque s'interessi di Matematiche può collaborare al F, e se prende la cosa pel giusto verso, avrà una buona occasione di istruzione e di vero divertimento. Se si interessa alle pubblicazioni moderne relative ad un ramo della Matematica, può tenere al corrente di queste il capitolo corrispondente del F. Se preferisce i libri antichi, o di altre civiltà, come l'araba, l'egiziana, la cinese, può fornire utili citazioni al Formulario. Se predilige la storia, essa è ancora a scrivere nel F, nella massima parte dei casi. Se ama il proprio insegnamento, e ad esso solo si dedica, può confrontare la sua lezione col corrispondente Formulario; se alcune volte questo contribuirà a perfezionare la sua lezione, spesso essa servirà a perfezionare il F, mettendone in miglior ordine le P, dandone dimostrazioni mancanti, o semplificandole. Chi ama lo studio individuale, senza libri, ha da costrurre intere teorie. Ma il non far uso di libri è cosa pericolosa: credo che dovunque sia possibile il procurarsene; ad ogni modo se qualche lettore trova difficoltà può rivolgersi direttamente a me, che cercherò di facilitargli la consultazione dei libri desiderati. Già la RdM possiede una ricca biblioteca di libri e giornali, che mette ben volontieri a disposizione dei lettori.

Finora il Formulario è proceduto avanti senza alcun regolamento. Ma, col suo progredire, e coll'aumentare dei collaboratori, affine di rendere il F indipendente, per quanto è possibile, da ogni opinione personale, potrà essere utile il seguente:

Saggio di Regolamento pel Formulario.

1. Il Formulario di Matematiche ha per scopo di pubblicare tutte le proposizioni, dimostrazioni e teorie, man mano che esse sono espresse coi simboli ideografici della Logica matematica; come pure le indicazioni storiche relative.
2. Chiunque può proporre nuove proposizioni, sia isolate che formanti una teoria, per farle inserire dapprima nella RdM, e poi nella successiva edizione del Formulario, sempre col nome del proponente, il quale si rende così garante dell'esattezza e dell'importanza della proposizione.
3. Le P a inserirsi nel F debbono essere completamente scritte con simboli ideografici. L'A. può usare quelli prima introdotti; ne può introdurre dei nuovi, per esprimere le idee nuove che si incontrano nella teoria che intrapprende a trattare. In nessun caso può dare ai simboli attuali un significato diverso da quello che ora hanno in F. Chi vuole alterarne il significato, dovrà cambiarne, anche leggermente, la forma.

4. Ogni proposizione riconosciuta inesatta, qualunque sia la causa dell'errore, sarà cancellata; salvo a ristamparla corretta. Una definizione che non soddisfi alle leggi delle definizioni simboliche, o che non sia intelligibile senza l'aiuto del linguaggio comune, o dia luogo ad ambiguità, sarà esclusa dal Formulario, insieme a tutte le P in cui se ne fa uso.
5. La nota storica d'ogni P indica il più antico lavoro in cui chi propone la nota incontrò la P. Una stessa P può portare più indicazioni storiche, corrispondenti a civiltà diverse, ovvero ad A. che successivamente la generalizzarono e la perfezionarono. Altrimenti ogni citazione annulla le posteriori. È bene che le citazioni siano tali da permettere a chiunque di consultare facilmente l'opera originale; i passi citati più importanti si possono anche riportare.
6. Le proposte di modificare la forma dei simboli, o il loro valore, o il loro ordine, pur soddisfacendo alla legge cui quest'ordine deve ubbidire, e tutte quelle proposte che possono contribuire al perfezionamento del F saranno pubblicate nella RdM.
7. Ogni Collaboratore al F avrà l'abbonamento onorario al tomo della RdM e del F in corso di stampa. Inoltre tante copie del fascicolo contenente le P aggiunte, quante sono queste.

G. Peano.

Ideografia delle frazioni irriducibili

Contributo di ALESSANDRO PADOA *all'*F_2 § 2 (*).

Nell'F_2 § 2 nulla è detto relativamente agli R (numeri razionali positivi) irriducibili; mi propongo di colmare questa lacuna.

Se «$a \varepsilon R$», io rappresento rispettivamente con «nt$a$» e «dt$a$» il numeratore ed il denominatore dell'R irriducibile eguale ad a, leggendo rispettivamente le due nuove notazioni «numeratore di a» e «denominatore di a» senz'altro, poichè le parole «numeratore» e «denominatore» non furono adoperate nell'F § 2.

Definisco le nuove notazioni mediante le P

400. $a \ \varepsilon R \ . \supset .$ (**)

·1. $\mathrm{nt}a = \min \{N_1 \frown x \ni [\exists N_1 \frown y \ni (x/y = a)]\}$ Df

·2. $\mathrm{dt}a = \min \{N_1 \frown x \ni [\exists N_1 \frown y \ni (y/x = a)]\}$ Df

cioè:

·1. il «numeratore di a» è il «minimo numero (intero e positivo) x tale che esiste un numero y per cui $x/y = a$»

·2. il «denominatore di a» è il «minimo numero x tale che esiste un numero y per cui $y/x = a$».

Dalle Df enunciate si deducono le P

·3. $\mathrm{nt}a, \mathrm{dt}a \ \varepsilon N_1$ [P ·1·2 . $\supset$. P]

(*) *Formulaire de Mathématiques* - Tome II - § 2: *Arithmétique* par G. Peano - Turin, 1898.

(**) Alle nuove P assegno provvisoriamente numeri progressivi cominciando dal 400.

L'Hp «$a \varepsilon R$» si sottintende premessa a ciascuna P del gruppo 400 così nell'enunciato simbolico come in quello a parole; analogamente per i seguenti gruppi di P.

·4. $\mathrm{dt}a = \mathrm{nt}(/a)$

[$x, y \varepsilon \mathrm{N}_1$. P64·35. P62·23. $\supset$: $y/x = a . = . x/y = /a$ (1)
Hp. P64·31. $(/a)|a$ P·1. (1). P·2. $\supset$. Ths]

·5. $\mathrm{nt}a = \mathrm{dt}(/a)$ [$(/a)|a$ P·4. P65·32. $\supset$. P]

·6. $\mathrm{nt}a = \min\,[\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_1 \times a]$ Df?

[Hp . $\supset$. $\mathrm{N}_1 \times a = x \ni$ [$\exists\, \mathrm{N}_1 \cap y \ni (x = ya)$] (1)
$x, y \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset : x = ya . = . x/y = a$ (2)
(1).(2). P·1. $\supset$. P]

·7. $\mathrm{dt}a = \min[\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_1/a]$ Df?

[Hp . $\supset$. $\mathrm{N}_1/a = x \ni [\exists\, \mathrm{N}_1 \cap y \ni (x = y/a)]$ (1)
$x, y \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset : x = y/a . = . y/x = a$ (2)
(1) . (2) . P2. $\supset$. P]

cioè:

·3. il numeratore ed il denominatore di a sono N_1 (numeri interi positivi)

·4. il denominatore di a è il numeratore del reciproco di a

·5. il numeratore di a è il denominatore del reciproco di a

·6. il numeratore di a è il minimo N_1 multiplo di a

·7. il denominatore di a è il minimo N_1 multiplo del reciproco di a.

Le P·6·7 si potrebbero assumere, invece delle P·1·2, quali Df delle notazioni «nt$a$» e «dt$a$»; da esse si deducono le P

·8. $\mathrm{nt}a = a \times \mathrm{dt}a$

[Hp . P·7 . $\supset$. $a \times \mathrm{dt}a = a \times \min[\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_1/a] = \min\{[\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_1/a] \times a\} =$
$\min[\mathrm{N}_1 \times a \cap (\mathrm{N}_1/a) \times a] = \min[\mathrm{N}_1 \times a \cap \mathrm{N}_1] = \min[\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_1 \times a]$ (1)
(1) . P·6 . $\supset$. P]

·9. $\mathrm{dt}a = \mathrm{nt}a/a$ [$= (\mathrm{nt}a)/a$] [.=. P·8]

·10. $\mathrm{nt}a/\mathrm{dt}a = a$ [.=. P·8]

la cui lettura non presenta alcuna difficoltà.

Le P·5·8 definiscono in due modi diversi la notazione «nt$a$» mediante la notazione «dt$a$»; analogamente le P·4·9 definiscono la notazione «dt$a$» mediante la notazione «nt$a$». Si potrebbe quindi far uso soltanto di una qualunque delle due notazioni «nt$a$» e «dt$a$».

Nella P·9 ho avvertito che «nta/a» significa «(nt$a$)/a» e non «nt(a/a), nel qual caso non avrei ommesso le parentesi.

Dalla P·10 risulta che l'«R irriducibile eguale ad a» è rappresentato con «nt$a$/dt$a$».

Si noti che non si potrebbe rappresentare l'«R irriducibile eguale ad a» anteponendo ad «a» un qualche simbolo funzionale, ad es. «irr», scrivendo ad es. «2/3 = irr(4/6)», invece di «2/3 è l'R irriducibile eguale a 4/6»; e ciò perchè, essendo «4/6 = 2/3», dalla F_2 § 1 P83 [$x = y . y = z . \supset . x = z$] si dedurrebbe «4/6 = irr (4/6)», contraddicendo la supposta Df della notazione «irr a».

Si noti ancora la P

·11. $D(\mathrm{nt}a, \mathrm{dt}a) = 1$

$[x, y, z \varepsilon N_1 . \mathrm{nt}a = xy . \mathrm{dt}a = xz . \supset . (1) . (2)$

$P{\cdot}10 . P62{\cdot}3 . \supset . a = \mathrm{nt}a/\mathrm{dt}a = xy/xz = y/z$ (1)

$P{\cdot}1. P220{\cdot}2'. (1) . \supset . xy \leqq y . \supset . x \leqq 1 . \supset . x = 1$ (2)

$(2) . \supset . N_1 \frown xz [\mathrm{nt}a, \mathrm{dt}a \varepsilon N_1 \times x] = \iota 1$ (3)

$(3) . P220{\cdot}3 . P311{\cdot}2 . \supset . P]$

cioè: il massimo comun divisore del numeratore e del denominatore di a è 1; ovvero [P310·1 *Note*]: il numeratore ed il denominatore di a sono primi tra loro.

Il procedimento pratico per la determinazione di «nt$a$» e «dt$a$» è indicato dalle P401·1·2

401. $a, b \varepsilon N_1 . \supset .$

·1. $\mathrm{nt}(a/b) = a/D(a, b)$

[Hp. $x = \mathrm{nt}(a/b) . y = \mathrm{dt}(a/b) . \supset . (1).(2)$

$P400{\cdot}3{\cdot}10 . \supset . x, y \varepsilon N_1 . x/y = a/b . P62{\cdot}2 . \supset . bx = ay$ (1)

$P311{\cdot}6 . (1). \supset . x \times D(a, b) = D(ax, bx) = D(ax, ay) = a \times D(x, y)$ (2)

$(2)\ 400{\cdot}11 . \supset . x \times D(a, b) = a . \supset . x = a/D(a, b) . \supset . P]$

·2. $\mathrm{dt}(a/b) = b/D(a, b)$

$[(a, b)|(b, a)\ P{\cdot}1 . P62{\cdot}23. P311{\cdot}3. P400{\cdot}4 . \supset . P]$

ovvero: $[P400{\cdot}9. P{\cdot}1. P62{\cdot}24{\cdot}3 . \supset . \mathrm{dt}(a/b) = [a/D(a, b)]/(a/b) = ab/aD(a, b) = b/D(a, b)]$.

cioè:

il numeratore ed il denominatore di a/b si ottengono dividendo rispettivamente a e b per il massimo loro comun divisore.

Dalle P. 1 . 2 si deduce la P

·3. $D(a, b) = 1 . = . a = \mathrm{nt}(a/b) . = . b = \mathrm{dt}(a/b)$ [P·1·2 $\supset$. P]

cioè: dire che a e b sono primi fra loro equivale a dire che a è il numeratore di a/b ed equivale a dire che b è il denominatore di a/b.

Perciò l'affermazione «a/b è un R irriducibile» si può rappresentare indifferentemente con l'una o con l'altra delle formole «$D(a, b) = 1$», «$a = \mathrm{nt}(a/b)$», «$b = \mathrm{dt}(a/b)$».

Si noti che non si potrebbe rappresentare con un nuovo simbolo, ad es. «Ri», la «classe degli R irriducibili», scrivendo ad es. «$2/3 \varepsilon$Ri» invece di «2/3 è un R irriducibile»; e ciò perchè, essendo «$4/6 = 2/3$», dalla F_2 § 1 P84 [$a \varepsilon K . x \varepsilon a . x = y . \supset . y \varepsilon a$] si dedurrebbe «$4/6 \varepsilon$Ri», contraddicendo la supposta Df del simbolo «Ri»( ).

(*) La stessa osservazione trovasi nell'*Introduction au Formulaire de Mathématiques* - Turin, 1894 - pag. 49.

Ad esempio

·4. $a = \mathrm{nt}\,[a/(a+1)]$ [P·3 . P313·3 .⊃. P]

·5. $2a-1 = \mathrm{nt}[(2a-1)/(2a+1)]$ [P·3 . P(*) .⊃. P]

cioè: $a/(a+1)$ e $(2a-1)/(2a+1)$ sono R irriducibili.

Dalle P·1·2 si deducono anche le P

·6. $\mathrm{nt}(a/b) = \mathrm{m}(a, b)/b$ [P323·2 . P62·2 . P·1 .⊃.

·7. $\mathrm{dt}(a/b) = \mathrm{m}(a, b)/a$ [» » P·2 .⊃. P]

cioè: il numeratore ed il denominatore di a/b si ottengono dividendo rispettivamente per b e per a il loro minimo comune multiplo.

Altri esempi d'applicazione delle P400·1·2 sono le P

402·1. $a\varepsilon 2\mathrm{N}_1 . b\varepsilon 2\mathrm{N}_1+1 . a>b .\supset. \mathrm{nt}[(a+b)/(a-b)] = \mathrm{nt}(a/b)+\mathrm{dt}(a/b)$

·2. » $.\supset. \mathrm{dt}[(a+b)/(a-b)] = \mathrm{nt}(a/b)-\mathrm{dt}(a/b)$

·3. $a, b\varepsilon 2\mathrm{N}_1+1 . a>b .\supset. 2\times\mathrm{nt}[(a+b)/(a-b)] = \mathrm{nt}(a/b)+\mathrm{dt}(a/b)$

·4. » $.\supset. 2\times\mathrm{dt}[(a+b)/(a-b)] = \mathrm{nt}(a/b)-\mathrm{dt}(a/b)$

Dem P·1. Hp. P401·1 . P(**) .⊃. $\mathrm{nt}[(a+b)/(a-b)] = (a+b)/\mathrm{D}(a, b)$ (1)
(1) . P62·10 . P401·1·2 .⊃. P

Dem P·2. Hp. P401·2 . P(**) .⊃. $\mathrm{dt}[(a+b)/a-b)] = (a-b)/\mathrm{D}(a, b)$ (1)
(1) . P67·3 . P401·1·2 .⊃. P

Dem P·3. Hp. P401·1 . P(***) .⊃. $\mathrm{nt}[(a+b)/(a-b)] = (a+b)/2\times\mathrm{D}(a, b)$ (1)
(1) . P62.10 . P401·1·2 .⊃. P

Dem P·4. Hp. P401·2 · P(***) .⊃. $\mathrm{dt}[(a+b)/(a-b)] = (a-b)/2\times\mathrm{D}(a, b)$ (1)
(1) . P67·3 . P401·1·2 .⊃. P

Un'applicazione più importante delle P401·1·2 si ha nelle P

403 . $a\varepsilon\mathrm{R} . m\varepsilon\mathrm{N}_1 .\supset.$

·1. $\mathrm{nt}(a^m) = (\mathrm{nt}a)^m$

[Hp. $x = \mathrm{nt}a . y = \mathrm{dt}a .\supset.$ (1) . (2)
P400·10 .⊃. $x/y = a$. P96·5 . .⊃. $x^m/y^m = a^m$ (1)
(1) . P400·3 . P401·1 .⊃. $\mathrm{nt}(a^m) = x^m / \mathrm{D}(x^m, y^m)$. (2)
P400·3·11 . P313·5 . (2) .⊃. P]

(*) La P $a\varepsilon\mathrm{N}_1 .\supset. \mathrm{D}(2a-1, 2a+1) = 1$ si trovava nelle bozze dell'F_2 § 2 ed andò perduta nell'impaginazione.

(**) (***) Si trovavano pure nelle bozze dell'F_2 § 2 ed andarono perdute nell'impaginazione le P

(**) $a\varepsilon 2\mathrm{N}_1 . b\varepsilon 2\mathrm{N}_1+1 . a>b .\supset. \mathrm{D}(a+b, a-b) = \mathrm{D}(a,b)$

(***) $a,b\varepsilon 2\mathrm{N}_1+1 . a>b .\supset. \mathrm{D}(a+b, a-b) = 2\times\mathrm{D}(a,b)$.

·2. $\mathrm{dt}(a^m) = (\mathrm{dt}a)^m$

[Hp. P400·9 .⊃. $\mathrm{dt}(a^m) = [\mathrm{nt}(a^m)]/a^m$. P·1 .⊃.
$(\mathrm{nt}a)^m/a^m$. P96·5 .⊃. $[(\mathrm{nt}a)/a]^m$. P400·9 .⊃. P]

ovvero: [Hp. P400·4 .⊃. $\mathrm{dt}(a^m) = \mathrm{nt}[/(a^m)]$. P96·4 .⊃. $\mathrm{dt}(a^m) =$
$\mathrm{nt}[(/a)^m]$. P·1 .⊃. $\mathrm{dt}(a^m) = [\mathrm{nt}(/a)]^m$. P400·4 .⊃. P]

cioè: il numeratore ed il denominatore della potenza m-esima di a sono le potenze m-esime, rispettivamente, del numeratore e del denominat. di a.

Sono pur degne di nota le P

404 . $a, b \varepsilon \mathrm{R}$.⊃.

·1. $(a+b)\varepsilon \mathrm{N}_1$.⊃. $\mathrm{dt}a = \mathrm{dt}b$

[Hp. $x = \mathrm{nt}a$. $y = \mathrm{dt}a$. $u = \mathrm{nt}b$. $v = \mathrm{dt}b$.⊃. (1)-(5).
P400·10 .⊃. $x/y = a$. $u/v = b$ (1)
(1) . P400·3 . P62·11 .⊃. $a+b = (xv+yu)/yv$ (2)
Hp. (2) .⊃. $(xv+yu)\varepsilon \mathrm{N}_1 yv$ (3)
(3) . P400·3 . P45·3·5 .⊃. $xv\varepsilon \mathrm{N}_1 y$. $yu\varepsilon \mathrm{N}_1 v$ (4)
(4) . P400·3 . P400·11 .⊃. $v\varepsilon \mathrm{N}_1 y$. $y\varepsilon \mathrm{N}_1 v$. P400·3 .⊃. $y = v$ (5)
(5) .⊃. P]

·2. $(a-b)\varepsilon \mathrm{N}_1$.⊃. $\mathrm{dt}a = \mathrm{dt}b$ [(−|+) Dem P·1]

cioè: se la somma o la differenza di due R è un N_1, allora quei due R hanno lo stesso denominatore.

Dalle P404 si deducono le P

405 . $a\varepsilon \mathrm{R}$. $m\varepsilon \mathrm{N}_1$.⊃.

·1. $\mathrm{dt}(m+a) = \mathrm{dt}a$

[Hp .⊃. $(m+a)\varepsilon \mathrm{R}$. $[(m+a)-a]\varepsilon \mathrm{N}_1$ (1)
(1) . P404·2 .⊃. P]

·2. $m>a$.⊃. $\mathrm{dt}(m-a) = \mathrm{dt}a$

[Hp .⊃. $(m-a)\varepsilon \mathrm{R}$. $[(m-a)+a]\varepsilon \mathrm{N}_1$ (1)
(1) . P404·1 .⊃. P].

Agosto, 1898.

ALESSANDRO PADOA.

E. SCHRÖDER. *Ueber Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien.*

Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9 bis 11 August 1897.

« Nella discussione di un Congresso matematico internazionale tema importantissimo è quello della Pasigrafia, ed io sono persuaso che il medesimo più non sparirà dall'ordine del giorno dei futuri congressi. »

Così comincia il discorso detto, al Congresso matematico internazionale tenuto a Zurigo l'anno scorso, dal prof. Schröder, ai cui lavori la logica matematica è debitrice di tanti progressi.

Accennato rapidamente a Descartes e Leibniz, l'A. passa ad esporre i principii di questa scienza.

L'A. introduce 18 segni che, dice, formano il completo sistema di notazione della generale Pasigrafia, e che riduce a cinque categorie. Li paragona con quelli usati nel « Formulario di matematiche » e nei lavori di più Autori italiani; mediante essi definisce le classi, il numero, l'infinito, la funzione, e così via.

Applica la sua Pasigrafia alle relazioni di parentela. Parla degli attuali cultori della logica matematica, del Macfarlane, di origine inglese, del Peirce in America; e soggiunge che fino ora gli scopi della Pasigrafia solo in Italia hanno trovato zelanti promotori. Delle cortesi espressioni rivolte dal nostro A. agli Italiani che coltivano la logica matematica, questi gli saranno certo grati, tantopiù che presso noi questi studii non sono ancora da molte persone apprezzati come si meritano.

Dato così un cenno generico del lavoro dello S., non sarà inutile il ricordare che le opinioni dei varii cultori di questa scienza che ora è in rapida via di formazione, sono ancora spesso diverse.

Dei tomi I e II della grande opera dello Schröder, *Algebra der Logik*, già si è parlato in questo giornale, a. 1891, p. 164-170.

Afferro l'occasione portami dall'A. onde passare all'esame minuto di due soli punti controversi di esso, cioè:

1. La corrispondenza fra i simboli del nostro A., e quelli del Formulario.

2. Le categorie, o idee primitive della logica matematica.

In questo esame confronterò il lavoro dello S. col Formulario F_2 § 1, il quale appunto uscì stampato al Congresso di Zurigo, ove lo Schöder tenne la sua applaudita conferenza.

1.

Il confronto fra i simboli dello Schröder e quelli del Formulario è facilitato dalla corrispondenza seguente che stabilisce lo Schröder:

Schröder	0	1	+	·	Σ	Π	$\overline{a}$	$\leqq$	
Formulario	$\wedge$	$\vee$	∪	∩	∪'	∩'	$-a$	ε	$\supset$

(Mi permetto di dare la forma $\leqq$ ad un segno speciale dello S. che risulta dalla sovrapposizione del segno $=$ e del segno $<$ curvato)

Quindi a primo aspetto parrebbe che si può passare dalle formule scritte col sistema dello S. a quelle del F. sostituendo ai segni dell'una serie i corrispondenti dell'altra; in conseguenza la differenza fra le due teorie sia solo nella forma dei segni; e per adottare l'una forma ovvero l'altra si debbano seguire sole ragioni tipografiche.

La cosa invece è ben diversa.

Invero il nostro A., oltre agli 8 già citati usa ancora i segni 0' 1' ∪ ∪ ⊥ ; e altri. D'altra parte nel Formul. Introduction, tomo I e tomo II si sono studiate successivamente le proprietà espresse da più altri simboli. Così si scorge che in F_2 § 2 (Aritmetica) non si fa uso dei segni di logica $\wedge$ $\vee$ ∪' ∩'; invece si usano i segni Cls, ∋, ∃, ι, ℩, f, ⊥, |, Sim, rcp. Di questi segni non è stabilita la corrispondenza fra le due ideografie.

Ma anche la corrispondenza fra i primi 8 segni è solo approssimata, non esatta. I simboli corrispondenti dello S. e del F. hanno un campo di validità differente, come risulterà dall'esame che segue per alcuni di essi.

Lo S. fa corrispondere al segno $\leq$ i due segni ε e $\supset$ del F. Ora i segni ε e $\supset$ esprimono idee differenti. Ciò si può riconoscere col linguaggio ordinario, poichè altro è affermare

x è un a $\qquad (x \varepsilon a)$

altro è x è una classe contenuta in a $\qquad (x \supset a)$.

Ma il miglior modo di far riconoscere la diversità di due idee si è di far vedere che esse hanno proprietà differenti.

Consideriamo perciò il sillogismo.

(F_2 §1 P25) $\quad a,b \ \varepsilon \ \text{Cls}. \ a \supset b \ . \ x\varepsilon a \ .\supset. \ x\varepsilon b$

« Siano a e b delle classi: se ogni a è b, e se x è un a, allora x è un b. »

Se al posto di $x\varepsilon a$ si legge $x \supset a$, e si aggiunge la condizione $x\varepsilon$ Cls, si ottiene ancora una forma esatta di sillogismo

$$a,b,x \ \varepsilon \ \text{Cls} \ . \ a \supset b \ . \ x \supset a \ .\supset. \ x \supset b$$

che, con uno scambio di lettere, diventa la P26.

Ma si trova invece una forma falsa, se al posto di $a \supset b$ si legge $a\varepsilon b$. Poichè dalle ipotesi $a\varepsilon b \ . \ b\varepsilon c$ non si deduce punto $a\varepsilon c$, come si riconosce da esempi.

L'esempio classico è il sofisma: « Pietro e Paolo erano apostoli; ma gli apostoli erano dodici: dunque Pietro e Paolo erano dodici. »

Nella frase « gli apostoli sono dodici » il verbo « sono » non corrisponde al segno $\supset$ dell'ideografia, cioè esso non vale « (apostoli)$\supset$(12)», ma bensì al segno ε, e si può trasformare in «(apostolo)ε(classe di 12 persone). » Già i Logici hanno distinto i due significati del termine « essere », chiamandoli « sensus compositi » e « sensus divisi », corrispondenti ai segni ε e $\supset$ del Formulario.

Sotto forma più matematica (V. F_0 § 16), dalle ipotesi

« 5 ε (numero primo) »

« (numero primo) ε (classe di infiniti numeri) »,

non dedurrò « 5 è una classe di infiniti numeri ».

Bensì (F_2 § 1 P470), dalle ipotesi $a\varepsilon b \ . \ b\varepsilon c$ si può dedurre $a\varepsilon \cup' c$; ad es. dalle ipotesi

« a è un punto della retta b . b è una retta del fascio c » non dedurrò a è una retta del fascio c », ma bensì « a è un punto del piano del fascio c.

Un'altra formula in cui non è permesso di sostituire al segno ε il segno $\supset$ è la P104

$$a\varepsilon \text{ Cls} .\supset: x\varepsilon = a .=. x = \varepsilon a$$

che esprime la proprietà commutativa dei segni = ed ε.

Invece non sussiste la commutatività dei segni = e $\supset$. Invero « x è un non a » vale evidentemente « x non è un a »; ma « ogni a è un b » non vale « non ogni a è un b ».

Ad es. « i numeri primi non sono tutti dispari », vera perchè $2 \varepsilon \text{Np}$, non equivale alla falsa « i numeri primi sono tutti pari. »

Una terza proprietà che differenzia i segni ε e $\supset$ è espressa dalla P202 $\quad a,b \ \varepsilon \text{ Cls} .\supset: (x\varepsilon a) \cup (x\varepsilon b) .=. x\varepsilon (a \cup b)$ che esprime la proprietà distributiva del segno $x\varepsilon$ rispetto al segno $\cup$. « Dire che x è un a, ovvero dire che x è un b, equivale a dire che x è un a o b. » Essa cessa di sussistere se al posto di ε si legge $\supset$; cioè da $(x \supset a) \cup (x \supset b)$ si deduce $x \supset (a \cup b)$, come afferma la P228, dovuta al Mc Coll; ma non viceversa. Così è vero « ogni numero quadrato è o un multiplo di 3, o un multiplo di 3 più 1 » $N_0^2 \supset 3N_0 \cup (3N_0+1)$; ma è falso che « ogni quadrato sia un multiplo di 3 », o « che ogni quadrato sia un multiplo di 3 più uno. »

Un'altra proprietà che distingue gli stessi segni è la P401. Dal fatto che « x è un a » $(x\varepsilon a)$ si deduce « esistono degli a. » Ma dal fatto che « ogni a è b » $(a \supset b)$, non si può dedurre che esistano dei b, salvo quando ci siamo prima assicurati dell'esistenza degli a (P402).

E così via. Però le idee rappresentate dai segni ε e $\supset$, quantunque distinte, sono legate da più relazioni. Notevole è quella espressa dalla P422.

In conseguenza chi confonde e rappresenta con un sol segno le due idee espresse dai segni ε e $\supset$ del Formulario, non potrà costrurre nè una ideografia, nè un calculus ratiocinator. Non potrà costrurre una ideografia, perchè il lettore vedendo quel segno, non può distinguere se esso abbia il valore dell'ε o del $\supset$. Non può costrurre un algoritmo di ragionamento, perchè le identità del Formulario, tutte vere come sono scritte, diventano inesatte sostituendo l'un segno all'altro; e perciò diventano false, dovendosi dichiarare falsa una proposizione quando patisce un caso d'eccezione.

Lo stesso segno $\leq$ dello S. fra proposizioni, non ha il valore del segno $\supset$ del F. Invero S. pone il segno $\leq$ fra proposizioni categoriche non contenenti lettere variabili, mentrechè in F_2 §1 P5 il segno $\supset$ è introdotto fra proposizioni contenenti lettere variabili, e porta degli indici espressi o sottintesi.

Analogamente si può rilevare la non identità dei segni Σ e Π di S. coi $\cup'$ e $\cap'$ di F, poichè i primi portano indici variabili, ed i secondi no, e così via.

2.

Più importante è il secondo punto, perchè qui ragioneremo su formole.

L'A. parte da 5 « Urbegriffe » o « Categorie » secondo Aristotele e Kant, che indica coi segni

$$\left| \overset{=}{1'} \right| \overset{\cdot}{\Pi} \left| \overset{-}{\ } \right| \cup \left| ; \right|$$

e mediante cui definisce gli altri segni. Un lavoro analogo di riduzione delle idee di logica in primitive e derivate, è fatto in F_2 § 1, ove si danno come idee primitive, spiegate col linguaggio ordinario quelle espresse dalle P1,2,3,4,5,6,7,70,100, mentre di tutte le altre si dà la definizione simbolica.

Ho osservato però (F_1 pag. 50, e F_2 § 1 pag. 28) che questa distinzione delle idee in primitive e derivate ha dell'arbitrario; che in più modi è possibile costituire un sistema di idee primitive, e ne diedi qualche cenno nelle note. Quindi parmi interessante l'esaminare come lo S. abbia trattato la stessa questione.

Lo S. partendo da 5 sole categorie, pare abbia fatto una riduzione ulteriore. Ma, come egli osserva (pag. 149) « le nostre Categorie non fanno ancora l'intero sistema dei segni fondamentali », e menziona fra questi le parentesi. Anche le lettere variabili *a,b,c,....* sono dei segni. Quindi aggiungendo alle 5 categorie le convenzioni sulle parentesi, e sulle lettere variabili, espresse rispettivamente dalle P3 e 4 del F, si hanno già almeno 7 segni che non possono essere definiti. Anche la parola « Definizione » o il simbolo Df. espresso dalla P7 del F, non può essere evidentemente definito.

Inoltre lo S. considera come rappresentanti d'una stessa idea i segni $=$ e 1', come pure i segni . e Π. Ora i segni $=$ e 1' dello S. non sono equivalenti, nel senso cioè che si possano so-

stituire l'uno all'altro in ogni formola, come due forme tipografiche d'uno stesso segno. Quindi finchè l'A. non dà la definizione simbolica del segno 1' mediante l'=, e del segno Π mediante il punto, noi dobbiamo apprendere dalle spiegazioni date col linguaggio ordinario il loro valore.

In conseguenza le idee che non si possono definire simbolicamente, nella teoria dello S. sono in numero non minore di 10.

Sulla scelta e valore di queste idee primitive nulla c'è ad osservare, essendo ogni A. libero di partire dal gruppo che più gli soddisfa. Vediamo invece come lo S. definisca gli altri segni.

La prima definizione dello S. è

$$0 = a \,.\, \overline{a}$$

la quale valendosi della corrispondenza che Egli stabilisce, si trasforma coi simboli del F, in $\Lambda = a - a$, la quale nel F, § 1 è preceduto dall'Hp. $a\varepsilon$ Cls, sicchè ha la forma:

321. $\quad a\varepsilon \text{ Cls} \,.\supset.\, a - a = \Lambda$

« Essendo a una classe, la classe degli a e dei non a è nulla. »

Un'Hp, come la $a\varepsilon$Cls è necessaria. Invero, siccome nel F il segno - accompagna solo una classe, o una proposizione, o una relazione, se nella formula $a - a = \Lambda$ al posto di a metto una cosa che non sia nè una classe, nè una proposizione, nè una relazione, $-a$ non ha alcun significato, e quindi la proposizione $a - a = \Lambda$ è priva di senso.

Nè vale il rispondere che, essendo a un oggetto qualunque, con $-a$ si intende l'insieme degli oggetti diversi da a, classe che in F è indicata con $-\iota a$. Ma chi pone $-a = -\iota a$, ne dedurrà (P106) $a = \iota a$, e dalla P422, $x\varepsilon a \,.=.\, \iota x \supset a$, dedurrò $x\varepsilon a \,.=.\, x \supset a$, identità che non sussiste avendo già fatta rilevare la differenza dei segni ε e $\supset$. Ed essendo a una classe, $-a$ acquista due significati « classe formata dagli individui che non sono a », e « classi diverse dalla classe a. »

Adunque, essendo necessaria l'Hp. $a\varepsilon$Cls, per poter leggere la P321, è necessario che il lettore conosca già il valore dei segni ε, Cls, $\supset$, affine di poter leggere la prima proposizione dello S., sicchè il numero delle idee primitive va rapidamente aumentando.

Ma anche ammesso che si possa trascurare l'Hp. $a \varepsilon \mathrm{Cls}$, la P dello S. non può essere assunta per Df. Invero la logica naturale non può essere soddisfatta dalla Df.

$0 = a - a$ « diciamo nulla l'a non a »

Ed esaminandola coi criterii della logica matematica, se ne vede la ragione in ciò che essa non è omogenea, poichè l'un membro è un simbolo costante 0, e l'altro è una funzione di una variabile a.

La def. che si vuol dare è questa:
« chiamiamo *nulla* il valor costante dell'espressione $a - a$, ove a rappresenta una classe qualunque », e ciò è espresso dalla F_2 §1 P435 $\Lambda = \iota\, x \ni (a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset_a.\, a - a = x)$
la quale ha i caratteri d'una definizione. Ma non avendo lo S. a sua disposizione nessuno dei segni ι $\ni$ ε Cls $\supset$, non è in caso di poterla enunciare.

Così ho numerate 15 idee che si debbono premettere affinchè la prima def. data dallo S. abbia i caratteri d'una definizione simbolica.

G. Peano.

A treatise on Universal Algebra, with applications. - By Alfred North Whitehead, volume I, Cambridge, at the University Press, 1898. - Pag. XXVI + 586.

L'Autore si prefigge in quest'opera lo scopo di trattare, collegandoli in un tutto organico, i vari sistemi di calcolo simbolico.

Il I volume, tratta dell'algebra della logica simbolica, dei principi generali dell'addizione e di una teoria delle moltiplicità di posizione (*positional manifold*), dei principi del calcolo dell'estensione (*Ausdehnungslehre*, di Grassmann); della loro applicazione alla teoria delle forze, alla geometria non Euclidea, ed allo spazio ordinario Euclideo a tre dimensioni.

Pel II volume, non ancor pubblicato, l'A. promette un confronto particolareggiato della struttura simbolica delle varie algebre, ed una trattazione dei quaternioni, delle matrici e della teoria generale delle algebre lineari.

L'A. si è accinto a scrivere quest'opera fino dal 1890; però le sue occupazioni non gli hanno permesso di poter compiere uno studio completo ed esauriente delle molte questioni di logica e di matematica da lui trattate, come Egli afferma (pag. X) e come del resto risulta evidente al lettore.

L'A. si è ispirato ai lavori di Mill, Jevons, Lotze, Bradley sulla logica pura; per la parte matematica l'A. ha seguito Hamilton e sopratutto l'Aus-

dehnungslehre del 1862 di Grassmann; nello sviluppo della geometria non Euclidea l'A. ha consultato i lavori di Cayley, Klein e Clifford; e finalmente nella teoria dei sistemi di forze, R. S. Ball e Lindemann.

Le brevi notizie che precedono sull'opera del Whitehead sono estratte dalla sua prefazione; esse bastano a dare un'idea delle questioni da lui trattate. Aggiungerò soltanto che l'accuratezza e l'eleganza dell'edizione unitamente alla diligenza della correzione tipografica contribuiscono a far risaltare le doti e i pregi del lavoro.

Ci limiteremo in questa recensione ad analizzare il libro secondo del I volume, di 84 pag., poichè esso è dedicato all'algebra della logica simbolica. Ne faremo un minuto esame, confrontandolo col *Formulaire de Mathématiques*, § 1, t. 2, che indicheremo in seguito colla lettera F.

Un cenno storico chiude il libro: in esso l'A. menziona i lavori che hanno scritto su questo soggetto Boole, Venn, Schröder, Mc Coll, e pochi altri. Evidentemente la bibliografia dell'A. non è completa: egli non menziona gli importanti lavori di Leibniz, il quale ha messo le vere basi di questa nuova scienza, quelli di Lambert, e per parlare dei più recenti, i lavori del Frege e quelli di numerosi autori italiani. Così ad esempio, egli attribuisce (pag. 115) al Jevons (a. 1864) l'*addizione logica*, la quale come è attualmente considerata è stata introdotta da Leibniz. (F, P204).

Nel primo capitolo l'A. comincia col dire:

« Let a, b, c,.. be terms representing elements of the algebraic manifold of this algebra. »

Che cosa sia il *manifold* l'A. spiega a pag. 12 in forma poco chiara: però per le proprietà formali che seguono, noi possiamo ritenerlo equivalente all'idea rappresentata dal termine « Classe » del F.

Dopo di ciò introduce subito l'addizione, « l'elemento nullo », la moltiplicazione, l'« universe » ed il « Supplementary Element », che indica rispettivamente con

$$a+b, \quad 0, \quad ab, \quad i, \quad \overline{a}$$

che equivalgono a

$$a \cup b, \quad \Lambda, \quad ab, \quad V, \quad -a, \quad \text{del F},$$

limitatamente alle classi, perchè soltanto nel capitolo V ne dà, come vedremo, l'interpretazione proposizionale.

Le sue proposizioni sono scritte in simboli solo parzialmente dovendo egli indicare col linguaggio ordinario le idee *si deduce* ($\supset$), *e, o, non* ($\cap$, $\cup$, $-$) fra proposizioni, e quello che più importa, il significato delle lettere, che in F è scritto: a,b,c, ε Cls.

Riempiendo per quanto si può queste lacune, possiamo stabilire la corrispondenza tra le proposizioni dell'A. e quelle del F.

Dopo aver enunciato le P205,206,204 del F, l'A.[§23,(3)] dà la definizione dell'« elemento » nullo:

$$a+0 = a$$

Ora questa proposizione coincide colla P440 del F, salvo sempre il significato della lettera a, che l'A esprime col linguaggio ordinario mentre in F essa è scritta completamente in simboli:

$$a \; \varepsilon \; \text{Cls} \; . \supset . \; a \cup \Lambda = a$$

Però questa proposizione esprime una importante proprietà del segno Λ, ma non si può assumere come una definizione simbolica, non avendo la forma:

$$\Lambda = \textit{espressione nota.}$$

Se noi vogliamo scrivere completamente in simboli la definizione del segno Λ, occorre scrivere:

$$\Lambda = \iota \text{ Cls} \cap x\varepsilon(a\varepsilon \text{ Cls} .\supset_a . a \cup x = a) \qquad \text{Df.}$$

Dicesi « nulla » quella Classe x tale che, comunque si prenda la Classe a, sempre si ha: $a \cup x = a$.

Ma l'A. non è in grado di scrivere questa definizione mancando a lui i segni ι, $\imath$, ε, $\ni$, ed inoltre l'uso degli indici al segno $\supset$.

In seguito l'A. enuncia le P216,217,43,14',42,220 del F: dopo di che introduce l'idea dell'« Universe ». La sua definizione, presenta gli stessi inconvenienti di quella dell'elemento nullo.

L'A. dà poi a parole la definizione del supplemento di un elemento a, $(-a)$, espressa completamente in simboli dalla P433 del F.

Le proposizioni ora ricordate sono dimostrate senza alcun cenno di dimostrazione: le successive sono dimostrate servendosi delle formole collegate col linguaggio ordinario, non avendo l'A. un simbolismo atto a ciò.

La sua proposizione I coincide colla P224 del F; però l'A. non l'enuncia in simboli, mancandogli la moltiplicazione logica fra proposizioni (F, P6) e la deduzione (F, P5).

Tralascieremo di ricordare le proposizioni dell'A. espresse completamente col linguaggio ordinario perchè mal si potrebbe affermarne la corrispondenza con quelle del F. Ciò premesso, possiamo affermare che tutte le proposizioni dell'A., già si trovano nel F, eccetto alcune poche che indicheremo.

Si ha quindi la corrispondenza tra il

Cor. II,	Cor. IV,	Prop. II,	Prop. III,	Prop. IV,	Prop. V,	Prop. VI,	dell'A. colle
P113,	106,	222,	439,	342,	274,	251,252	del F.

Il § 24 (pag. 37) del libro è dedicato alla reciprocità fra l'addizione e la moltiplicazione dovuta a Peirce ed a Schröder (F, pag. 42).

La proposizione VII dell'A. (pag. 40) si può enunciare così:

$$a,b,c \ \varepsilon \text{ Cls} .\supset . ab = ac .=. a-b = a-c$$

Non essendo contenuta nel F, sarebbe utile che essa vi fosse inserita.

La prop. VIII è una combinazione delle P52,212,324 del F.

La prop. IX è pure conseguenza immediata della P52 del F.

La prop. X coincide colla P274 del F.

L'A. introduce quindi (pag. 42) il simbolo di Schröder, che corrisponde al simbolo $\supset$) del F, e ne dà le principali proprietà: ecco la corrisp. tra le

Prop. XI,	XII,	XIII,	XIV,	XV,	XX	dell'A, e le
P52,23,219	26	16	34,209	111	230	del F.

Le PXVI—XIX dell'A. sono semplici applicazioni delle leggi di semplificazione e inversione.

Mancano nel F le prop. XXI, XXII: esse si possono scrivere:

$a,b,c,d \varepsilon \text{ Cls} .\supset. \quad c \supset a \cup bc .\supset. c \supset a \cup b$
$(a \cup c)(b \cup d) \supset e .\supset. ab \supset e;$

Ma a causa della loro semplicità (essendo conseguenza immediata delle P24,213, dovute a Leibniz) non sembra utile aggiungerle nel F.

Nel capitolo II (pag. 45) l'A. si occupa dello sviluppo delle funzioni logiche, teoria questa non ancora ridotta da alcuno, completamente in simboli.

Le principali proposizioni di questo capitolo sono già contenute nel F: esse sono le P276,270,272,271,273 e poche altre.

Nel capitolo III l'A. tratta delle « Espressioni esistenziali ».

L'A. vuole scrivere la proposizione $\exists a$ (F,P400). Egli, seguendo il Boole, non rileva che questa proposizione non è altro che la negativa della $a = \Lambda$, e che quindi si esprime per mezzo dei simboli già introdotti, cioè:

$\overline{\ }(a = 0)$ dell'A., e $a - = \Lambda$, del F.

In conseguenza introduce nuovi simboli e li esprime ora con $\varkappa j$, ora con $\varkappa j_1$, ora con lettere umbrali, cioè $\alpha, \beta, \ldots$ significano rispettivamente $\exists a$, $\exists b, \ldots$ e per questa via l'A. si trova alle prese con calcoli estremamente intricati e di nessun vantaggio.

La mancanza di ogni relazione simbolica di questi nuovi segni coi precedenti, ne rende difficile la lettura.

Nel capitolo IV l'A. applica il simbolismo introdotto alla rappresentazione delle forme tradizionali del sillogismo.

Il capitolo V ed ultimo del libro contiene l'interpretazione proposizionale delle formole scritte nei capitoli precedenti. L'A. fa vedere che i segni $\cap$, $\cup$, $-$, V, Λ, $\supset$, si possono pure interpretare quando le lettere $a, b, c, \ldots$ rappresentino delle proposizioni.

Però egli non fa rilevare la relazione che passa tra la doppia interpretazione di questi simboli secondo che sono usati tra classi o tra proposizioni; Manca cioè l'equivalente delle prop. seguenti di F:

$a,b \varepsilon \text{ Cls} .\supset.$

14.	$x \varepsilon ab .=. x \varepsilon a . x \varepsilon b$	Df.
202.	$x \varepsilon a \cup b .=. x \varepsilon a .\cup. x \varepsilon b$	Df.
103.	$x \varepsilon - a .=. -(x \varepsilon a)$	Df.
12.	$a \supset b .=: x \varepsilon a .\supset_x. x \varepsilon b$	Df.
300'.	$a = \Lambda .=: x \varepsilon a .=_x \Lambda$	Df.

le quali legano la doppia interpretazione di questi simboli.

E, quello che più importa, mancano gli indici al segno $\supset$, cosicchè la parola « si deduce » ($\supset$) risulta indeterminata, e nelle applicazioni produce delle ambiguità, che l'A. non trova perchè qui termina la sua trattazione.

Molto importanti sono gli studi geometrici dell'A. contenuti nei libri successivi, in cui sono sviluppate specialmente le idee di Grassmann: e noi li raccomandiamo vivamente ai lettori. Di essi però menzioneremo soltanto le dimostrazioni dei teoremi classici sulle superficie fatte colla teoria dei vettori, avvicinandosi alle idee già esposte dal prof. Burali-Forti nella sua *Introduction à la Géométrie différentielle;* poichè l'indole della Rivista ci obbliga a limitarci agli argomenti concernenti lo sviluppo della logica matematica.

G. Vacca.

P. MANSION — *Mélanges Mathématiques* (1883-1898).
I. Histoire Esquisses biographiques - II. Analyse algébrique. Analyse infinitésimale. Mécanique. Calcul des Probabilités - III. Géométrie euclidienne et non euclidienne.
Paris, Gauthier-Villars, 1898, pag. 158+56.

M. NASSÒ — *Algebra Elementare* ad uso dei licei e degli istituti tecnici. Torino, tip. e libr. Salesiana, 1898, p. 426, L. 3,50.

— *Calcolo Algebrico* ad uso delle scuole normali. Torino, tip. e libr. Salesiana, 1898, p. 107, L. 0,80.

F. OCCELLA — *Questioni di massimo e minimo*. Casale, Cassone, 1898, p. 38, L. 2.

G. OLTRAMARE — *Calcul de généralisation*. Paris, A. Hermann, 1899, pag, VIII+192 in-8° gr.

A. PADOA — *Conférences sur la Logique mathématique*. Université nouvelle de Bruxelles, Institut des Hautes Études. a. 1898, p. 80.

M. A. ROSSOTTI — *Formulario di Matematica elementare* (Manuali Hoepli). Milano, Hoepli, 1899, p. XVI+191, L. 1,50.

M. SASSO — *Elementi di Algebra*, con prefazione storica, vol. 1, pag. LXII+286. Avellino, Pergola, 1897, L. 2,50.

F. SCHUR — *Lehrbuch der Analytischen Geometrie*. Leipzig, Veit, 1898, pag. X+216.

J. THOMAE — *Elementare Theorie der Analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen. Zweite erweiterte und umgearbeitete Auflage*. Halle a S., Nebert, 1898, pag. VIII+150.

G. VIVANTI — *Corso di calcolo infinitesimale*. Messina, Trimarchi, 1899, pag. VIII+576, L. 8.00.

G. VAILATI — *Alcune osservazioni sulle questioni di parole nella storia della scienza e della cultura*. Torino, Bocca, a. 1899, p. 39, L. 1,50.

A. N. WHITEHEAD — *A treatise on Universal Algebra, with applications*, vol. I. Cambridge, 1898, pag. XXVI+586, Sh. 21.

Pubblicazioni della Casa Fratelli BOCCA.

Cassani F. — Corso di matematica complementare: Complementi d'algebra. Torino 1885, in-12° . . . . . L. 3 —
— Elementi di stereometria. Torino 1885, in-12° . . . . » 2 50
Castellano F. — Algebra ad uso dei licei ed istituti. Torino 1891, in-12° . . . . . » 3 —
Cesàro E. — Corso di analisi algebrica con introduzione al calcolo infinitesimale. Torino 1894. in-8° . . . . . » 12 —
— Introduzione alla teoria matematica della elasticità. Torino 1894, in-8° . . . . . » 6 —
Cuffia G. — Aritmetica ragionata e primi elementi d'algebra e geometria. Bergamo 1876, in-16° . . . . . » 2 20
Dáddi G. B. — Geometria pratica: Della combinazione delle osservazioni nel metodo dei minimi quadrati. Torino 1879, in-8° » 3 —
D'Ovidio E. — Geometria analitica. Torino 1896, in-8° . » 10 —
Gatti S. — Elementi di geometria piana con applicazione dell'algebra. Torino 1876, in-8° . . . . . » 3 50
Gerbaldi F. — Primi elementi di aritmetica: 5 fasc. legati » 2 60
Peano G. — Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre* di H. Grassmann. Torino 1888, in-8° . . . . . » 3 50
— Principii di geometria logicamente esposti, 1889, in-8° . » 2 50
— Arithmetices principia nova methodo exposita, 1889, in-8° . » 2 50
— Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, 1887, in-8° » 10 —
— Lezioni di analisi infinitesimale, 2 vol. in-8°, 1893 (esaurito).
— Elementi di calcolo geometrico, in-8° . . . . . » 1 —
— (**Genocchi** A.) — Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale. Torino 1884, in-8° . . . . . » 10 —
Porta F. — Geometria analitica. Torino 1890, in-8° . . » 8 —
— Geometria piana. Torino 1889, in-16° . . . . . » 3 —
— Geometria solida. Torino 1887, in-16° . . . . . » 3 —
— Complementi di matematica, in-16° . . . . . » 3 50
— Goniometria e trigonometria piana. Torino 1885, in-16° . » 2 50
— Trigonometria sferica. Torino 1886, in-16° . . . . . » 2 —
Rivera A. R. — Problemi di geometria e di trigonometria, con le loro soluzioni. Torino 1861, in-8° . . . . . » 5 —
Serret G. A. — Trattato di trigonometria piana e sferica, in-16° » 3 50
Staudt. — Geometria di posizione, in 8° . . . . . » 8 —

Sec 895.50

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES

(RIVISTA DI MATEMATICA)

HARVARD COLLEGE LIBR.
JUN 5 1899
CAMBRIDGE, MASS.

PUBLIÉE PAR

G. PEANO

Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin

TOME VI - N° 4

SOMMAIRE

Note di logica matematica (A. Padoa).

Sui precursori della logica matematica (G. Vacca).

Sui numeri irrazionali (G. Peano).

TURIN

BOCCA FRÈRES

LIBRAIRES

1899

La REVUE DE MATHÉMATIQUES a pour object principal la publication du FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES, recueil de théorèmes, de définitions et de démonstrations, exprimés par les symboles de la logique mathématique.

Prix de l'abonnement au tome VI de la Revue, et au tome II du Formulaire: Italie L. 10; étranger 11 fr.

Rivista di Matematica, tomes I-V, 1891-95, chaque tome 8 fr.

Introduction au Formulaire, 1894, 2 fr.

Formulaire de Mathématiques, t. I, 1895, 6 fr.

NOTE DI LOGICA MATEMATICA

Modificazioni ed aggiunte a F,§1 *proposte da*

Alessandro Padoa

HARVARD COLLEGE LIBRARY
JUN 5 1899
CAMBRIDGE, MASS.

Cap. I. — « è »

In parecchie dimostrazioni di F,§2 (incominciando dalla prima, quella della P003·1) è fatto uso tacito della P

(α). $N_0 \varepsilon$ Cls

che nel §2 non è enunciata e nel quale bisognerebbe inserirla.

Però, nello stato attuale del *Formulaire*, la P (α) (la quale costituisce l'anello di congiunzione tra il §1, che è una teoria delle « Cls » (*), ed il §2, che incomincia con la teoria degli « N_0 ») non può essere dimostrata; non può, cioè, essere dedotta da altre P del §2 mediante procedimenti logici espressi da P del §1: e ciò perchè in nessuna di tali P la tesi è del tipo « $a \varepsilon$ Cls ».

Indipendentemente da ciò, ponendo a riscontro la §1P

2. Soit a une Cls; $x \varepsilon a$ indique la proposition « x est un a » con la prima P simbolica del §1, cioè con la P

11. $a \varepsilon \text{Cls} . \supset : x, y \varepsilon a . =. x \varepsilon a . y \varepsilon a$ Df

risulta che l'ipotesi « $a \varepsilon$ Cls » di questa P è priva di significato, se non si ammette prima la P

(β). Cls ε Cls

che nel §1 non è enunciata e nel quale bisognerebbe inserirla.

Però, nello stato attuale del *Formulaire*, la P (β) non può essere dimostrata; e la ragione di ciò è la medesima di quella enunciata a proposito della P (α).

Ma v'ha di più: a cagione della §1P2, la P (β) presuppone sè

(*) Nel §2 al simbolo « K » del §1 fu sostituito, con egual significato, il simbolo « Cls ».

stessa: essa non ha significato se, prima di leggerla, non la si è ammessa.

Inoltre, sempre a cagione della §1P2, la prima P simbolica del §2, cioè la P

002·1. $0 \varepsilon N_0$ Pp

è priva di significato, se prima non si ammette la P (a) della quale ho già parlato.

Il desiderio di eliminare questi lievi difetti del *Formulaire* m'ha suggerito una modificazione, ch'era già stata considerata possibile nelle *Notes* al §1 [pag. 22, linee 10-13] e che, per mio conto, ho già adottata nelle « *Conférences sur la Logique Mathématique* » (*). Se la mia proposta venisse accettata, gl'inconvenienti additati sparirebbero, nuovi, parmi, non sorgerebbero, e gli enunciati di parecchie P acquisterebbero in concisione; vantaggio non disprezzabile questo, ma secondario dal mio punto di vista attuale: indipendentemente da esso convien giudicare l'opportunità di adottare la modificazione di cui mi occupo in questo CAP.

*
* *

La modificazione è questa: nel §1, alla citata P2 si sostituisca la P

(1). « x è a » signifie « x est un a »

inoltre, si inserisca la P

(2). x è a .⊃. a è Cls Pp

Esaminiamone le conseguenze.

Anzitutto, per la (1), la notazione « x è a » ha significato ancorchè non preceduta dalla « a è Cls », e questa ha significato ancorchè non sia stata prima enunciata la P

(β'). Cls è Cls.

(*) Tenute, dal 19 ottobre al 23 novembre 1898, nell'*Université Nouvelle* di Bruxelles.

In particolare, sostituendo alla citata §2P002·1 la P

(3). 0 è N_0 Pp

questa ha significato anche se non si enuncia la P

(α'). N_0 è Cls.

Ma la (2) permette di inserire nel §2 la P (α'), dandone la dimostrazione « [(3).§1P (2) .⊃. P] ».

Dopo ciò, la P (β') potrebb'esser dimostrata così: « [§2 P (α'). §1 P (2) .⊃. P] ». Però questa dimostrazione, benchè rigorosa, non mi soddisfa: perchè non mi parrebbe opportuno inserire la P (β') nel §1, ricorrendo per la sua dimostrazione ad una P del §2, nè inserirla nel §2, dove sarebbe fuori posto. Eppure, anche accettando la modificazione da me proposta, la P (β') non potrebb'essere dimostrata nel §1, perchè esso non contiene alcuna P del tipo « x è a », qual'è la P (3).

Ma a ciò si rimedia facilmente, inserendo nel §1 le P

(4). x è (ιx) [($x|y$) P421 .⊃. P=P81]
(5). (ιx) è Cls [P (4) . P (2) .⊃. P]

l'ultima delle quali permette di dimostrare la P (β'), senza uscire dal §1, così: « [P (5) . P (2) .⊃. P] ».

E così mi pare d'aver dimostrato che mediante la modificazione proposta (*) gli inconvenienti additati risulterebbero eliminati.

*
* *

Per convincersi che, accettando la modificazione proposta, inconvenienti nuovi non sorgerebbero, conviene esaminare tutte le variazioni che produrrebbe negli enunciati delle attuali P del §1.

Per comodità del lettore ne do qui l'elenco completo, ripetendo le P enunciate e tralasciando tutte le P del §1 nelle quali la variazione si ridurrebbe alla sostituzione tipografica dell'« è » all' « ε ». A ciascuna P è premesso un numero d'ordine pro-

(*) La quale è completamente espressa nella sostituzione della P (1) alla §1P2 e nell'inserzione della P (2); è chiaro che l'inserzione nel §1 delle P (4) e (5) è conseguenza, non parte, di tale modificazione.

gressivo; alcune P sono seguite dal numero d'ordine (entro due graffe «{ }») delle P del §1 cui dovrebbero sostituirsi (qualora si ritenesse opportuno, come a me semba, abolire l' «ε» in una eventuale ristampa del *Formulaire* (*)); le P in cui tale indicazione manca, sono aggiunte (**).

·1. «x è a» signifie «x est un a» {2}
·2. x, y è a .=. x è a . y è a Df {11}
·3. x, y è Cls .=. x è Cls . y è Cls [=(Cls|a) p2]
·4. x è a .⊃. a è Cls Pp
·5. x è a . b è Cls . $a \supset b$.⊃. x è b Pp {25}
·6. a, b è Cls . ⊃ : x è ab .=. x è (ab) Df
·7. a, b è Cls . x è ab .=. x è a . x è b {54}
·8. x è a .=: a è Cls: b è Cls . $a \supset b$.$\supset_b$. x è b {61}
·9. $x = y$.=: x è a . $\supset_a$. y è a Df {80}
·10. x è a . $x = y$.⊃. y è a {84}
·11. $\breve{x}$ è a .=. $\breve{}(x$ è $a)$ Df {101}
·12. x è $\breve{}a$.=. x è $(\breve{}a)$ Df
·13. x è $\breve{}a$.⊃. a è Cls
[Hp . p12 . p4 .⊃. $(\breve{}a)$ è Cls . P105 .⊃. $[\breve{}(\breve{}a)]$ è Cls . P106 . p10 .⊃. Ts]
·14. x è $\breve{}a$.=. a è Cls . x $\breve{}$è a {104}
[p13 . P52 .⊃: x è $\breve{}a$.=. a è Cls . x è $\breve{}a$ (1)
P103 .⊃: a è Cls . x è $\breve{}a$.=. a è Cls . x $\breve{}$è a (2)
(1). (2). P83 .⊃. P]
·15. x è a . x è $\breve{}c$. b è Cls . $ab \supset c$.⊃. x è $\breve{}b$ Pp {107}
·16. x è $\breve{}b$. a è Cls . $a \supset b$.⊃. x è $\breve{}a$ {110}
·17. a, b è Cls .⊃: x è $a \cup b$.=. x è $(a \cup b)$ Df
·18. x è a . x è $\breve{}b$. c è Cls . $a \supset b \cup c$.⊃. x è c {258}
·19. y è ιx .=. y è (ιx) Df
·20. x è ιx [P421 .⊃. p=P81]
·21. (ιx) è Cls [p20 . 19 . 4 .⊃. p]
·22. Cls è Cls [p21 . 4 .⊃. p]

(*) Intendo parlare non del *segno* «ε» ma dell'*idea* ch'esso attualmente rappresenta nel §1; quanto al segno, si potrebbe adottare l' «ε» invece dell' «è» col significato che qui gli attribuisco. Così appunto feci nelle già ricordate mie *Conférences*; e così non ho fatto in questo articolo per evitare equivoci e per rispettare l'art. 3 del *Saggio di Regolamento del Formulario* (Rivista di Matematica, Tomo VI, pag. 88).

(**) Nelle citazioni seguenti il numero d'ordine è preceduto da un «p» o da un «P», secondo che si tratta di proposizioni di questo scritto o del F, §1.

·23. x è a .⊃. ∃ a {401}
·24. x è a .=. a è Cls . $\iota x \supset a$ {422}
·25. x,y è a .=. a è Cls . $\iota x \cup \iota y \supset a$ {423}
·26. x è a .=. a è Cls . ∃ $(\iota x) \cap a$ {424}
·27. x è $-a$.=. a è Cls . $(\iota x) \cap a = \Lambda$ {425}
·28. x è a . b è Cls . u è $a \jmath b$. $x = y$.⊃. $xu = yu$ {503}
·28′. ——————————.⊃. xu è b {504}

Le p1 e 4 sono le p(1) e (2) di cui ho già parlato.

Nella P11 ho soppressa l'Hp «a è Cls», divenuta inutile, e ne è risultata la p2, della quale la p3 è un caso particolare.

Nell'Hp della P25 ho soppresso il fattore «a è Cls», divenuto inutile, ed ho diversamente ordinato i fattori rimasti; ne è risultata la p5.

Le p6 . 12 . 17 . 19 esprimono altrettante convenzioni sulla punteggiatura, di cui è fatto uso tacito nel §1, e che mi sembra opportuno enunciare, com'è stato fatto per molte altre.

La P54 ha per Hp «b,c è Cls» (vedi l'Hp che precede la P28); ora, per la p4, tale Hp è implicita nel secondo membro della Ts; non però nel primo, potendo «bc» essere una Cls, senza che lo siano b e c (si consideri, ad es., l' «$N_0 +$» del §2). Ciò spiega perchè alla P54 sostituirei la p7 (mentre analoga trasformazione non sarebbe possibile per la P202).

L'Hp «a è Cls» della P61, per la p4, è implicita nel primo membro, soltanto, della Ts: ecco perchè alla P61 sostituirei la p8; analoghe sono le trasformazioni delle P422 . 423 . 424 nelle p24 . 25 . 26.

Le trasformazioni delle P80 . 84 nelle p9 . 10 non abbisognano di commenti.

L'Hp «a è Cls» della P101 non mi par necessaria; ad essa sostituisco la p11.

La p13, essendo una conseguenza della p4, ma [illegible]ava necessariamente nel §1; mediante la p13 ho dimostrato la p14 che so[illegible]irei alla P104. Infatti, soppresso il terzo membro della Ts della P104, [illegible]tile dopo la p11, l'Hp «a è Cls», per la p13, è implicita nel primo membro, soltanto, della Ts; perciò convien trasformarla analogamente alla P61.

Per comprendere la semplificazione introdotta sostituendo le p15 . 16 . 18 alle P107 . 110 . 258, si badi che l'Hp sottintesa della P110 è «a,b è Cls» e quella di ciascuna delle P107 . 258 è «a,b,c è Cls»; la trasformazione è ottenuta mediante la p14.

Le p20-22 sono le p (4) (5) (β') di cui ho già parlato; la p20 differisce dalla p (4) per la soppressione delle parentesi, consentita dalla p19.

La p23 differisce dalla P401 per la soppressione dell'Hp «a è Cls», inutile per la p4.

Distribuendo l'Hp «a è Cls» della P425 ai due membri della Ts, essa, per la p14, diviene la p27.

Dalle P503 . 504 si ottengono le p28 . 28′ sopprimendo nelle Hp la condizione «a è Cls», divenuta superflua a cagione della p4, ed anche, nell'Hp della P503, la condizione «$y \varepsilon a$» inutile per la p10.

*
* *

Dalla p10 si deducono, come casi particolari, le P

·29. x è Cls . $x=y$.⊃. y è Cls [=(Cls|a)p10]
·30. y è Cls . $x=y$.⊃. x è Cls [P82 . p29 .⊃. p]

dalle quali risulta che, quando « $x=y$ », la condizione « x,y è Cls » è sufficientemente espressa da una soltanto delle notazioni « x è Cls », « y è Cls ».

Questo fatto consente di abbreviare l'enunciato di parecchie P del §1 (*); ad es., a cagione della p29, le §1P85 . 210 . 211 si possono riscrivere così:

·31. a è Cls . $a=b$.⊃. $a \supset b$ {85}
·32. a,c è Cls . $a=b$.⊃. $a \cup c = b \cup c$ {210}
·33. ———————— . $c=d$.⊃. $a \cup c = b \cup d$ {211}

Si ha pure

·34. a è Cls . $-a = -b$.⊃. b è Cls
[Hp . P105 . p29 .⊃. $-b$ è Cls . P105 . 106 . p29 .⊃. Ts]

che, insieme alla p29, consente, ad es., di abbreviare così l'enunciato della P113

·35. a è Cls .⊃: $a=b$.=. $-a=-b$ {113}

*
* *

Quando, a proposito della p (β'), dissi che nessuna P del §1 è del tipo « x è a », non tenni conto deliberatamente della P436 « $\Lambda \varepsilon$Cls », perchè nel §1 quella P non è dimostrabile; e la ragione di ciò è ancor quella enunciata a proposito della p (a).

Perciò, volendo dimostrare la p22, anzichè alla P436, ricorsi alla p21; ed ora, giovandomi delle p21.29, oltre ad alcune P del §1, dimostro la p

(γ). Λ è Cls {=P436}
[p21 . P105 .⊃. $-(\iota x)$ è Cls . P22 . P103′ .⊃. $(\iota x)-(\iota x)$ è Cls (1)
p21 . P321 .⊃. $(\iota x)-(\iota x) = \Lambda$ (2)
(1) . (2) . p29 .⊃. p]

(*) Per comprendere tali abbreviazioni, qui e nel seguito, bisogna imaginar sempre anteposta a ciascuna P l'Hp del gruppo di P cui appartiene.

da cui per la p30,

(δ). $a = \Lambda \;.\supset.\; a$ è Cls [p (γ) . Hp . p30 .⊃. Ts]

Però mi sembra che, senz'alcun inconveniente, si possa implicitamente ammettere la p (δ) nell'atto in cui si definisce la notazione « $a = \Lambda$ », sostituendo alla P

300. a è Cls $.\supset:.\; a = \Lambda \;.=:\; b$ è Cls $.\supset_b.\; a \supset b$ Df

la p

·36. $a = \Lambda \;.=:\; a$ è Cls : b è Cls $.\supset_b.\; a \supset b$ Df {300}

da cui, immediatamente,

·37. $a = \Lambda \;.\supset.\; a$ è Cls [p36 .⊃. p]

Così facendo, si può ricorrere alla p37 per abbreviare l'enunciato di parecchie P del §1 successive alla P300; mentre la p (δ), essendo stata dimostrata mediante la p (γ) e questa mediante la P321, non si potrebbe legittimamente applicare che a P del §1 successive alla P321.

Ecco l'elenco completo delle P del §1 che si possono abbreviare mediante la p37 (*).

·38. $a = \Lambda \;.\; b$ è Cls $.\supset.\; a \supset b$ {301}
·39. —— . $b = \Lambda \;.\supset.\; a = b$ {302}
·40. —— . b è Cls . $b \supset a \;.\supset.\; b = \Lambda$ {303}
·41. —— . $a = b \;.\supset.\; b = \Lambda$ {304}
·42. —— . b è Cls $.\supset.\; ab = \Lambda$ {305}
·43. —— . x è a . $= \Lambda$ {308}
·44. —— . b è Cls $.\supset.\; a \cup b = b$ {341}
·45. a, b è Cls . $a \cup b = \Lambda \;.=.\; a = \Lambda \;.\; b = \Lambda$ {342}
·46. $a = \Lambda \;.=.\; a$ è Cls . $-\Box a$ {414}
·47. a è Cls . $a \supset \Lambda \;.=.\; a = \Lambda$ {438}

*
* *

Per ultimo, accenno ad alcune semplificazioni prodotte in F₂§2 dalla modificazione proposta in questo CAP.

(*) Vedi nota precedente.

A cagione della p4 si può sopprimere la condizione « s è Cls »:
nell'Hp di ciascuna delle P002·5 . 003·7·8 . 039·3,
nell'Hp delle P015 . 016, mettendo come primo fattore « x è s »,
nell'Hp delle P003·10·11, trasportandola nel secondo membro della Ts.

Alla P003·1 si può premettere la p (a'), cioè

003·0. N_0 è Cls [P2·1 . p4 .⊃. P]

A cagione della p10. si può sopprimere la condizione « b è N_0 » nell'Hp della P003·2. Ecc.

Cap. II. — « ϱ »

La notazione « x ϱ » (*) — che può esser letta « la classe degli x che soddisfanno alla condizione » ovvero, più brevemente, « gli x tali che » — si trova per la prima volta nella P

13. a è Cls .⊃. x ϱ (x è a) $= a$ Df

la quale definisce, non la notazione « x ϱ », ma la « x ϱ(x è a), dove « a è Cls ».

Pertanto, nell'uso della notazione « x ϱ » bisogna avvertire — se non si vogliono scrivere proposizioni prive di significato — di premetterla soltanto a notazioni del tipo « x è a », dove « a è Cls » (**), ovvero a notazioni che *già* furon ridotte a quel tipo.

*
* *

Ora, nella P

14. a,b è Cls .⊃. $a \frown b = x$ ϱ(x è a . x è b) Df

(*) Per uniformità di scrittura adopero la notazione « x ϱ » invece della « x ε » usata nel F_2§1 o della « x ∈ » usata nel F_2§2; il significato di queste tre notazioni è il medesimo.

(**) Per la p4, la condizione « a è Cls » è implicita nella notazione « x è a », quando questa rappresenta una P isolata od affermata simultaneamente con altre, non però nel caso attuale. In altre parole, senza mutare il significato della notazione « x ϱ », non si potrebbe sopprimere l'Hp della P13, perchè allora, ad es., si avrebbe « x ϱ(x è 1) $=1$ », mentre « (ι1) è Cls » e non « 1 è Cls ».

io noto che la riducibilità di «x è a . x è b» al tipo richiesto risulta più tardi dalle P

14'. a,b è Cls .⊃. $ab = a \frown b$ Df
22. ———— .⊃. ab è Cls Pp
54. ———— .⊃: x è ab .=. x è a . x è b

cui conviene aggiungere la p6.

Per eliminare questo inconveniente assumerei, invece, quale Df la p

·48. x è$(a \frown b)$.=. x è a . x è b Df

la quale non mi sembra abbisognare d'Hp (*).

Assunta poi quale Pp (**) la p

·49. a,b è Cls .⊃. $(a \frown b)$ è Cls Pp

risulta dimostrabile la P14 ovvero, in attesa della P82, la p

·50. a,b è Cls .⊃. $x \ni (x$ è a . x è $b) = a \frown b$
[Hp . p49 . P13 .⊃. $x \ni [x$ è$(a \frown b)] = a \frown b$. p48 .⊃. Ts]

Dopo ciò, per comodità di scrittura, enuncerei le convenzioni espresse dalla P14' e dalla p6.

*
* *

Analogo difetto presenta la P

103. a è Cls .⊃. $-a = x \ni (x-$ è $a)$ Df

perchè la riducibilità di «$x-$ è a» al tipo richiesto risulta più tardi dalle P

104. a è Cls .⊃: x è $-a$.=. $x-$ è a
105. ———— .⊃. $-a$ è Cls Pp

cui conviene aggiungere la p12.

(*) Per la p4, l'Hp «a,b è Cls» è implicita nel 2° membro della p48; inoltre, finchè ad «$a \frown b$» non si sostituisce «ab», la notazione «x è$(a \frown b)$» è usata nel F_2 sol quando «a,b è Cls» [Cfr. con l'osservazione fatta a proposito della p7].

(**) Dalla p48 si potrebbe dedurre la p
x è a . x è b .⊃. $(a \frown b)$ è Cls [p48 . 4 .⊃. p]
ma da questa non si potrebbe dedurre la p49, nulla potendosi concludere nel caso in cui «$a \frown b$» fosse una classe nulla.

Mi pare che questo difetto riuscirebbe eliminato assumendo, invece, quale Df la p

·51 a è Cls $.\supset:$ x è$(-a)$ $.=.$ $x-$ è a Df

conservando quale Pp la P105 e dimostrando così la P103:

[Hp . P105 . P13 $.\supset.$ x ϱ$[x$ è$(-a)] = -a$. p51 . P82 $.\supset.$ Ts]

Dopo ciò, per comodità di scrittura, enuncerei la convenzione espressa dalla p12.

*
* *

Analogo inconveniente presenta pure la P

420. $\iota x = y$ ϱ$(y = x)$ Df

perchè la riducibilità di « $y = x$ » al tipo considerato risulta più tardi dalla P

421. y è ιx $.=.$ $y = x$

cui conviene aggiungere le p19 . 21.

Per eliminare questo inconveniente assumerei, invece, quale Df la p

·52. y è(ιx) $.=.$ $y = x$ Df

da cui si deduce la p

·53. x è(ιx) [p52 $.\supset.$ p = P81]

(che differisce dalla p20 soltanto per le parentesi racchiudenti l' « ιx ») e la p

·21. (ιx) è Cls [p53 . 4 $.\supset.$ p]

La P420 si potrebbe allora dimostrare così:

[p21 . P13 $.\supset$ y ϱ$[y$ è$(\iota x)] = \iota x$. p52 . P82 $.\supset.$ P]

Dopo ciò, per comodità di scrittura, enuncerei la convenzione espressa dalla p19.

*
* *

Analogo difetto presenta anche la P

430. u è Cls $.\supset.$ Cls$'u$ = Cls$\frown x$ ϱ$(x \supset u)$ Df

perchè la riducibilità di « $x \supset u$ » al tipo richiesto è accennata

più tardi incompletamente, come risulta da ciò che segue, mediante la P

453. a,b è Cls $.\supset$: $b \supset a$ $.=.$ b è Cls'a

Io assumerei invece quale Df la P

451. a è Cls $.\supset$: x è(Cls'a) $.=.$ x è Cls $.$ $x \supset a$ Df

e dimostrerei poi le p

·54. a è Cls $.\supset.$ (Cls'a) è Cls
[Hp . P21 . P451 $.\supset.$ a è(Cls'a) . p4 $.\supset.$ Ts]

·55. a è Cls $.\supset.$ Cls'$a = x$ ϱ(x è Cls $.$ $x \supset a$)
[Hp . p54 . P13 $.\supset.$ x ϱ[x è (Cls'a)] = Cls'a . P451 . P82 $.\supset.$ Ts]

***

Ho esaminato così tutte le Df del F_2§1 in cui è fatto uso della notazione « x ϱ » tranne le P461 e 462, delle quali non mi occupo perchè i simboli « ∪' » e « ∩' » in esse definiti non furono adoperati nel F_2§2.

Vediamo piuttosto l'uso fatto della notazione « x ϱ » in alcune dimostrazioni del F_2§1.

La si trova per la prima volta nella Dem P

82. $x = y$ $.\supset.$ $y = x$
[P81 $.\supset.$ xè[z ϱ($z = x$)] . Hp $.\supset.$ y è[z ϱ($z = x$)] $.\supset.$ Ts]

Ma poichè la P82 precede la teoria degli « ι » (che incomincia con la P420), la riducibilità di « $z = x$ » al tipo richiesto perchè abbia significato « z ϱ($z = x$) » non può nemmeno essere sospettata dal lettore del F_2§1; e perciò quella Dem riesce inesplicabile.

A me parrebbe vantaggioso, per non dir necessario, ordinare le proposizioni nel modo seguente: anzitutto, le p9 . 10, poi la P

81. $x = x$ [p9 $.\supset$: x è a $.\supset_a.$ x è a $.=.$ p]

e le p52 . 53; enuncerei allora la P82 dimostrandola così:

[p53 . Hp . p10 $.\supset.$ y è(ιx) . p52 $.\supset.$ Ts] (*)

(*) Della P

83. $x = y$. $y = z$ $.\supset.$ $x = z$ [Hp $.\supset$: x è a $.\supset.$ y è a . z è a : $\supset.$ Ts]

si potrebbe anche dare questa dimostrazione

[Hp . P82 . p52 $.\supset.$ y è(ιx) . $y = z$. p10 $.\supset.$ z è(ιx) . p52 . P82 $.\supset.$ Ts]

Poi la notazione stessa riappare nella dimostrazione della P

85. a,b è Cls . $a=b$.⊃. $a \supset b$

[Hp . x è a .⊃. a è[z ϱ(xèz)] . P80 .⊃. b è[z ϱ(x è z)] .⊃. x è b (1)
Hp . (1) . Export .⊃: x è a .⊃$_x$. x è b : ⊃ . Ts]

Ma perchè avesse significato « z ϱ(x è z) », occorrerebbe che « x è z » fosse riducibile al tipo « z è u », dove « u è Cls »; le notazioni di cui è fatto uso in F_2§1 non mi pare consentano tale riduzione (*). Convien dunque rinunciare al proposito di dedurre la P85 dalla P80, accontentandosi di ricavarla dalla P16.

Lasciando da parte le dimostrazioni delle P463 . 464, relative ai simboli « ∪' » e « ∩' » non adoperati nel F_2§2, la notazione « x ϱ » non si ritrova più che in ciascuna delle due dimostrazioni della P

503. a,b è Cls . u è aʒb . x,y è a . $x=y$.⊃. $xu=yu$ (**)

facendone uso che, per ragioni analoghe a quelle esposte a proposito della P85, non mi sembra legittimo.

Per poter dimostrare soddisfacentemente la P503, di cui è pur fatto uso nel F_2§2 (***), ritengo necessario definire la notazione « aʒb » altrimenti che con la P500. A questo partito conviene attenersi anche per altre più forti ragioni; ma di ciò mi occuperò in altro Cap., in cui proporrò un rifacimento di quello del F_2§1 intitolato « [ʒ f] ».

Frattanto, un'osservazione mi sembra opportuna: le critiche al F_2§1, svolte in questo Cap., valgono in quanto non si voglia estendere l'uso della notazione « x ϱ » oltre il caso previsto dalla P13; esse cadrebbero, invece, se si convenisse di usarla, ogniqual-

---

(*) Bisognerebbe introdurre, definendolo, un simbolo che rappresentasse l'idea « classe cui appartiene »; attribuendo per un momento tale significato al simbolo « A » si avrebbe

(ε) y è(Ax) .=. x è y Df

e la (1) della dimostrazione della P85 diverrebbe

x è a . p(ε) .⊃. a è(Ax) . Hp . p10 .⊃. b è(Ax) . p(ε) .⊃. x è b

Ma, per questo caso soltanto, non mette il conto di introdurre una nuova notazione, sia pur definita.

(**) Il cui enunciato ho semplificato nella p28.

(***) Vedi F_2§2 Dem1 P003·2. Nè, per ragioni analoghe a quelle esposte, in sua vece potrebbe accettarsi la Dem2.

volta l'occasione se ne presentasse, ad esprimere l'idea « la classe degli x che soddisfanno alla condizione ». Ma allora essa dovrebb'essere annoverata tra le idee *primitive*; è dunque preferibile introdurre nel F_2§1 le modificazioni da me proposte.

Cap. III. — « ι Elm η »

Anzitutto, dimostro alcune altre proprietà del simbolo « ι » che nel F non sono enunciate e di cui faccio uso in questo scritto.

·56. $\exists(\iota x)$ [p53 . 23 . $\supset$ p]

·57. a è Cls $.\supset\therefore a \supset \iota x .=: y$ è $a .\supset_y . y=x$
[Hp . p21 . P12 . p52 . $\supset$. p]

·58. $a = \iota x .=: x$ è $a : y$ è $a .\supset_y . y=x$
[p21 . $a = \iota x$. p30 $.\supset.$ a è Cls (1)
x è $a : y$ è $a .\supset_y . y=x :\supset.$ x è a . p4 $:\supset.$ a è Cls (2)
a è Cls . p57 . P422 $.\supset.$ p (3)
(1) . (2) . (3) $.\supset.$ p]

·59. $\iota y = \iota x . = . y = x$
[$(\iota y|a)$ p58 . $= \therefore \iota y = \iota x . = : x$ è $(\iota y) : y$ è $(\iota y) .\supset_y . y = x$ (1)
(1) . p52 . 53 . P82 . $\supset$. p]

*
* *

Mediante la p

·60. a è Elm $.=:$ a è Cls . $\exists a : x,y$ è $a .\supset_{x,y}. x=y$ Df

definisco la notazione « a è Elm » in cui appare il nuovo simbolo « Elm », che potrà essere letto « elemento ».

Il sig. C. Burali-Forti, nella sua *Nota* intitotata *Le classi finite* (*), introdusse il simbolo « Un » dandone la Df (§1P13).

$$\mathrm{Un} = \mathrm{K}\text{-}\iota \wedge \frown \overline{x\varepsilon} \mid y\varepsilon x .\supset_y . \iota y = x \mid \qquad \mathrm{Df}$$

dalla quale risulta che l'idea « Un » non dipende affatto dal concetto di numero. A togliere ogni equivoco in proposito, adopero il simbolo « Elm » invece dell' « Un », con lo stesso significato.

Dalla p60 deduco alcune proprietà del simbolo « Elm », delle

(*) *Acc. R. delle Scienze* di Torino, 1896.

quali mi varrò tosto ad abbreviare l'enunciato di qualche P del F; tali abbreviazioni giustificano l'introduzione del nuovo simbolo.

·61. (ιx) è Elm

[p2 . 52 .⊃: y,z è(ιx) .=. $y=x$. $z=x$ (1)
(1) . P82 . 83 .⊃: ——— .⊃$_{y,z}$. $y=z$ (2)
p21 . 56 . (2) .⊃. p]

·62. x è a .⊃.·. a è Elm .=: y è a .⊃$_y$. $y=x$

[Hp . p4 . 23 .⊃. a è Cls . ∃a (1)
Hp . (1) . p60 .⊃.·. a è Elm .=: x,y è a .⊃$_{x,y}$. $x=y$ (2)
Hp . (2) . P82 .⊃. p]

·63. $a=\iota x$.=. x è a . a è Elm [p58 . 62 .⊃. p]

*
* *

La P

430. a è Cls . ∃a : x,y è a .⊃$_{x,y}$. $x=y$:⊃: $x=\imath a$.=. $a=\iota x$ Df

definisce nel F_2§1 la notazione « $x=\imath a$ », nella quale è fatto uso per la prima volta del simbolo « $\imath$ » (*).

Preferisco, perchè più breve e di più pronta comprensione, la Df

·64. a è Elm .⊃: $x=\imath a$.=. x è a Df {430}

Il significato della notazione « $x=\imath a$ » è il medesimo; infatti, dalla p64 si deduce la p

·65. a è Elm .⊃: $x=\imath a$.=. $a=\iota x$ [p63 . 64 .⊃. p]

che diviene la P430 se all'Hp si sostituisce il suo significato espresso dalla p60.

Mediante la p60, l'enunciato della P431 si abbrevia e diviene

·66. a è Elm .⊃. $(\imath a)$ è a {431}

[Hp . x è a . p64 .⊃. x è a . $x=\imath a$. p10 .⊃. Ts (1)
Hp . p60 .⊃. Ea . (1) .⊃. Ts]

Alla P

432. $\imath(\iota x)=x$ [p61 . 66 .⊃. $\imath(\iota x)$ è (ιx) . p52 .⊃. p]

(*) Il simbolo « $\imath$ » fu adoperato nel F_2§2 in sostituzione, e con lo stesso significato, del simbolo « $\bar{\iota}$ », usato nel F_2§1.

si può aggiungere la p

·67. a è Elm . ⊃ . $\iota(\iota a) = a$
[Hp . p21 . 60 . ⊃ . $\iota(\iota a)$, a è Cls (1)
Hp . p64 . 52 . ⊃ : x è $[\iota(\iota a)]$. = . x è a : (1) . P17 . ⊃ . p]

Cap. IV. — « ; ⁝ »

L'idea « la coppia formata da x ed y » è assunta nel F_2§1 come primitiva e vi è rappresentata con « $(x ; y)$ » (*). La prima P in cui è fatto uso di tale notazione è la P

71. $x ; y = a ; b . = . x = y . a = b$ Df

data nel F_2§1 come Df dell'eguaglianza di due coppie; da questa P risulta che, nella *coppia*, oltre agli oggetti che la compongono si deve considerare il loro ordine.

Però, avendo definito l'eguaglianza in generale, mediante la P80 del F_2§1 (o la p9 di questo scritto), mi sembra che non sia poi lecito stabilire per Df il significato di alcuna eguaglianza particolare.

Ciò bene avvertì il sig. C. Burali-Forti quando, recentemente, propose una dimostrazione della P71 (**); ma francamente, la sua dimostrazione non mi persuade, *a priori*, per due ragioni.

Anzitutto, egli non ricorre ad alcuna P in cui entri l'idea di coppia; ora io domando: « è possibile dimostrare una proprietà di una notazione, senza conoscere alcuna proprietà della notazione stessa? »

Poi, egli adopera il simbolo « ϱ » in casi non previsti dalla P13 [vedi *Cap.* II] e perciò, dal punto di vista formale, posso dichiarare di non comprendere il significato della sua dimostrazione.

*
* *

Se « a , b è Cls », con « $a ⁝ b$ », che si può leggere « le coppie di a e di b » (da non confondersi con la coppia « $a ; b$ »), rap-

(*) Veramente, nel F_2§1 è rappresentata con « (x , y) », mentre la notazione $(x;y)$ fu adoperata con egual significato soltanto nel F_2§2.
(**) RdM, t. VI, p. 65, P82*a*.

presento la classe cui appartengono tutte e soltanto le coppie il cui primo oggetto è un a ed il cui secondo oggetto è un b (*). Ciò è espresso dalla p

·68. $(x\,;y)$ è $(a\,\vdots\,b)\,.=.\,x$ è $a\,.\,y$ è b Df

dalla quale si deducono le p

·69. $(x\,;y)$ è $(\iota x\,\vdots\,\iota y)$ [p53 . 68 . ⊃ . p]

·70. $x\,;y=u\,;v\,.\supset.\,x=u\,.\,y=v$
[p69 . Hp . p10 . ⊃ . $(u\,;v)$ è $(\iota x\,\vdots\,\iota y)$. p68 . 52 . P82 . ⊃ . Ts]

·71. $x=u\,.\,y=v\,.\supset.\,x\,;y=u\,;v$
[$(x\,;y)$ è $(a\,\vdots\,b)$. p68 . ⊃ . x è $a\,.\,y$ è b . Hp . p10 . ⊃ .
u è $a\,.\,v$ è b . p68 . ⊃ . $(u\,;v)$ è $(a\,\vdots\,b)$ (1)
(1) . p9 . ⊃ . p]

·72. $x\,;y=u\,;v\,.=.\,x=u\,.\,y=v$ [= p70 . 71]

La p72, ora dimostrata, è appunto la P71, dianzi citata e commentata.

* * *

Se diamo significato alla notazione « $a\,\vdots\,b$ », soltanto quando « $a\,,b$ è Cls . $\exists a$. $\exists b$ », allora la p69 si può risolvere rispetto ad « $a\,\vdots\,b$ ».

$a\,,b$ è Cls . $\exists a$. $\exists b$. ⊃ . p73 . 74.

·73. $(a\,\vdots\,b)$ è Cls
[x è $a\,.\,y$ è b . p68 . ⊃ . $(x\,;y)$ è $(a\,\vdots\,b)$. p4 . ⊃ . p (1)
Hp . (1) . ⊃ . p]

·74. $a\,\vdots\,b=(x\,;y)$ è $(x$ è $a\,.\,y$ è $b)$
[p73 . P13 . ⊃ . $(x\,;y)\,\varepsilon\,[(x\,;y)$ è $(a\,\vdots\,b)]=a\,\vdots\,b$. P82 . p68 . ⊃ p]

Son pur degne di nota le p

·75. $\iota x\,\vdots\,\iota y=\iota\,(x\,;y)$
[$(u\,;v)$ è $(\iota x\,\vdots\,\iota y)$. p68 . 52 . ⊃ . $u=x\,.\,v=y$. p71 . ⊃ . $u\,;v=x\,;y$ (1)
p58 . ⊃ : p . = . p69 . (1)]

(*) Nelle bozze del fascicolo della RdM d'imminente pubblicazione, vidi proposta tale notazione, con tale significato; però ivi si trovava enunciata la sola p74, che a me non piace assumere quale Df per le ragioni addotte nel *Cap.* II relativamente ad altre Df del $F_{\aleph}1$.

$\cdot 76.\ x\,;y = \iota(\iota x : \iota y)$

[p75 . 63 .⊃. $(\iota x\,;\iota y)$ è Elm . p65 .⊃. p = p75]

la quale mostra che, assumendo quale primitiva la « $a : b$ », si potrebbe con questa definire la « $x\,;y$ ».

Si notino ancora le p

$\cdot 77.\ \iota x : \iota y = \iota u : \iota v\ .=.\ x\,;y = u\,;v$

[$\iota x : \iota y = \iota u : \iota v$. p75 .=. $\iota(x\,;y) = \iota(u\,;v)$. p59 .=. $x\,;y = u\,;v$]

$\cdot 78.\ a\,,b\,,c\,,d$ è Cls . $\exists a$. $\exists b$. $a\,;b = c\,;d$.⊃. $a : b = c : d$

[Hp . p70 .⊃. $a = c$. $b = d$ (1)

$(x\,;y)$ è $(a : b)$. p68 .=. x è a . y è b . Hp . (1) . P17 .=.

x è c . y è d . p68 .=. $(x\,;y)$ è $(c : d)$ (2)

Hp . p73 . 29 . (2) . P17 .⊃. Ts]

Sondrio, 1899.

ALESSANDRO PADOA.

SUI PRECURSORI DELLA LOGICA MATEMATICA

Il Prof. Gino Loria in un suo articolo intitolato: *La logique mathématique avant Leibniz* (Bull. de Darboux, a. 1894, t. 18, p. 107-112), dedicato specialmente a dar notizia delle opere di Pierre Herigone, ha giustamente osservato (p.110) che sebbene in questo scrittore si trovi un certo numero di simboli per indicare dei concetti astratti, tuttavia esso non ha fatto alcun tentativo per ridurre al minimo il numero dei simboli necessari per esporre una teoria, mentre in questa riduzione è contenuto il problema fondamentale della logica matematica.

In questa nuova scienza, i simboli che si usano rappresentano idee primitive, ed in tal caso il loro significato è determinato dalle proposizioni primitive, oppure sono definiti per mezzo dei simboli già noti. In ogni caso il linguaggio ordinario è reso superfluo. Al contrario negli scritti di Herigone, come in quelli degli scrittori di *Pasigrafia*, relativamente numerosi nei secoli scorsi, i simboli sono soltanto sigle od abbreviazioni le quali sostituiscono parole isolate o frasi del linguaggio ordinario. Simboli dello stesso genere di questi erano usati dagli alchimisti e dagli astrologi, ed ai giorni nostri si adoperano in molti dizionari (specialmente inglesi), o come segni convenzionali nelle carte geografiche e topografiche, o come simboli di abbreviazione nei sistemi di stenografia, ecc.

In altre parole mentre tutte le altre pasigrafie non sono che metodi di abbreviare parole o frasi del linguaggio ordinario senza modificare affatto la struttura dei ragionamenti, la logica matematica è uno strumento delicato e di somma precisione, col sussidio del quale si può compiere (ed è stato già fatto per i fondamenti dell'aritmetica, della geometria proiettiva, etc.) l'analisi dei concetti che stanno a base delle scienze matematiche.

Questa differenza caratteristica della logica matematica, sebbene sia scritta in modo chiaro nel F, non è finora molto nota. (P. es. lo Schröder, nei Rend. del Congr. di Zurigo p. 158 e 161, considera il simbolo del F: D(m,n), dove m, n sono dei numeri interi, soltanto come una abbreviazione stenografica della frase « *massimo comun divisore di m e di n* »).

La parte più interessante dell'opera di Herigone (come osserva il Loria, p. 109) consiste nel metodo di rappresentare le dimostrazioni. Ciò, del resto, egli stesso afferma nella sua prefazione (*Cursus Mathematicus*, t. 1 Parisiis, a. 1644), dicendo:

« J'ay inventé une nouvelle methode de faire les demonstrations, briefve « et intelligible, sans l'usage d'aucune langue ».

« La demonstration s'entretient depuis son commencement jusqu'à la con« clusion, par une suite de consequences legitimes, necessaires et imme« diates, contenue chacune dans une petite ligne, lesquelles se peuvent re« soudre facilement en syllogismes... ».

Questa parte del simbolismo di Herigone è però molto povera: i suoi simboli sono: hyp = « dall'ipotesi si deduce », constr = « dalla costruzione si ha », concl = « conclusione », arbitr = « prendendo arbitrariamente », 20.1 = « dalla proposizione 20 del primo libro si deduce », e qualche altro raramente usato: essi erano comuni nei secoli scorsi, anche anteriormente ad Herigone, nelle note che si ponevano in margine agli Elementi di Euclide, per chiarirne le dimostrazioni.

È mio intento di render conto, in questa nota, di un simbolismo dello stesso genere, ma più complicato e preciso, dovuto a Johann Pell (a. 1610 ⊢ 1685) e da lui adoperato sistematicamente nella sua opera: *Introductio in Algebram*, Londini a. 1668 (una prima edizione era comparsa in lingua tedesca, Tigurii, 1659).

Non mi è stato possibile consultare l'opera originale di Pell. Mi limito quindi a dare un'idea del suo metodo, come esso risulta nella esposizione svolta da Wallis nel t. 2 p. 238-246 delle sue opere (Londini a. 1693).

Esso consiste nell'indicare simbolicamente le operazioni da eseguire su una o più eguaglianze per ottenerne una nuova. Pell indica le diverse eguaglianze coi numeri 1, 2, 3, ...: occorrendogli distinguere questi simboli dai numeri interi 1, 2, 3, ... indica questi ultimi con 1·, 2·, 3·, ...

I simboli che egli adopera sono $+$, $-$, $\times$, $\div$ (corrispondente al / del F), che hanno il significato di sommare membro a membro, etc.; ed inoltre i due simboli per indicare le operazioni *involuzione* (elevazione a potenza) ed *evoluzione* (estrazione di radice) da eseguirsi sui due membri di una eguaglianza, che, non potendoli riprodurre, indico coi simboli corrispondenti del F, ⊢, √.

Così egli scrive:

$29 \upharpoonright 2\cdot$	(elevando ambo i membri della 29 a quadrato)
$12\ ,\ 38$	(dalla 12, e dalla 38 si deduce)
$44 - 41$	(sottraendo membro a membro dalla 44 la 41)
$62+63+64$	(sommando membro a membro le 62, 63, 64)
$57 \div 10\cdot$	(dividendo ambo i membri della 57 per 10)
$90 \downharpoonleft 2\cdot$	(estraendo la radice quadrata dai due membri della 90)
$m\,ab - 13$	(sottraendo ambo i membri della 13 da $m\,ab$)
$18 \times 4mn$	(moltiplicando la 18 per $4mn$)
$82 + +$	(trasportando nella 82, due termini dal 1o al 2o membro)
$133 + -$	(trasportando un termine dal 1o al 2o membro, ed uno dal 2o al 1o, della 133);

e così via. Queste indicazioni stanno scritte a sinistra della nuova eguaglianza che si tratta di dimostrare.

Wallis attribuisce inoltre a Pell l'uso del simbolo $\therefore$ (ergo) come simbolo di *illazione*, che ancora oggi è frequentemente usato dagli scrittori inglesi: questo segno sta scritto soltanto tra due eguaglianze o due diseguaglianze (rovesciato) per dire che dalla prima si deduce la seconda. Eccone alcuni esempi: (p.283) $a+x=\mathrm{R}\cdot\therefore aa+2ax+xx=\mathrm{RR}$

(p.284) $aa-bb>0\cdot\therefore aa>bb\cdot\therefore a>b>0$

In tempi più recenti, altri matematici hanno sentito il bisogno di notazioni speciali per rendere più brevi e chiare le dimostrazioni. Ad esempio il Prof. P. Mansion, in una sua *Note on a universal Analitical Language* (The Messeng. of Math. a. 1875 t. 4 p. 166) propone l'introduzione di un simbolismo analogo a quello di Pell. Egli scrive:

$\int (3)$	(integrando la equazione differenziale (3))
$(4)+(2)$	(sommando le due equazioni (4) e (2))
$\frac{(8)+(10)}{2}$	(sommando la (8) e la (10) e dividendo per (2))
$\mathrm{D}_x\,(6)$	(derivando rispetto ad x ambo i membri della (6))
$\frac{1}{a}\int (9)$	(dividendo per a ed integrando la (9))

S(6) & (7) $x=0$, $u=\mathrm{F}y$, $\frac{du}{dx}=fy$ (sostituendo nella (6) e nella (7) 0, Fy, fy in luogo di x, u, $\frac{du}{dx}$).

Quest'ultimo simbolo si trova già nel F ed ha in esso un significato determinato e preciso (|).

Come Pell, il Mansion scrive queste formole a sinistra delle eguaglianze che vuol dimostrare. Egli aggiunge infine che Gauss nei suoi manoscritti ha probabilmente adoperato una notazione analoga.

Mi sono fermato alquanto su questo genere di simbolismo, perchè, sebbene quello che è attualmente adoperato nel F permetta di scrivere completamente ogni dimostrazione, tuttavia alcune di queste si potrebbero notevolmente abbreviare e chiarire, introducendo nuovi simboli analoghi a quelli adoperati da Pell e dal Mansion, o meglio ad alcuni che già si trovano nel F. (Si vedano p. es. i simboli «Transp», «Syll», «Cmp», «Export» etc. del F_8N1).

***

Il Prof. Gino Loria nell'articolo sopra citato accenna pure, in una nota, che in L. N. M. Carnot si può trovare un sistema di simboli analogo a quello della Logica matematica. Mi sembra utile accennare in breve il metodo di questo A. che costituisce un tentativo di analisi logica delle idee della geometria. Esso è esposto diffusamente nel suo libro: *De la corrélation des figures de géométrie*, Paris an IX=1801.

In questo lavoro egli ha introdotto delle abbreviazioni « qui pourraient servir à exprimer brievement un grand nombre de propositions, qui ne peuvent être énoncées que par de longues phrases en langage ordinaire. On le ramenerait à une sorte d'expressions techniques et uniformes, qui auraient plusieurs avantages » (p. 51).

Le abbreviazioni di L. Carnot corrispondono a simboli di *proprietà* (F_2 §1 p. 21); cioè un unico simbolo posto dopo (o sopra, o fuso insieme) alle lettere variabili sta per indicare il verbo (ε) seguito dal nome di una classe.

Egli indica i punti colle lettere maiuscole, A, B, C, ... (p. 40).

$\overline{AB}$, $\widehat{AB}$ significano il segmento AB, l'arco di cerchio AB.

$\overline{BCD}$ significa: i punti B, C, D sono in linea retta, ed il punto C sta tra i punti B e D.

$\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ è il punto d'incontro delle rette indefinite AB, CD (p. 41).

$\widehat{ABCD}$ i quattro punti A B C D stanno sullo stesso arco di cerchio nell'ordine A, B, C, D.

$\widehat{AB} \cdot \widehat{CD}$ è il punto d'incontro dei due archi $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$.

$\overline{F\,\overline{AB} \cdot \overline{CD}}$ è la retta che passa per i punti F e $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ (p. 42).

=|= è il segno di *equipollenza* che indica l'identità di due oggetti qualunque; esso, a differenza del segno = che è applicabile alle sole quantità reali, è applicabile ai punti, alle equazioni, alle formule, etc. (p. 43).

$A\hat{B}C$ è l'angolo formato dalle rette AB , BC.

$\overline{AB} \wedge \overline{CD}$ ——————————— AB CD.

$\underline{\wedge}ABC$ significa: i tre punti A B C formano un triangolo.

ΔABC ——————————————————————— rettangolo

$\overline{\overline{ABC}}$ è l'area del triangolo ABC.

Il simbolo $\supset$ è sostituito dalla parola *donne*, o *donnent* (in corsivo).

Con queste notazioni l'A. è in grado di scrivere completamente in simboli molte proposizioni di Geometria.

Eccone alcuni esempi:

(p. 51) ΔABC *donne* $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

(p. 54) $\underline{\wedge}ABC$, $\underline{\wedge}BDE$, $\overline{ADB}$, $\overline{BEC}$, *donnent*

$$(\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2) \cdot \overline{BE} \cdot \overline{BD} = (\overline{DE}^2 - \overline{BE}^2 - \overline{BD}^2) \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

È però da notarsi che la corrispondenza tra i simboli dell'A. ed il linguaggio ordinario che io ho dato, è soltanto approssimativa, e che inoltre l'A. introduce frasi complete del linguaggio ordinario allorquando gli si presentano parti di proposizioni che non possono essere scritte coi soli simboli da lui introdotti. P. es.:

(p. 52) *Cir.* ABCD , A, B, C, D *rangés comme on veut*, $\overline{AD} \cdot \overline{BC} =|= K$, *donne*

$$\overline{AK} \cdot \overline{DK} = \overline{BK} \cdot \overline{CK}$$

(p. 127) A, B, C, D, *rangés à volonté sur un plan, donnent*,

1o. $\overline{AB} \cdot \overline{D\,\overline{AB} \cdot \overline{CD}} \cdot \overline{C\,\overline{AC} \cdot \overline{BD}} = \overline{CD} \cdot \overline{A\,\overline{AC} \cdot \overline{BD}} \cdot \overline{B\,\overline{AB} \cdot \overline{CD}}$

. . . . . .

5o. $\overline{AD\,\overline{AB} \cdot \overline{CD}} \cdot \overline{BC\,\overline{AB} \cdot \overline{CD}} :: \overline{AD\,\overline{AC} \cdot \overline{BD}} : \overline{BC\,\overline{AC} \cdot \overline{BD}}$

Di queste ultime due proposizioni (*formules techniques*) ecco la traduzione in linguaggio ordinario:

« Les trois côtés d'un triangle quelconque étant prolongés indéfiniment, si l'on mène une transversale indéfinie qui les coupe tous trois il résultera de cette construction, sur chacun des côtés du triangle, deux segments. Or de ces six segments, le produit formé de trois d'entre eux, comme facteurs, est égal au produit formé des trois autres; en prenant ces facteurs de manière qu'il n'en entre pas deux dans le même produit qui aient pour extrémités un même angle du triangle ou un même point de la transversale. »

« Dans tout quadrilatère complet, si l'on mène les trois diagonales, les deux triangles qui ayant pour sommet commun l'une des extrémités de l'une des trois diagonales, et pour bases respectives les deux autres diagonales, sont entre eux comme les deux triangles qui, respectivement appuyés sur les mêmes bases, ont pour sommet commun l'autre extrémité de la première diagonale. »

La complicazione della interpretazione col linguaggio ordinario di questi teoremi, spiega a sufficienza l'utilità del simbolismo di Carnot.

GIOVANNI VACCA

SUI NUMERI IRRAZIONALI

Nota di G. PEANO.

Le proprietà dei numeri irrazionali sono note da tempo antico; poichè il libro X d'Euclide contiene proposizioni interessantissime su essi; se ne può vedere la versione in simboli ideografici in RdM t. 2 p. 7.

Alcuni A. attribuiscono a Platone degli studi sugli irrazionali (Baltzer, Elem. d. Mathem. a. 1885 p. 100; Encyclopl. p. 49). Invero nei dialoghi di questo filosofo trovansi qua e là dei termini matematici, ma riuniti in modo così incerto da farli ritenere come parole difficili con cui un interlocutore cerca confondere l'avversario; all'incirca come nei giornali politici del giorno d'oggi sta scritto *incommensurabile* invece di *grandissimo*. Il passo più volte citato, nella *Πολιτεία* VIII 546 è considerato dai commentatori Jowett and Campbell, Oxford a. 1894, come un *riddle*. Al più da un passo del *Θεαιτήτος* 143 E, si può dedurre $\sqrt{8} < 3$, e ciò parmi la cosa più importante contenuta in quelle opere su questo soggetto.

In Euclide non sono considerati che irrazionali quadratici, cioè ragione di due segmenti che si deducono l'uno dall'altro colla riga e col compasso. L'esistenza di questi irrazionali è conseguenza della costruibilità di questi segmenti. Quindi nel loro concetto stanno inclusi dei postulati geometrici, non ancora ben analizzati, poichè l'analisi dei principii della Geometria, e specialmente della Euclidea, è meno avanzata dell'analisi dei concetti aritmetici.

Pare che Apollonio abbia considerati gli irrazionali che provengono dall'inserzione di più medie geometriche, cioè dall'estrazione di radici d'indice qualunque, in un libro di cui tentò la ricostruzione il Woepke, servendosi d'un manoscritto arabo (*Mémoires des savants étrangers*, a. 1856 p. 694). Ma nessun teorema su questi irrazionali è pervenuto fino a noi.

Solo ai nostri tempi, per opera di Matematici in gran parte viventi, nello studio di importanti questioni analitiche, si è vista la necessità di dare la definizione generale del numero reale, razionale o irrazionale, Q. La definizione antica, che si potrebbe dire Euclidea:

numero reale = rapporto di due grandezze

esige l'analisi dell'idea di « grandezza »; e in questa analisi, fatta da più A. e in F_1IV dal prof. Burali-Forti coi simboli ideografici, si incontrano precisamente le stesse difficoltà che nel definire direttamente il numero reale; del resto in geometria un passo equivalente a quello che costituisce la definizione del numero reale in generale è rappresentato da un postulato ben noto, detto postulato di Dedekind.

§1.

Trattandosi solo di radici, ad es. quadrate, si può assumere per definizione

$$\cdot 1 \quad a \varepsilon R^2 . \supset . \sqrt{a} = \iota R \cap x \ni (x^2 = a) \qquad \text{Df}$$

« essendo a un razionale quadrato, con $\sqrt{a}$ si intende quel razionale che elevato a quadrato dà a ». E se $a \varepsilon R^2$, senza definire $\sqrt{a}$, si può definire la relazione $b > \sqrt{a}$:

$$\cdot 2 \quad a, b \varepsilon R . a \varepsilon R^2 . \supset : b > \sqrt{a} . = . b^2 > a \qquad \text{Df}$$

seguendo Bertrand, *Traité d'Arith.* a. 1851 p. 197:

« On dit qu'un nombre est plus grand ou plus petit que $\sqrt{N}$ suivant que son carré est plus grand ou plus petit que N. »

Si può pure definire la « $\sqrt[n]{a}$, calcolata a meno d'un'unità », che indicheremo col simbolo $E \sqrt[n]{a}$, avvertendo che i segni E e $\sqrt{}$ non si possono ancor separare:

$$\cdot 3 \quad n \varepsilon N_1 . a \varepsilon R . \supset . E \sqrt[n]{a} = \max N_0 \cap x \ni (x^n \leqq a) \qquad \text{Df}$$

e così via. Ma la cosa si va rapidamente complicando.

Kronecker, senza definire gli irrazionali in generale, sviluppò la teoria completa degli irrazionali algebrici. Vedasi pure Drack, *Introd. à ... l'algèbre sup.*, Paris a. 1895 p. 123-332. Si può notare che per questa via il teorema che « ogni equazione di grado n ha n radici » si riduce ad una identità, cioè è all'incirca la definizione stessa dell'irrazionale algebrico (p. 171). Questi studii interessanti meritano certo di essere tradotti in simboli ideografici. Però per l'uso pratico e per l'insegnamento attuale tale via si presenta non intuitiva ed estremamente complicata.

D'altronde io non veggo difficoltà nella definizione generale di Q; varie definizioni sono state date, che paionmi del tutto soddisfacenti sia sotto l'aspetto del rigore che quello della semplicità; e se sopra esse tanto si è discusso e si discute tuttora, ciò verte sulla incerta interpretazione di qualche termine del linguaggio ordinario, o su ragioni didattiche.

La riduzione delle definizioni relative agli irrazionali, in simboli ideografici, fu pubblicata nel mio opuscolo: *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, a. 1889 p. 15. A causa della sua brevità, e per dispensare il lettore dalla ricerca di quell'opuscolo, qui la riproduco.

Rationalium Systemata, Irrationales.

Explicatio. Si $a \varepsilon K R$, signum $T a$ legitur *terminus summus,* vel *limes summus classis a.* Supra hoc novum ens relationes ac operationes tantum definimus.

Definitiones.

$$1. \quad a \varepsilon K R . x \varepsilon R : \supset :: x < T a . = . \therefore a . \ni > x : = = \Lambda .$$

2. $a \varepsilon \mathrm{KR} . x \varepsilon \mathrm{R} : \supset :: x = \mathrm{T}\, a . = \therefore a . \ni > x : = \Lambda :: u \varepsilon \mathrm{R} . u < x : \supset_u \therefore a . \ni > u : \bullet = \Lambda .$

3. $a \varepsilon \mathrm{KR} . x \varepsilon \mathrm{R} : \supset \therefore x > \mathrm{T}\, a . = : x \bullet < \mathrm{T}\, a . x \bullet = \mathrm{T} a .$

Theorema.

4. $x \varepsilon \mathrm{R} . \supset :: x = \therefore \mathrm{T} : \mathrm{R} . \ni < x .$

Explicatio. Signum Q legitur *quantitas*, numerosque indicat reales positivos, rationales aut irrationales, 0 et ∞ exceptis.

Definitiones.

5. $\mathrm{Q} = [x \varepsilon] (a \varepsilon \mathrm{KR} : a \bullet = \Lambda : \mathrm{R} . \ni > \mathrm{T}\, a . \bullet = \Lambda : \mathrm{T}\, a = x \therefore \bullet = \Lambda) .$

6. $a, b \varepsilon \mathrm{Q} . \supset :: a = b . = \therefore \mathrm{R} . \ni < a : = : \mathrm{R} . \ni < b .$

7. $a, b \varepsilon \mathrm{Q} . \supset :: a < b . = \therefore \mathrm{R} . \ni > a . \ni < b : \bullet = \Lambda .$

8. $a, b \varepsilon \mathrm{Q} . \supset : b > a . = . a < b .$

Theoremata.

9. $a \varepsilon \mathrm{Q} . \supset \therefore \mathrm{R} . \ni < a : \bullet = \Lambda .$

10. $a \varepsilon \mathrm{Q} . \supset \therefore \mathrm{R} . \ni > a : \bullet = \Lambda .$

11. $\mathrm{R} \supset \mathrm{Q} .$

Definitiones.

12. $a, b \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . a + b = \mathrm{T} [z \varepsilon] ([(x, y) \varepsilon] : x, y \varepsilon \mathrm{R} . x < a . y < b . x + y = z \therefore \bullet = \Lambda) .$

13. $a, b \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . ab = \mathrm{T} [z \varepsilon] ([(x, y) \varepsilon] : x, y \varepsilon \mathrm{R} . x < a . y < b . xy = z \therefore \bullet = \Lambda) .$

Ut valeant hae definitiones, demonstrandum est subsistere propositiones 12 et 13, si $a, b \varepsilon \mathrm{R}$.

Subtractionem et divisionem ut operationes inversas additionis et multiplicationis definire licet.

§2

Nei dieci anni trascorsi da questa prima applicazione della Logica matematica ad oggi, il simbolismo si è alquanto trasformato.

Avendo il segno $<$ il valore di « è minore di », nel lavoro del 1889 si è rappresentato con $\ni <$ l'espressione « minore di », sicchè $\varepsilon \ni <$ ritorna a valere $<$. Ma, per diminuire il numero delle convenzioni, questa notazione non fu più in seguito usata, sicchè la classe « minore di a » indicata allora con « $\ni < a$ » è ora indicata colla scrittura $x \ni (x < a)$.

Invece di $a \bullet = \Lambda$ (la classe a non è la classe nulla), si è introdotta la notazione $\exists a$ (esistono degli a). Vedasi F_2N1 nota alla P400.

Si è cambiata la forma del segno K, trasformato in Cls; come pure al segno d'inversione, allora indicato colle parentesi quadre, sicchè $[x \varepsilon]$ di quel lavoro ora si scrive $x \ni$. Il segno aritmetico T si è scritto poi sotto la forma I' (limite superiore).

Le convenzioni espresse in F_2N2 P019 e analoghe, per cui si chiama somma di due classi u e v e si indica con $u+v$, la classe ottenuta sommando ogni u con ogni v, permettono pure qualche riduzione.

Tenendo conto di queste trasformazioni, le P precedenti diventano:

$u\varepsilon\ \mathrm{Cls'R}\ .\ x\varepsilon\mathrm{R}\ .\supset:$

1. $x<\mathrm{l'}u\ .=.\ \exists\ u\frown(x+\mathrm{R})$ Df
2. $x=\mathrm{l'}u\ .=:\ \sim\exists\ u\frown(x+\mathrm{R})\ :\ y\varepsilon\mathrm{R}\ .\ y<x\ .\supset_y .\ \exists\ u\frown(y+\mathrm{R})$ Df
3. $x>\mathrm{l'}u\ .=.\ \sim(x<\mathrm{l'}u)\ .\ \sim(x=\mathrm{l'}u)$ Df
4. $x=\mathrm{l'}\ \mathrm{R}\frown y\ni(y<x)$
5. $\mathrm{Q}\ =\ x\ni\{\exists\ \mathrm{Cls'R}\frown a\ni[\exists a\ .\ \exists\ \mathrm{R}\frown y\ni(y>\mathrm{l'}a)\ .\ x=\mathrm{l'}a\ ]\}$ Df

$a,b\varepsilon\mathrm{Q}\ .\supset:$ 6. $a=b\ .=.\ \mathrm{R}\frown z\ni(z<a)=\mathrm{R}\frown z\ni(z<b)$ Df

7.8. $a<b\ .=.\ b>a\ .=.\ \exists\ \mathrm{R}\frown x\ni(a<x<b)$ Df

9.-11. $\exists\ \mathrm{R}\frown x\ni(x<a)\ .\ \exists\ \mathrm{R}\frown x\ni(x>a)\ .\ \mathrm{R}\supset\mathrm{Q}$

12. $a+b=\mathrm{l'}\{[\mathrm{R}\frown x\ni(x<a)]+[\mathrm{R}\frown x\ni(x<b)]\}$ Df
13. $a\times b=$ » $\times$ » »
14. $a<b\ .\supset .\ b-a=\iota\ \mathrm{Q}\frown x\ni(a+x=b)$ Df
15. $/a=\iota\ \mathrm{Q}\frown x\ni(x\times a=1)$ Df
16. $m\varepsilon\mathrm{N}_1\ .\supset .\ a^m=1(\times a)m$ Df
17. » $.\supset .\ \sqrt[m]{a}=\iota\ \mathrm{Q}\frown x\ni(x^m=a)$ Df

Esse significano:

Sia u una classe di R. Noi introduciamo la funzione $\mathrm{l'}u$ (limite superiore degli a), di cui non diamo una definizione nominale, cioè della forma

$\mathrm{l'}u=$ (espressione composta mediante i segni precedenti);

ma definiamo solo le relazioni in cui figura questo segno. Essendo x un razionale, diremo, P1, che $x<\mathrm{l'}u$, quando esistono degli u maggiori di x. Le P2 e 3 definiscono le relazioni $x=\mathrm{l'}u$ e $x>\mathrm{l'}u$. Si deduce (P4), che un numero razionale è il limite superiore dei numeri più piccoli di esso.

P5. Il limite superiore d'una classe di razionali, supposto però questa classe effettivamente esistente, onde escludere lo 0, e tale che esistano dei numeri y maggiori d'ogni numero della classe, onde escludere l'∞, chiamasi quantità, o numero reale positivo, e in simboli Q.

P6. Due quantità a e b diconsi eguali, se ogni razionale minore dell'una è pure minore dell'altra, e viceversa. P7. Si dice $a<b$, o $b>a$ se esistono razionali compresi fra a e b. Ne risulta (P9, 10) che data una quantità qualunque, esistono razionali minori, ed altri maggiori di essa. Ogni R è un Q.

P12. Dicesi somma di due quantità a e b il limite superiore delle somme d'un numero razionale minore di a, con un razionale minore di b. Analogamente pel prodotto.

P14-17. Le altre operazioni si definiscono come per i numeri razionali.

Si può aggiungere la

1'. $x<\mathrm{l'R}$

« ogni razionale è minore del limite superiore della classe R »

§3

Invece che dagli R, razionali assoluti, si potrebbe partire dagli r, razionali relativi, o con segno. Ecco alcune proposizioni trasformate:

$u \varepsilon \mathrm{Cls'r} \,.\, x \varepsilon \mathrm{r} \,.\supset.$

1. $x < \mathrm{l}'u \,.=.\, x \varepsilon u - \mathrm{R}$ Df
2. $x = \mathrm{l}'u \,.=.\, x - \mathrm{R} = u - \mathrm{R}$ Df
4. $x = \mathrm{l}'(x - \mathrm{R})$

Invece di definire le relazioni $=$ e $<$ fra Q, che sono i limiti superiori di classi speciali, in cui si era escluso lo 0 e l'∞, si possono definire in generale:

$u, v \varepsilon \mathrm{Cls'r} \,.\supset:$

6. $\mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v \,.=.\, u - \mathrm{R} = v - \mathrm{R}$ Df
6'. $\mathrm{l}'u = \mathrm{l}'(u - \mathrm{R})$
7. $\mathrm{l}'u < \mathrm{l}'v \,.=.\, \mathrm{l}'v > \mathrm{l}'u \,.=.\, \exists\, (v - \mathrm{R}) - (u - \mathrm{R})$ Df
8. $\mathrm{l}'u \leqq \mathrm{l}'v \,.=.\, u - \mathrm{R} \supset v - \mathrm{R}$ Df

Si possono considerare le 7 e 8 come definizioni indipendenti, e i segni $<$ e $\leqq$ come segni semplici, e dedurre le P151·7·9; ovvero assumere una di queste come def. al posto di una delle 7 e 8 ora scritte.

Seguendo questa via conviene definire direttamente « q » o « quantità relativa » cioè il numero reale con segno, anzichè Q. Si potrà porre

5. $\mathrm{q} = x \ni \exists\, \mathrm{Cls'r} \cap a \ni [\exists a \,.\, \exists\, \mathrm{r} - (a - \mathrm{R}) \,.\, x = \mathrm{l}'a]$ Df
5'. $\mathrm{Q} = \mathrm{q} \cap x \ni (x > 0)$

Questo procedimento però non conviene alla disposizione del Formulario; poichè essendo tutte le prop. e teorie ordinate a seconda dei segni che vi figurano, una teoria che contenga il segno R, ma non r, deve necessariamente precedere quella che contiene r. La disposizione del Formul. anche qui va d'accordo coll'uso comune, perchè nell'insegnamento suolsi parlare prima dei Q, numeri reali assoluti, e poi dei q.

Si può fare la teoria dei Q, scrivendo formule egualmente semplici delle precedenti, introducendo un segno per indicare « frazione propria », cui daremo la forma ϑ. Ricordiamo che già in F_2.N2, Θ significa « la parte frazionaria di »; e in F_1 θ significa « l'intervallo fra 0 ed 1 ». Essendo la nuova idea affine alle precedenti, si indicherà con un segno pure simile.

Le P seguenti hanno la forma consueta del Formulario. Qualche citazione si riferisce all'edizione in corso di stampa; ma il lettore non troverà difficoltà a riscontrarle nell'edizione pubblicata.

§4 ϑ

$$R < \vartheta$$

$\cdot 0$ $\vartheta = R \frown x \ni (x < 1)$ $\}=$ " fraction propre " $\}$ Df

$$N_0 + N_1 - \times / R < \vartheta$$

$\cdot 01$ $R - N_1 = N_0 + \vartheta$ $\cdot 02$ $1 - \vartheta = \vartheta$ $\cdot 03$ $\vartheta = R \frown (1 - R)$ Df?

$\cdot 04$ $\vartheta = x \ni \exists (a;b) \ni [a,b \,\varepsilon\, N_1 \,.\, x = a/(a+b)]$ Df?

$\cdot 11$ $x,y \varepsilon \vartheta \,.\supset.\, xy \,\varepsilon\, \vartheta$ [§> P6·2 ⊃ P]

$\cdot 12$ $x \varepsilon \vartheta \,.\supset.\, \exists\, \vartheta \frown y \ni (x \varepsilon\, \vartheta y)$

[$a,b \varepsilon N_1 \,.\, x = a/(a+b) \,.\, y = (a+1)/(a+b+1)$. §> P7·4 .⊃. $x < y \,.\, y < 1$.⊃. Ths]

$\cdot 13$ $\vartheta\vartheta = \vartheta$ [P·11 .⊃. $\vartheta\vartheta \supset \vartheta$: P·12 .⊃. $\vartheta \supset \vartheta\vartheta$:⊃. P]

$\cdot 14$ $\vartheta N_1 = \vartheta R = R$ $\cdot 15$ $R = \vartheta \smile / \vartheta \smile \iota 1$

$a,b \varepsilon R \,.\supset:$

$\cdot 21$ $\vartheta a = R \frown x \ni (x < a) = R \frown (a - R)$

$\cdot 22$ $b < a \,.=.\, b \,\varepsilon\, \vartheta a$

$\cdot 23$ $\vartheta a \supset \vartheta b \,.\supset.\, a \leqq b$ [Hp .⊃. $b - \varepsilon \vartheta b$.⊃. $b - \varepsilon \vartheta a$.⊃. $b - < a$.⊃. Ths]

$\cdot 24$ $\vartheta a = \vartheta b \,.\supset.\, a = b$ [Hp . P·23 .⊃. $a \leqq b \,.\, b \leqq a$.⊃. Ths]

$\cdot 25$ $\vartheta(a+b) = \vartheta a + \vartheta b$

[§× P2·02 .⊃. $\vartheta(a+b) \supset \vartheta a + \vartheta b$ (1)

$x \varepsilon\, \vartheta a \,.\, y \varepsilon\, \vartheta b$. §> P2·3 .⊃. $x + y \,\varepsilon\, \vartheta(a+b)$ (2)

(2) .⊃. $\vartheta a + \vartheta b \supset \vartheta(a+b)$ (3)

(1) . (3) .⊃. P]

$u,v \,\varepsilon\, Cls'R \,.\supset.$

$\cdot 31$ $\vartheta u = R \frown x \ni [\exists u \frown y \ni (y > x)]$ $\cdot 32$ $\vartheta(uv) = (\vartheta u) \times (\vartheta v)$ [P·13⊃P]

$\cdot 33$ $\vartheta(u+v) = \vartheta u + \vartheta v$

[§× P2·02 .⊃. $\vartheta(u+v) \supset \vartheta u + \vartheta v$ (1)

$x \varepsilon u \,.\, y \varepsilon v \,.\, z \varepsilon\, \vartheta x + \vartheta y$. P·25 .⊃. $z \varepsilon\, \vartheta(x+y)$.⊃. $z \varepsilon\, \vartheta(u+v)$ (2)

(2) . Elim(x,y) .⊃. $\vartheta u + \vartheta v \supset \vartheta(u+v)$ (3)

(1) . (3) .⊃. P]

In conseguenza, essendo a un R (numero razionale positivo), ϑa significa «frazione propria di a», cioè «numero razionale minore di a»; ed essendo u una classe di R, ϑu vale «frazione propria di qualche u».

Con questo segno, le P precedenti diventano

§5 $R < \vartheta$ $1'$

$u,v \varepsilon\, Cls'R \,.\, a \varepsilon R \,.\supset:$

1. $a < 1'u \,.=.\, a \,\varepsilon\, \vartheta u$ Df

2. $a = 1'u \,.=.\, \vartheta a = \vartheta u$ Df 4. $a = 1'\vartheta a$ 4'. $1 = 1'\vartheta$

6. $1'u = 1'v \,.=.\, \vartheta u = \vartheta v$ Df

6'. $\mathrm{l}'u = \mathrm{l}'\vartheta u$ 6''. $\mathrm{l}'\mathrm{N}_1 = \mathrm{l}'\mathrm{R} = \mathrm{l}'(a+\mathrm{R})$

7. $\mathrm{l}'u < \mathrm{l}'v \;.=.\; \mathrm{l}'v > \mathrm{l}'u \;.=.\; \exists\, \vartheta v = \vartheta u$ Df

8. $\mathrm{l}'u \leqq \mathrm{l}'v \;.=.\; \mathrm{l}'v \geqq \mathrm{l}'u \;.=.\; \vartheta u \supset \vartheta v$ Df

8'. $\mathrm{l}'u \leqq \mathrm{l}'\mathrm{R}$ 8''. $\mathrm{R} \supset \vartheta u \,.\supset.\, \mathrm{l}'u = \mathrm{l}'\mathrm{R}$

§6

Se il l' è razionale, la P·2 non definisce $\mathrm{l}'u$, ma solo la relazione $a = \mathrm{l}'u$. È possibile il dare in questo caso la definizione nominale di $\mathrm{l}'u$:

1. $u \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.\, \exists\, \mathrm{R} \cap x \ni (\vartheta x = \vartheta u) \,.\supset.\, \mathrm{l}'u = \iota\, \mathrm{R} \cap x \ni (\vartheta x = \vartheta u)$ Df

« Sia u una classe di razionali; e supponiamo che esista un razionale x tale che $\vartheta x = \vartheta u$. Allora con $\mathrm{l}'u$ si intende questo razionale ». Si deduce:

2. $\mathrm{HypP1} \,.\supset.\, \mathrm{l}'u\, \varepsilon \mathrm{R} \,.\, \vartheta \mathrm{l}'u = \vartheta u$

[$x,y \varepsilon \mathrm{R} \,.\, \vartheta x = \vartheta u \,.\, \vartheta y = \vartheta u \,.\, \S\vartheta \mathrm{P}\cdot 24 \,.\supset.\, x = y$ (1)

(1) . Hyp. $\S\iota$P431 $.\supset.$ P]

3. $a \varepsilon \mathrm{R} \,.\supset.\, a = \mathrm{l}'\vartheta a = \mathrm{l}'\iota a$

4. $u \varepsilon \mathrm{Cls}'\mathrm{R} \,.\, a \varepsilon \mathrm{R} \,.\, \vartheta a = \vartheta u \,.\supset.\, a = \mathrm{l}'u$

Però dalla 1 non si può dedurre la P2 del §5, poichè $\mathrm{l}'u$ ha solo senso nell'HypP1. Questa P si potrà dedurre dalla attuale P1, e dalla §5 P6.

Ricordiamo poi che le definizioni del §5 non sono del tutto indipendenti, cioè si sovrappongono alquanto. Invero, le relazioni $\mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v$, $\mathrm{l}'u < \mathrm{l}'v$,... hanno già significato se questi l' sono razionali; si deve provare che queste definizioni concordano con proposizioni note in questo caso particolare, il che è conseguenza immediata delle P·23·24 di $\S\vartheta$. Anche le definizioni $a < \mathrm{l}'u$ $a > \mathrm{l}'u$ si possono dedurre dalla $a = \mathrm{l}'u$ e $\mathrm{l}'u < \mathrm{l}'v$.

§7

Prima di procedere oltre, è opportuno introdurre un'operazione di logica, di cui già si è parlato in F_0§32-33, e in altri lavori, quantunque finora nelle applicazioni alla Matematica non se ne sia fatto uso.

Cls ε f ' '

$a,b,c,d \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, u \varepsilon\, bfa \,.\, v \varepsilon\, a\jmath b \,.\, c \supset a \,.\, d \supset a \,.\supset.$

·0 $u`a = y \ni \exists\, a \cap x \ni (ux = y)$ Df ·01 $a`v = y \ni \exists\, a \cap x \ni (xv = y)$ Df

·1 $x \varepsilon a \,.\supset.\, ux\, \varepsilon\, u`a$ [ Hp . P·0 $.\supset.$ $ux = y$ $.\supset.$ $y \varepsilon\, u`a$: P84 $.\supset.$ Ts] pd

·2 $u`a \supset b$ pd

[Hp . P501 . P84 $.\supset:$ $x \varepsilon a \,.\, ux = y$ $.\supset.$ $y \varepsilon b$ (1)

Hp . P·0 . (1) $.\supset:$ $y \varepsilon u`a$ $.\supset.$ $y \varepsilon b$ $:\supset.$ Ts]

$\cdot 3 \quad x\varepsilon a \,.\supset.\, u`\iota x = \iota\, ux$ pd

[Hp . P422 . P505 $.\supset.\, u\varepsilon(b\iota x)$ (1)

Hp , (1) . P·0 $.\supset:\, y\varepsilon u`\iota x \,.\supset_y .\, \exists\, \iota x \cap z\ni(uz=y)$. P424 $.=_y$.

$x\varepsilon[z\ni(uz=y)] \,.=_y .\, ux=y$. P421 $.=_y .\, y\varepsilon\iota ux$ (2)

Hp . (2) . P17 $.\supset.$ Ts]

$\cdot 4 \quad u`c \supset u`a \qquad \cdot 5 \quad u`(c \cup d) = u`c \cup u`d$

$\cdot 6 \quad u\varepsilon\,(bfa)\mathrm{rcp} .=: u\varepsilon\,(bfa)\mathrm{Sim} \,.\, u`a = b$ pd

$\cdot 7 \quad k\varepsilon\,\mathrm{Cls} \,.\supset.\, \mathrm{Cls}`k = y\ni \exists\, \mathrm{Cls} \cap x\ni(xk=y) = \mathrm{Cls} \cap y\ni(y \supset k)$ Df?

Il segno $u`a$, che si deve considerare decomposto in $(u`)a$, corrisponde alla frase «u degli a» o «u di qualche a». Il segno ` si può sottintendere in più casi, specialmente nelle formule algebriche, ma non sempre ciò è lecito, senza produrre ambiguità.

In conseguenza Cls'R significa «classe di razionali», come è scritto sempre in questo articolo. In F_2N1 e N2 l'apostrofo era rovesciato.

§8

Fra le classi di R meritano menzione speciale quelle che moltiplicate per ϑ si riproducono; cioè soddisfano alla condizione $\vartheta u = u$. Esse sono le classi tali che se un R vi appartiene, ogni R più piccolo di esso appartiene pure alla medesima; e viceversa, ogni numero della classe possa essere superato da qualche numero della stessa classe; quest'ultima condizione equivale a dire che la classe non ha massimo. Aggiungendo a queste classi la condizione che esse esistano effettivamente e che non contengano tutti i numeri razionali, si ottengono classi, che si possono chiamare «segmenti di razionali», o «segmenti», e che indicherò col simbolo «Sgm». La definizione e le principali proprietà di questi segmenti sono espresse dalle P seguenti:

R ϑ Sgm

$\cdot 0 \quad \mathrm{Sgm} = \mathrm{Cls'R} \cap a\ni(\vartheta a = a \,.\, \exists a \,.\, \exists\, \mathrm{R}{-}a)$ Df

$\cdot 01 \quad a\varepsilon\,\mathrm{Sgm} .=. a\varepsilon\,\mathrm{Cls'R} \,.\, \vartheta a = a \,.\, \exists a \,.\, \exists\, \mathrm{R}{-}a$ [=P·0]

$\cdot 02 \quad u\varepsilon\,\mathrm{Cls'R} \,.\, \exists u \,.\, \exists\, \mathrm{R}{-}\vartheta u \,.\supset.\, \vartheta u\, \varepsilon\, \mathrm{Sgm}$

[Hyp . P·01 . §ϑP·13 $.\supset.$ Ths]

$\cdot 03 \quad \vartheta\, \varepsilon\, \mathrm{Sgm} \qquad \cdot 04 \quad x\varepsilon\mathrm{R} \,.\supset.\, \vartheta x\, \varepsilon\, \mathrm{Sgm}$

$\cdot 05 \quad a\varepsilon\,\mathrm{Sgm} \,.\, y\varepsilon\,\mathrm{R}{-}a \,.\supset.\, a \supset \vartheta y$

$a,b,c\varepsilon\,\mathrm{Sgm} .\supset.$

$\cdot 1 \quad a+b\, \varepsilon\, \mathrm{Sgm} \,.\, a+b = b+a \,.\, a+b+c = (a+b)+c = a+(b+c)$

$\cdot 2 \quad a \times b\, \varepsilon\, \mathrm{Sgm} \,.\, ab = ba \,.\, abc = (ab)c = a(bc) \,.\, a(b+c) = ab+ac$

$\cdot 3 \quad \exists\, \mathrm{Sgm} \cap u\ni[\,{-}\exists\, \mathrm{R} \cap x\ni(u = \vartheta x)]$

I segmenti così definiti non differiscono che per la nomenclatura dai numeri reali. La somma ed il prodotto di due segmenti è già stata definita precedentemente in F_2N2 P019 e analoghe. In queste operazioni $+$ e $\times$, i segmenti si comportano come i numeri reali.

Ma, essendo a e b dei segmenti, $a-b$, a/b, come pure $a\uparrow m$, ove m è un intero, hanno già significato; ed esso non coincide col valore di queste espressioni se a e b sono numeri reali.

P. es. se u è un segmento, $/u$, che significa «reciproco di qualche u» non è più un segmento. Analogamente u^2, che vuol dire «prodotto di due u eguali», non è un segmento; esso non vale uu, prodotto di un u per un u.

Si potrebbero definire delle nuove operazioni, che indicherò pel momento con $-'$, $/'$, $\uparrow'$, ponendo

$$a,b \varepsilon \mathrm{Sgm} . \supset . \quad b/'a = \imath \mathrm{Sgm} \cap x \ni (xa = b) \quad . \quad a\uparrow'2 = a \times a \quad \ldots$$

La soppressione da F_2N2 delle convenzioni espresse dalla P019 e analoghe, permetterebbe di indicare cogli stessi segni $- / \uparrow$ le operazioni ora definite; ma quelle convenzioni sono assai utili.

Anche in altri casi un numero reale è considerato come un oggetto diverso da un segmento di razionali.

Si scrive $1 < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, mentrechè, considerando $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ quali segmenti, queste relazioni si possono scrivere $1 \varepsilon \sqrt{2}$, $\sqrt{2} \supset \sqrt{3}$.

Il numero 1 e il segmento ϑ hanno proprietà diverse.

Nell'uso comune il numero reale, quantunque sia determinato da un segmento u, e lo determini, si considera come l'estremo, o termine o limite superiore del segmento.

È possibile, parlando sempre di segmenti, di costrurre una teoria completa degli irrazionali; ma le formule, ove si voglia escludere ogni pericolo di ambiguità, si presentano sotto una forma alquanto diversa da quella in uso oggi in Algebra.

Pur convenendo che questa forma è propria delle civiltà in cui viviamo, e che gran parte dei teoremi relativi a questa teoria già trovansi in Euclide, sotto forma differente, tuttavia è necessario accordare le nostre notazioni con quelle usate da tutti.

§9.

Mantenendo sempre distinti il segmento ed il numero reale, suo limite superiore, potremo riprodurre semplificate le P1,2,6,7,8 del §2:

$u,v \varepsilon \mathrm{Sgm} . a \varepsilon \mathrm{R} . \supset :$

1.	$a < \mathrm{l}'u . = . a \varepsilon u$	Df	2.	$a = \mathrm{l}'u . = . \vartheta a = u$	Df
6.	$\mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v . = . u = v$	Df	7.	$\mathrm{l}'u < \mathrm{l}'v . = . \exists v - u$	Df
8.	$\mathrm{l}'u \leqq \mathrm{l}'v . = . u \supset v$				Df

Alcune altre proposizioni si semplificano ancora, se, essendo a un Q, si indica con $\lrcorner a$ quel segmento di razionali, il cui limite superiore è a.

Si ottiene:

§10 Sgm l′ Q ⌟

'1 $\mathrm{Q} = \mathrm{l}' `\mathrm{Sgm}$ Df

$\cdot 2 \quad a \varepsilon Q \,.\supset.\, {}_{\mathrm{I}}a = \imath\, \mathrm{Sgm} \cap u \ni (a = \mathrm{I}'u)$ Df

$\cdot 3 \quad u \varepsilon \mathrm{Sgm} \,.\supset.\, \mathrm{I}'u\, \varepsilon Q \,.\, {}_{\mathrm{I}}\mathrm{I}'u = u$

$\cdot 4 \quad a \varepsilon Q \,.\supset.\, {}_{\mathrm{I}}a\, \varepsilon\, \mathrm{Sgm} \,.\, \mathrm{I}'_{\mathrm{I}}a = a$

$a,b \varepsilon Q \,.\supset:\quad \cdot 5 \quad a = b \,.=.\, {}_{\mathrm{I}}a = {}_{\mathrm{I}}b$

$\cdot 6 \quad a + b = \mathrm{I}'({}_{\mathrm{I}}a + {}_{\mathrm{I}}b) \qquad \cdot 7 \quad a \times b = \mathrm{I}'({}_{\mathrm{I}}a \times {}_{\mathrm{I}}b)$ Df

$\cdot 8 \quad a < b \,.=.\, b \varepsilon\, b + Q \,.=.\, \exists\, ({}_{\mathrm{I}}b) - ({}_{\mathrm{I}}a)$

§11

Si può introdurre il limite inferiore, l_1, dei numeri di una classe o direttamente, come nelle P1-8, o collegandolo col limite superiore come nelle P9-11 seguenti. Il segno « Df » qui vuol dire « definizione possibile ».

$u,v \varepsilon \mathrm{Cls'R} \,.\, a \varepsilon R \,.\supset:$

$\cdot 1 \quad a > \mathrm{l}_1 u \,.=.\, a \varepsilon\, \vartheta u$ Df

$\cdot 2 \quad a = \mathrm{l}_1 u \,.=.\, a/\vartheta = u/\vartheta$ Df

$\cdot 3 \quad \exists\, R \cap x \ni (x/\vartheta = u/\vartheta) \,.\supset.\, \mathrm{l}_1 u = \imath\, R \cap x \ni (x/\vartheta = u/\vartheta)$ Df

$\cdot 4 \quad a = \mathrm{l}_1(a/\vartheta) = \mathrm{l}_1 \iota a \qquad \cdot 4' \quad 1 = \mathrm{l}_1/\vartheta$

$\cdot 5 \quad \mathrm{l}_1 u = \mathrm{l}_1 v \,.=.\, u/\vartheta = v/\vartheta$ Df

$\cdot 6 \quad \mathrm{l}_1 u = \mathrm{l}_1(u/\vartheta)$

$\cdot 7 \quad \mathrm{l}_1 u > \mathrm{l}_1 v \,.=.\, \exists\, (v/\vartheta) - (u/\vartheta)$ Df

$\cdot 8 \quad \mathrm{l}_1 u \geqq \mathrm{l}_1 v \,.=.\, u/\vartheta \supset v/\vartheta$ Df

$\cdot 10 \quad \mathrm{I}'u = \mathrm{l}_1\, R - (\vartheta u)$ Df $\qquad \cdot 11 \quad \mathrm{l}_1 u = \mathrm{I}'R - (u/\vartheta)$ Df

$\cdot 11 \quad \mathrm{I}'u = \mathrm{l}_1 v \,.=.\, \vartheta u = R - (v/\vartheta) \,.=.\, v/\vartheta = R - (\vartheta u)$ Df

§12

La parola « definizione », anche nei libri di Matematica, ha più significati. Il prof. C. Burali-Forti, nel trattato « *Logica Matematica,* Milano a. 1894 p. 120-148 » ha classificate le definizioni che si incontrano nelle teorie già espresse in simboli ideografici, distinguendole coi nomi: definizioni nominali, per induzione, per astrazione, ecc. Di queste varie specie di definizioni, le nominali si presentano come le più soddisfacenti. Molte definizioni delle altre specie contenute nei primi lavori di *Logica Matematica* poterono essere trasformate in definizioni nominali. Delle definizioni per astrazione, in F_2N2 (Aritmetica) non se ne incontra più che una sola, la P210·1, per definire il numero cardinale, o potenza, di un insieme.

Il $\mathrm{I}'u$, nella teoria esposta, salvo il caso speciale del §6, non è definito nominalmente, cioè non si ha una definizione della forma

$u \varepsilon \mathrm{Cls'R} \,.\supset.\, \mathrm{I}'u =$ (espressione composta coi segni precedenti)

ma è definito per astrazione, cioè sono definite le relazioni $= > <$ fra un razionale ed un limite superiore, e fra due limiti superiori.

Una definizione nominale non si può dare altrimenti che identificando i numeri reali coi segmenti di razionali, e costruendo sui primi una nomenclatura diversa da quella già usata sui secondi.

Porremo adunque:

$u \varepsilon \mathrm{Cls'R} . \supset .$

$\cdot 1 \quad \mathrm{l}'u = \vartheta u$ Df

$\cdot 2 \quad \mathrm{l}'u \leqq \mathrm{l}'v . =. \vartheta u \supset \vartheta v$ Df

$\cdot 3 \quad a \varepsilon \mathrm{R} . \supset . a = \mathrm{l}'\vartheta a$ Df

Colla P·1 noi conveniamo di indicare con $\mathrm{l}'u$ (limite superiore degli u) ciò che già si è chiamato ϑu.

P·2. Noi scriveremo $\mathrm{l}'u \leqq \mathrm{l}'v$ invece di $\vartheta u \supset \vartheta v$; cioè se la relazione considerata fra le classi u e v è scritta coi ϑ, metteremo framezzo il segno $\supset$; se è scritta coi l', useremo il segno $\leqq$.

Secondo l'uso comune i numeri razionali sono compresi fra i reali: $\mathrm{R} \supset \mathrm{Q}$. Questa coincidenza non è una verità assoluta, ma il risultato di una convenzione generale, secondo la quale i numeri assoluti sono contenuti nei numeri con segno, $\mathrm{N}_0 \supset \mathrm{n}$, gli intieri nei fratti, $\mathrm{N}_1 \supset \mathrm{R}$, e così via, nelle successive generalizzazioni del termine «numero». Queste generalizzazioni non trovansi ad esempio in Euclide, ove sono sempre considerati come oggetti distinti un numero intero, e la sua ragione all'unità.

Volendo far entrare gli R nei Q, poniamo la definizione P·3, cioè identifichiamo, ossia indichiamo collo stesso segno il razionale a, e il limite superiore dei razionali minori di a.

Essa, tenendo conto della ·1 si può pure scrivere:

$\cdot 3' \quad a \varepsilon \mathrm{R} . \supset . a = \vartheta a .$

Si deduce:

$\cdot 3'' \quad 1 = \vartheta ,$

cioè, d'ora in avanti, invece di ϑ si scriverà 1; e il lettore dovrà dedurre dal contesto della formula se il segno 1 indica il numero intiero 1, ovvero la classe ϑ.

Quantunque i simboli Q e Sgm siano equivalenti, pure, se $a, b \varepsilon \mathrm{Q}$, $a-b$, a/b,... hanno il valore dato dalle P 14 ecc, di §2; se invece a e b sono Sgm, le altre operazioni hanno il significato di cui è parlato nel §8.

Definizioni della forma delle ·3, ·3', ·3'' già si incontrano in $\mathrm{F_2N2}$:

P039·1 $\quad a \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset . a = +a$

054 $\quad a, b \varepsilon \mathrm{N}_1 . \supset . b/a = (\times b) \| /a)$

le quali dicono che noi indichiamo collo stesso segno il numero assoluto a, e l'operazione aggiungere a;

come pure il quoziente b/a, e l'operazione «moltiplicare per b e poi dividere per a».

In queste definizioni ambi i membri sono espressioni note.

Però la via indicata dal presente §12, quantunque elimini la definizione per astrazione del l', parmi meno pratica di quella seguita precedentemente.

Accennati così varî procedimenti con cui si può ridurre in simboli ideografici la teoria degli irrazionali, è interessante l'esaminare come alcuni Autori hanno esposte queste definizioni.

Guilmin, *Définitions précises arithmétiques des racines et des logarithmes incommensurables,* Nouv. Annales, a 1847, p. 313-323, dice:

« Qu'est-ce que $\sqrt{2}$?...

« Les racines approchées par défaut forment une suite croissante; ces « nombres ont cependant une limite supérieure, car aucun d'eux ne peut « depasser une quelconque des racines correspondantes par excès.»

Cioè, secondo l'A., $\sqrt{2}$ è, per definizione, il limite superiore della classe di razionali formata dalle radici approssimate per diffetto.

Ciò differisce poco dalla nostra teoria, secondo cui il numero reale è, per definizione, il limite superiore di una classe di razionali.

J. Bertrand, *Traité d'Arithmétique,* Paris, a. 1851, oltre il passo già citato nel §1, dice a p. 231:

« Nous supposons que cette définition (du nombre incommensurable) con- « siste a indiquer quels sont les nombres commensurables plus petits ou plus « grands que lui. »

Quindi, secondo l'A. un numero reale è definito mediante la classe dei razionali minori di esso (o quella dei maggiori).

Questa classe di numeri razionali, che diciamo essere più piccoli del numero a definirsi, non può essere qualunque. E sottinteso che se contiene un R, contenga i suoi minori; che non abbia massimo; che esista effettivamente, e che non coincida colla classe R. Questa classe è pertanto un segmento. Dunque un numero reale è definito da un segmento.

Il passo per distinguere Q da Sgm non è sviluppato.

R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, a. 1872, p. 12, dice:

« Ist nun irgend eine Eintheilung des Systems R in zwei Classen A_1, A_2 « gegeben, welche nur die charakteristische Eigenschaft besitzt, das jede Zahl « a_1 in A_1 kleiner ist, als jede Zahl a_2 in A_2, so wollen wir der Kürze halber « eine solche Eintheilung einen Schnitt nennen und mit (A_1, A_2) bezeichnen ».

La sezione (Schnitt) dell'A. è l'insieme d'un segmento A_1 e del suo complemento $R-A_1$, se essa è determinata da un numero irrazionale, ovvero anche da un razionale, purchè questo non si comprenda nel segmento:

« Jede rationale Zahl a zwei Schnitte hervorbringt, welche wir aber nicht « als wesentlich verschieden ansehen wollen ».

Eliminato questo caso di eccezione, lo Schnitt ed il segmento sono forme diverse della stessa idea.

« Jedesmal nun, wenn ein Schnitt (A_1, A_2) vorliegt, welcher durch keine « rationale Zahl hervorgebracht wird, so erschaffen wir eine neue, eine « irrationale Zahl α, welche wir als durch diesen Schnitt (A_1, A_2) voll- « ständig definirt ansehen. »

In questo « erschaffen » (creare) è appunto indicato che il numero reale è considerato come un ente diverso dalla sezione, o segmento.

M. Pasch, *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung,* a. 1872, alla cui teoria noi maggiormente ci siamo avvicinati nei §8 e 12, chiama

« Strecke » il segmento. Si può riscontrare l'equivalente delle nostre P ·3·1 del §12 a pag. 4 e 11 sotto la forma:

« Wird die Strecke A durch die Zahl a begrenzt, so ist $A=a$ ».

« ... werden wir uns einfach des Wertes „ Zahl " künftig statt „ Strecke " « ... bedienen. »

G. Ricci, *Della teoria dei numeri irrazionali secondo il concetto di Dedekind*, Giorn. di Matem., a. 1897, t. 34, introduce gli irrazionali mediante il *Postulato*: « Ad ogni ripartizione di Dedekind tale che ogni numero razionale trovi posto o nella prima o nella seconda classe corrisponde uno ed un solo numero, che sarà detto *numero irrazionale* ».

G. Cantor, *Math. Ann.*, t. 5, a. 1871, p. 128 e *Math. Ann.*, t. 21, a. 1883, p. 567, prende per base una successione di numeri razionali, che soddisfano alla condizione generale di convergenza; il numero reale è un ente determinato da questa successione: « und ich ordne ihr eine durch sie « zu definirende Zahl zu ».

Essa si può enunciare sotto la forma:

$$x \varepsilon \, \mathrm{r f N_0} : h \varepsilon \mathrm{R} \, . \supset h \, . \, \exists \, \mathrm{N_1} \cap m \varepsilon [\, p \varepsilon \, m + \mathrm{N_1} \, . \supset p \, . \, \mathrm{mod}(x_p - x_m) < h] :$$
$$\supset . \, \lim x \, \varepsilon \, \mathrm{q}$$

che, sotto forma di teorema, trovasi in Bolzano, a. 1817 §7.

Ora ogni successione di razionali crescente continuamente, ma non indefinitamente, soddisfa alla condizione di convergenza. E viceversa ogni quantità è il limite di una successione siffatta di razionali. Quindi basta limitarci a queste serie particolari. Ma allora il limite della successione è il limite superiore della classe formata dai numeri della successione:

$$f \varepsilon \, (\mathrm{r f N_0}) \mathrm{cres} \, . \supset . \, \lim f = \mathrm{l}' f \, ' \mathrm{N_0}$$

Sicchè, mettendoci da questo punto di vista più semplice, ma altrettanto generale, la teoria di Cantor si riduce a quella dei limiti superiori.

Ch. Méray, *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale*, a. 1894, riproduce una sua teoria, già pubblicata nel 1869 e 1872, e simile a quella di Cantor. Parte dalle « variantes convergentes », cioè funzioni di più numeri interi, detti indici, che soddisfano al criterio generale di convergenza; e a pag. 31:

« On préfère uniformiser et imaginer le langage par un ensemble de « conventions... »

« Quand une variante convergente ne tend pas vers quelque limite, on « lui en assigne une *idéale*, qu'on nomme un nombre ou une quantité incom- « mensurable. »

Weierstrass nelle sue lezioni espose una teoria dei numeri reali, di cui non conosciamo che riproduzioni discordanti. Vedasi *Encyklopädie*, a. 1898, p. 55, nota (27).

J. Tannery, *Introduction à la théorie des Fonctions*, a. 1886, espone le teorie di Dedekind e di Cantor.

P. Bachmann, *Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen*, a. 1892, considera due successioni, l'una crescente e l'altra decrescente, di cui la differenza diventa infinitamente piccola, e pone la definizione (p. 8):

« Die beiden gegen einander convergirenden Zahlenreihen bestimmen « mit einander eine Zahl oder es entspreche ihnen eine Zahl. »

A. Capelli, *Algebra Complementare,* a. 1898, seguendo altre sue pubblicazioni precedenti, sostituisce alle due successioni delle classi; e quantunque indichi (p. 12) con a_1 a_2... gli individui di una classe, avverte (p. 28):

« che con ciò non intendiamo stabilire fra le a alcun ordine di succes- « sione o di grandezza. »

Altri A. fanno lievi modificazioni ai metodi precedenti.

Un Q è definito da un Sgm e viceversa dato questo è determinato quello; come pure un Q è definito da una sezione di Dedekind, e la definisce, eliminata l'eccezione di cui si è parlato, poichè la sezione ed il Sgm si corrispondono univocamente fra loro. Invece dato un Q, esistono infinite successioni di cui esso è il limite, ed esistono infinite classi di R di cui esso è il limite superiore, ed infinite coppie di classi contigue di cui esso è limite di separazione.

Quasi tutti gli A. che partono da una rappresentazione non reciproca dei Q, dànno delle operazioni $+$ e $\times$ definizioni non omogenee.

La definizione della somma, ad es. deve avere la forma:

$a,b \varepsilon Q . \supset . a+b =$ (espressione composta colle lettere a e b e con simboli fissi).

La forma più semplice è quella che trovasi in §10 P·6.

Non è regolare il definire come somma di due irrazionali il limite della successione che si ottiene sommando i termini corrispondenti di due successioni che determinano i due sommandi. Ciò che si definisce è funzione delle due successioni, ma non dei numeri reali dati, poichè queste successioni non ne sono funzioni. Le definizioni non omogenee sono numerose in molti libri. Quantunque qui si possano poi giustificare, col far vedere che ciò che si definisce è indipendente dalla scelta particolare della rappresentazione dei numeri considerati, pure è bene abolirle, perchè costituiscono sempre una difficoltà per i discenti, e si possono sostituire con definizioni esatte.

Parimenti non si può assumere per definizione la P:

$$u,v \varepsilon \mathrm{Cls'R} . \supset . \mathrm{I}'u + \mathrm{I}'v = \mathrm{I}'(u+v)$$

Conchiudendo, si hanno le proposizioni:

a) « Ogni classe di numeri (razionali), tutti inferiori ad un numero « assegnabile, ha per limite superiore un numero reale ».

In simboli:

$$u \varepsilon \mathrm{Cls'R} . \exists u . m \varepsilon \mathrm{R} . u \supset \vartheta m . \supset . \mathrm{I}'u \, \varepsilon \mathrm{Q} . \mathrm{I}'u \leqq m$$

Essa si enuncia in molti trattati sotto la forma: « Una variabile crescente continuamente, ma non indefinitamente, tende ad un limite ».

b) « Ogni segmento (di razionali) ha un estremo a destra; ovvero ogni « scomposizione dei numeri (razionali) in due classi tali che ogni numero « della prima sia minore d'ogni numero della seconda, è fatta da un numero « reale ». In simboli:

$$u \varepsilon \mathrm{Sgm} . \supset . \mathrm{I}'u \, \varepsilon \mathrm{Q}$$

c) « Ogni successione (di razionali), che soddisfi al criterio di conver-« genza, converge effettivamente verso un limite ».

Già fu espressa in simboli.

d) « Date due classi (di razionali), tali che ogni numero della prima sia minore (o =) d'ogni numero della seconda, e tali che il limite inferiore delle loro differenze sia 0, esiste uno ed un solo numero reale maggiore (o =) di tutti i numeri della prima, e minore (o =) di tutti i membri della seconda. »

In simboli:

$$u,v \varepsilon \mathrm{Cls'R} \,.\, \exists u \,.\, \exists v : x \varepsilon u \,.\, y \varepsilon v \,.\supset x,y.\, x \leqq y : h \varepsilon \mathrm{R} \,.\supset h \,.\, \exists\, (x,y) \ni [x \varepsilon u \,.$$
$$y \varepsilon v \,.\, \mathrm{mod}(y-x) < h :\supset .\, \mathrm{l}'u\, \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{l}_1 v\, \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{l}'u = \mathrm{l}_1 v$$

Queste P, tutte vere, anche se si sopprime la condizione « di razionali » scritta fra parentesi, si deducono facilmente l'una dall'altra. Una di esse deve essere trasformata in definizione degli irrazionali. Varia l'opinione degli A. sulla sua scelta.

Nelle applicazioni, specialmente all'analisi, si ricorre più spesso alle P *a*) e *c*). Anzi nei comuni trattati, per riconoscere la convergenza delle serie, o di integrali, ecc. si fa uso quasi costante della *c*). Quindi è giustificata l'opinione di Cantor (ib. p. 565), che il suo metodo sia « die einfachste und natürlichste von allen » e, come parlando di quello di Dedekind, p. 567, Egli dica: « die Zahlen in der Analysis *niemals* in der Form von " Schnitten ,, darbieten, in welche sie erst mit grosser Kunst und Umständlichkeit gebracht werden müssen. »

Ma in alcuni miei lavori ho fatto vedere che la definizione di integrale dipende dal solo concetto di limite superiore, e non da quello di limite verso cui converge una funzione; come pure, nelle applicazioni geometriche, che convenga ad es. definire la lunghezza d'un arco di curva quale limite superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte, anzichè quale limite verso cui converge la lunghezza di queste (vedi *Encyclopädie*, e. 72). Sicchè la forma più conveniente del principio che si applica costantemente in analisi parmi sia la *a*), a cui quindi conviene attaccare direttamente la definizione dell'irrazionale.

Stampato coi tipi della « Rivista di Matematica » dalla Tip. Gerbone
Via Gaudenzio Ferrari, 3 — Torino.

Pubblicazioni della Casa Fratelli BOCCA

Cassani F. — Corso di matematica complementare: Complementi d'algebra. Torino 1885, in-12° . . . . . L. 3 —
— Elementi di stereometria. Torino 1885, in-12° . . . . » 2 50
Castellano F. — Algebra ad uso dei licei ed istituti. Torino 1891, in-12° . . . . . » 3 —
Cesàro E. — Corso di analisi algebrica con introduzione al calcolo infinitesimale. Torino 1894. in-8° . . . . . » 12 —
— Introduzione alla teoria matematica della elasticità. Torino 1894, in-8° . . . . . » 6 —
Cuffia G. — Aritmetica ragionata e primi elementi d'algebra e geometria. Bergamo 1876, in-16° . . . . . » 2 20
Daddi G. B. — Geometria pratica: Della combinazione delle osservazioni nel metodo dei minimi quadrati. Torino 1879, in 8° » 3
D'Ovidio E. — Geometria analitica. Torino 1896, in-8° . » 10 —
Gatti S. — Elementi di geometria piana con applicazione dell'algebra. Torino 1876, in-8° . . . . . » 3 50
Gerbaldi F. — Primi elementi di aritmetica: 5 fasc. legati » 2 60
Peano G. — Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre* di H. Grassmann. Torino 1888, in-8° . . . . . » 3 50
— Principii di geometria logicamente esposti, 1889, in-8° . » 2 50
— Aritmetices principia nova methodo exposita, 1889, in-8° . » 2 50
— Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, 1887, in-8° » 10 —
— Lezioni di analisi infinitesimale, 2 vol. in 8°. 1893 (esaurito).
— Elementi di calcolo geometrico, in-8° . . . . . » 1 —
— (**Genocchi** A.) — Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale. Torino 1884, in-8° . . . . . » 10 —
Porta F. — Geometria analitica. Torino 1890, in-8° . . » 8 —
— Geometria piana. Torino 1889, in-16° . . . . . » 3 —
— Geometria solida. Torino 1887, in-16° . . . . . » 3 —
— Complementi di matematica, in-16° . . . . . » 3 50
— Goniometria e trigonometria piana. Torino 1885, in-16° . » 2 50
— Trigonometria sferica. Torino 1886, in-16° . . . . . » 2 —
Rivera A. R. — Problemi di geometria e di trigonometria, con le loro soluzioni. Torino 1861, in-8° . . . . . » 5 —
Serret G. A. — Trattato di trigonometria piana e sferica, in-16° » 3 50
Staudt. — Geometria di posizione, in-8° . . . . . » 8 —

PUBBLICAZIONI DELLA RIVISTA DI MATEMATICA

Rivista di Matematica, volumi I - V, anni 1891-95. Prezzo L. 8 al vol.
Introduction au Formulaire, a. 1894. Prezzo L. 2.
Formulaire de Mathématiques t. I a. 1895. Prezzo L. 6.

In corso di pubblicazione.

Revue de Mathématiques (Rivista di Matematica), tome VI. Sono usciti i numeri 1°, a. 1896, 2° e 3° a. 1898, 4° a. 1899.
Formulaire de Mathématiques, tome II. Sono usciti i numeri 1°, a. 1897, 2° a. 1898. Il N° 3 è in corso di stampa.
Prezzo d'abbonamento alla *Revue*, tome VI, e *Formulaire* t. II, L. 10: per l'estero L. 11.

NUOVE PUBBLICAZIONI

C. ALASIA — *Esercizi ed applicazioni di calcolo infinitesimale ed integrale*, Città di Castello, S. Lapi, 1898 p. XII + 219, L. 4.

I. ALEXANDROFF — *Problèmes de géométrie élémentaires*, trad. du russe par D. Aitoff. Paris, Hermann, 1899, pag. XII + 154.

F. DE HEUSCH — *Cours d'analyse; Calcul différentiel.* Bruxelles, Castaigne, 1898, p. 278.

F. D'ARCAIS — *Corso di Calcolo infinitesimale*, seconda edizione con aggiunte e modificazioni. Vol. I, Padova, Draghi 1898. P. XII + 523 (Prezzo dell'opera completa in due vol. L. 18).

W. R. HAMILTON — *Elements of quaternions.* Second edition, edited by CHARLES JOLY. Vol. I. pag. XXXIV + 583. London, Longmans, Green and Co. 1899.

G. INGRAMI — *Elementi di Geometria*, per le scuole secondarie sup. Bologna, Zanichelli, 1899, pag. VII + 288, L. 3,50.

A. PRINGSHEIM — *Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse.* Leipzig, Teubner, 1898.

G. GARBIERI — *Elementi di Aritmetica razionale*, secondo i programmi dei ginnasi superiori. Prima ediz. con la collaborazione del prof. ENRICO DE AMICIS. Milano, Trevisini, 1898, p. 188. L. 1,80.

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES

(RIVISTA DI MATEMATICA)

PUBLIÉE PAR

G. PEANO

Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin

Tome VII

TURIN

BOCCA FRÈRES

LIBRAIRES

—

1900-1901

TABLE DES MATIÈRES

G. PEANO — Formules de logique mathématique . . . . p. 1
M. NASSÒ — Alcuni teoremi di Aritmetica . . . . . » 42
P. BUFFA — Alcune formule di logica . . . . . » 56
F. CASTELLANO — Alcune identità . . . . . » 58
G. VACCA — Additions au Formulaire . . . . . » 59
M. CHINI — » » . . . . . » 66
G. ENESTRÖM — » » . . . . . » 66
G. PEANO — » » . . . . . » 67
T. BOGGIO — » » . . . . . » 70
A. PADOA — Numeri interi relativi . . . . . » 73
International Association for Quaternions . . . . . » 84
Additions et corrections au Formulaire a. 1901, par E. CANTONI, C. CIAMBERLINI, G. ENESTRÖM, A. PADOA, G. PEANO, A. RAMORINO, O. STOLZ, G. VACCA . . . . . » 85
Albino Nagy, Necrologia (PADOA) . . . . . » 111
Recensione — O. Stolz und I. A. Gmeiner, Theoretische Arithmetik (Peano) » 112
B. RUSSELL — Sur la logique des relations . . . . . » 115
L. COUTURAT — La logique de Leibniz d'après des documents inedits (Recensione, VAILATI) . . . . . » 148
Dizionario di Matematica — Parte I, Logica matematica (PEANO) . » 160
Additions au Formulaire a. 1901, par A. ARBICONE, T. BOGGIO, E. CANTONI, F. CASTELLANO, G. PEANO, G. VACCA . . . . . » 173

Sci. 8 75. 50

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES

(RIVISTA DI MATEMATICA)

PUBLIÉE PAR

G. PEANO

Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin

TOME VII - N° 1

SOMMAIRE

G. Peano — Formules de logique mathématique . . . p. 1
M. Nassò — Alcuni teoremi di Aritmetica. . . . . » 42
P. Buffa — Alcune formule di logica . . . . . » 56
F. Castellano — Alcune identità . . . . . » 58
G. Vacca — Additions au Formulaire . . . . . » 59
M. Chini — » » . . . . . » 66
G. Eneström — » » . . . . . » 66
G. Peano — » » . . . . . » 67
T. Boggio — » » . . . . . » 70

TURIN

BOCCA FRÈRES

LIBRAIRES

1900

NUOVE PUBBLICAZIONI

C. ALASIA — *Geometria e trigonometria della sfera.* Milano, Hoepli, 1900, pag. VIII+207. Lire 1,50.

— *Calcolo grafico ed applicazioni* — Città di Castello, S. Lapi, 1899, pag. 97+7 tav. Lire 4.

F. AMODEO — *Aritmetica particolare e generale*, volume I. Napoli, Pierro, 1900, pag. XI+415. Lire 3,50.

F. D'ARCAIS — *Corso di Calcolo Infinitesimale*, seconda edizione con aggiunte e modificazioni, volume II. - Parte I. Padova, Draghi, 1900, pag. 368. — (Prezzo dell'opera completa in due volumi Lire 18).

G. BELLACCHI — *Lezioni ed esercizi di Algebra complementare.* Fascicolo II. Firenze, Barbera, 1899, pag. 143. Lire 2.

R. BETTAZZI — *I problemi di Aritmetica pratica.* Torino, Paravia, 1900, pag. 70. Lire 1,20.

E. CEROIGNANI — *XX Lezioni d'Aritmetica.* 1° fasc. (lez. 1-10), Firenze, Ramella, 1899, pag. 142.

H. FEHR — *Application de la méthode vectorielle de Grasmann à la géométrie infinitesimale*, Paris, Carré et Naud, 1899, pag. 94.

P. GAZZANIGA — *Libro di Aritmetica e di Algebra elementare.* Parte I°, III ediz. Verona, Drucker, 1900, pag. 126. Lire 2.

I. GHERSI — *Metodi facili per risolvere i Problemi di geometria elementare.* Milano, Hoepli, 1900, pag. XII+190. Lire 1,50.

F. GIUDICE — *Geometria solida.* Brescia, Apollonio, 1900, p. 279, 8 tav.

F. INVREA — *Elementi di fisica*, vol. primo, Meccanica Calore. Torino, Unione Tip. Editrice, 1900, pag. XX+344. Lire 5.

P. MANSION — *Éléments de la théorie des déterminants* 6ième éd. Paris, Gauthier Villars, 1900, pag. IV+92.

B. NIEWENGLOWSKI ET L. GÉRARD — *Cours de géométrie élémentaire. Géométrie dans l'espace.* Paris, Carré et Naud, 1899, pag. 496.

S. ORTU CARBONI — *Sunto di Geometria elementare.* Planimetria. Livorno, Giusti, 1900, pag. VIII+116. Lire 1.

REVUE DE MATHÉMATIQUES
Tome VII — 1900

HARVARD COLLEGE LIBRARY
AUG 11 1900
CAMBRIDGE, MASS.

FORMULES DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE

par G. PEANO

La lettre F suivie de l'année, indique les éditions des « formules de Logique mathématique », que nous avons successivement publiées :

F1888 = Calcolo geometrico, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva.

F1889 = Arithmetices principia, nóva methodo exposita.

F1894 = Introduction au Formulaire de Mathématiques.

F1895 = Formulaire de Mathématiques t.1, partie I. Il a été publié partiellement dans la RdM. a.1891-1895.

F1897 = Formulaire de Mathém. t.2 N1.

F1898 = » » t.2 N2.

F1899 = » » t.2 N3.

Les symboles de Logique, combinés avec les symboles plus répandus de l'Analyse, constituent une idéographie, par laquelle on peut exprimer les différentes théories mathématiques.

Cette idéographie est déjà assez vaste, car le Formulaire a.1899, contient les principales propositions, de l'Arithmétique à la Géometrie et aux principes du calcul intégral, complétement exprimées en symboles.

Ces propositions ont la forme des formules algébriques communes. La différence est que les formules communes ne sont que la partie symbolique de l'énoncé d'une proposition ; les formulaires publiés par différents Auteurs ne contiennent en général que des fragments de propositions ; ces formules isolées sont quelquefois inintelligibles ; les conditions restrictives pour la validité des théorèmes manquent en général.

Les formules que nous publions ici sont des propositions complètes, avec la signification des lettres, et toutes les limitations nécessaires.

Les mots du langage mathématique commun montent à plusieurs milliers (il y en a 1000 à peu près dans les Œuvres d'Archimède). Toutes ces idées sont exprim'es, dans F1899, par environ 100 symboles.

Nous avons conservé aux symboles la forme commune, lorsque cela a été possible; ex: $+$, $-$, $\times$, $>$, $=$, 0, 1, 2,... log, sin, e, π... Lorsqu'il y a plusieurs notations en usage, nous avons adopté la plus ancienne, ou la plus répandue. Lorsque nous avons dû introduire un symbole nouveau, nous avons pris le mot du langage ordinaire, plus ou moins abrégé; ex: pnt, vct, quot, rest,...

Les propositions écrites en symboles sont notablement plus courtes que dans le langage ordinaire. On peut le remarquer dans toute proposition symbolique, qui soit suivie de l'énoncé ordinaire selon l'A. qui l'a trouvée. Dans quelques cas, comme dans les limites, les séries, les dérivées, l'énoncé ordinaire est tellement compliqué, qu'on supprime en général quelques conditions importantes.

Cette abréviation ne dépend qu'en minime partie, d'avoir écrit « rest » au lieu de « reste », mais bien de l'analyse des idées et par la suppression des inutiles.

Les démonstrations, aussi réduites complètement en symboles, consistent dans une suite de transformations des propositions précédentes dans la proposition à démontrer, selon des règles étudiées par la Logique mathématique.

Dans le langage ordinaire, on a plusieurs formes pour représenter une même idée indiquée ici par un symbole seul. Nous donnons à chaque symbole un nom; mais il convient de lire ce symbole, ou un ensemble de symboles, sous une forme qui satisfasse aux lois du langage ordinaire.

Un peu d'exercice permet de lire les formules, en donnant aux propositions la tournure à laquelle nous sommes habitués.

L'histoire de la Logique mathématique est contenue dans les formules suivantes; car les propositions sont accompagnées de la citation des Auteurs qui les ont énoncées. On peut la résumer en quelques mots.

Les propositions de logique expriment des formes de raisonnement très communes dans les sciences mathématiques; elles sont en partie intuitives. On ne peut pas indiquer celui qui, le

premier a fait usage du raisonnement d'une forme donnée ; mais nous pouvons bien indiquer l'A. qui l'a explicitement énoncée, et qui l'a réduite en symboles.

Quelques formes de raisonnement, comme le syllogisme ont été analysées par Aristote (Voir §1 P2·4).

Peut-être que dans les œuvres des scolastiques on trouvera d'autres formes ; mais la logique mathématiqne doit ses principaux théorémes à Leibniz. Il a introduit des symboles pour indiquer les opérations et les relations logiques entre classes ; et il a écrit les principales formules logiques qui contiennent une seule fois le signe =. (Voir §1 P2·4, 4·2, §2 P2·1, etc.).

Le nombre de ces formules a été augmenté par Boole a.1854 (§1 P4·3...) et par Schröder a.1877 (§2 P3·2...).

McColl a.1878 et Peirce a.1867-1880 ont introduit les signes de déduction et d'égalité entre propositions : ils sont arrivés à exprimer des formules contenant plusieurs de ces signes, réduites partiellement en symboles par les A. précédents. Voir §1 P3·6 4·0 5·3.....

Un grand nombre d'A., qui ont étudié les mêmes questions, sont mentionnés dans les formules suivantes, ou dans les éditions précédentes, ou leurs résultats ne sont pas encore réduits en symboles.

Dans F1888 et 1889, par l'introduction des signes ε et $\ni$, nous avons expliqué la relation entre les deux calculs, entre classes, et entre propositions, et nous avons entièrement énoncé en symboles un ensemble de propositions.

Plusieurs A. ont appliqué cette idéographie à différentes théories mathématiques ; en voici la liste :

F. Amodeo, *Aritmetica particolare e generale*, Napoli, 1900, p.411.
R. Bettazzi, F t.1 partie VII. RdM. t.4 p.161.
C. Burali Forti, Collaboration à F t.1 partie III. RdM. t.3 p.75.
— F t.1 partie IV. *Teoria delle Grandezze*. RdM. t.3 p.76.
— *I numeri negativi*. RdM. t.3 p.138.
— *Sulle classi derivate a destra e a sinistra*, TorinoA. 1894.
— *Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti*, PalermoR. 1894.
— *Logica matematica*, Milano, Hoepli, 1894.
— *Sul limite delle classi variabili*, TorinoA. 1895.
— *Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles*. MA. t.47 p.20,

C. Burali Forti, *Il metodo del Grassmann nella Geometria proiettiva*, PalermoR. 1896-97.
— *Le classi finite*, TorinoA. 1896.
— *Sopra un teorema del sig. G. Cantor*, TorinoA. 1896.
— *Exercice de traduction en symboles de Logique Mathématique*. Bulletin de Mathématiques élémentaires, 1897.
— *Una questione sui numeri transfiniti*, PalermoR. 1897.
— *Les propriétés formelles des opérations algébriques*, RdM. t.6 p.141.
— *Sui simboli di Logica matematica*. Il Pitagora, a.1900, p.1. 65, 129.
F. Castellano, Collaboration à F t.1 partie II. RdM. t.3 p.1.
M. Chini, Collaboration à F1898.
L. Couturat, *La logique mathématique de M. Peano*. Revue de Métaphysique et de Morale, a.1899 p.616.
G. Fano, *Contributo alla teoria dei numeri algebrici*, F t.1 partie IX. RdM. t.5 p.1.
C. Garibaldi, *Contributo alla teoria degli aggregati*, PalermoR. 1895.
F. Giudice, F t.1 partie VIII. RdM. t.4 p.163.
— *Sulla determinazione dei Numeri Reali mediante somme e prodotti*. TorinoA. 1894.
A. Padoa, Collaboration à F1898, F1899.
— *Di alcune proposizioni fondamentali relative al mutuo separarsi di coppie di punti*. RdM. t.6, p.35.
— *Ideografia delle frazioni irriducibili*. RdM. t.6, p.90.
— *Note di Logica matematica*. RdM. t.6, p.105.
— *Conférences sur la Logique mathématique*. Université nouvelle de Bruxelles, a.1898.
— Conferenze tenute nella R. Università di Pavia, a.1898-99.
— » » Roma, a.1900.
G. Peano, *Principii di Geometria*, Torino, Bocca, a.1889.
— *Les propositions du Vième livre d'Euclide*, Mathesis t.10 a.1890. (Reproduit par Dickstein, *Pojecia i metody matematyky* a.1891).
— *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires*. MA. t.37 a.1890.
— *Principii di Logica matematica*. RdM. t.1 a.1891.
— *Principios de Lógica matemática*. El Progreso matemático a.1892 p.20. (Traduction de la Note précédente).
— *Sommario dei libri VII, VIII e IX d'Euclide*. RdM. t.1.
— *Formule di Logica matematica*. RdM. t.1 p.24, 182.
— *Sul concetto di numero*. RdM. t.1 p.82, 256.
— *Sulla definizione del limite d'una funzione*. RdM. t.2 p.77.
— *Lezioni di Analisi infinitesimale*, Torino, a.1893. (Une partie a été traduite dans : Genocchi, Differentialrechunung, Deutsch von Bohlmann und Schepp, a.1899).
— F t.1 partie V. RdM. t.4 p.33.
— *Sui fondamenti della Geometria*. RdM. t.4 p.51.
— *Notions de Logique mathématique*. Congrès de Caen, a.1894.

— *Estensione di alcuni teoremi di Cauchy sui limiti.* TorinoA. a.1894.
— *Sulla definizione di integrale.* AdM. a.1895.
(Traduit dans Genocchi, id.).
— *Studii di Logica matematica.* TorinoA. a.1897.
(Traduit dans Genocchi, id.).
— *Generalità sulle Equazioni differenziali ordinarie.* TorinoA 1897.
— *Analisi della Teoria dei Vettori.* TorinoA. a.1898.

M. Pieri, *Sui principii che reggono la Geometria di posizione,* Note I, II, III. TorinoA. 1995-96.
— *Un sistema di postulati per la Geometria Projettiva astratta degli iperspazî.* RdM. a.1896.
— *Sugli Enti primitivi della Geometria proiettiva astratta.* TorinoA. 1897.
— *Nuovo modo di svolgere deduttivamente la Geometria projettiva.* MilanoR. a.1898.
— *I principii della Geometria di posizione.* TorinoM. a.1898. t.48.
— *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Monografia del punto e del moto.* TorinoM. a.1900, t.49.

G. Vacca, Collaboration à F1898, F1899.
— *Sui precursori della Logica matematica.* RdM. t.6 p.121, p.183.

G. Vailati, *Un teorema di logica matematica.* RdM. t.1, p.103.
— *Le proprietà fondamentali delle operazioni della logica deduttiva.* RdM. t.1, p.127.
— *Sui principî fondamentali della geometria della retta.* RdM t.2, p.71.
— *Dipendenza fra le proprietà delle relazioni.* RdM. t.2, p.161.
— *Sulle relazioni di posizione fra punti d'una linea chiusa.* RdM. t.5 p.75.
— *Sulle proprietà caratteristiche delle varietà a una dimensione.* RdM t.5, p.183.
— Collaboration à F t.1 partie I.

G. Vivanti, F t.1 partie VI; RdM. t.4, p.135.

I. Zignago, *Appunti di Aritmetica.* RdM. t.4, p.121.

L'*Algebra der Logik* de M. Schröder a.1890-95 appartient à un autre ordre d'idées. Voir RdM. t.1 p.164, t.6 p.95.

Nous en avons tiré seulement quelques propositions (§2 P3·2).

M. Frege est arrivé de son côté, a.1894, à une idéographie par laquelle il a exprimé des propositions sur l'idée de nombre. Voir RdM t.5 p.122, t.6 p.53·

La dernière édition complète des formules de logique a paru dans F1897. Dans les applications successives on a rencontré de nouvelles propositions, et l'on a vu l'utilité de nouveaux symboles, parus dans F1898 et 1899. Des remarques importantes ont été publiées par MM. Padoa RdM. t.6 et Couturat.

Une nouvelle édition des formules de Logique est donc nécessaire. Nous réproduisons ici toutes les propositions de Lo-

gique entièrement écrites en symboles, à l'exception de quelques unes, qui contiennent des symboles non adoptés dans F1899.

L'utilité des symboles est mise en lumière, et mesurée par leurs applications. Nous supprimons donc toutes les discussions à cet égard contenues dans les éditions précédentes. Il nous suffit de remarquer que les symboles contenus dans le §1, et notamment les trois $\supset$, ε et $\frown$ (sous-entendu) sont d'un usage universel ; ils se rencontrent partout ; combinés avec les symboles de l'Algèbre, ils permettent d'exprimer le plus grand nombre de propositions.

Les autres symboles sont plus rarement adoptés.

Les propositions sont ordonnées selon les signes qui entrent dans leur expression symbolique. Toute proposition est indiquée par un nombre qui a une partie entière et une décimale.

Le signe ❋ indique le changement de la partie entière.

Les abréviations des citations bibliographiques sont expliquées dans F1899.

Table des formules de Logique.

§1	Cls ε α ; $\supset$ $\frown$ =	p. 7	§8	⁝	p.36
§2	$\smile$	p.23	§9	f ʒ	p.36
§3	$\wedge$	p.26	§10	|	p.38
§4	-	p.27	§11	‘ ’	p.38
§5	$\exists$	p.32	§12	sim rcp idem	p.40
§6	ι	p.34	§13	Variab F Funct	p.40
§7	$\imath$	p.35	§14	-1 (inversion)	p.41

§1 Cls ε ɜ ; ⊃ ∩ =

✱ 1. *Notations*

·1 *a b* ...

Les lettres *a b* ... *z a'* ... désignent des objets quelconques.

Les lettres variables, dans le Form., sont toujours en *italique*.

Les signes ayant une signification constante ont une forme spéciale: ⊃ = + − × ..., ou bien sont indiqués par des lettres grecques ε ι Σ, ou par des lettres romaines: Cls log mod ...

On rencontre les lettres variables dans Aristote pour représenter les idées de Logique (V. P2·4); elles sont d'un usage commun chez Euclide pour indiquer des points, des lignes, des nombres, etc. (V. §× P1·3).

Dans ces notes nous dirons qu'une lettre est *réelle* dans une formule, lorsque la valeur de la formule dépend du nom de la lettre ; dans le cas contraire la lettre est *apparente*.

Une P (proposition) ne contenant pas de lettres variables réelles est dite *catégorique*. Sont telles les théorèmes et les définitions ; toutes les lettres qui y figurent sont apparentes.

Une P contenant des variables réelles est dite *conditionnelle*.

P. ex. la P : (soient *a* et *b* des nombres ; on a $ab = ba$)
est catégorique. La P : $ab = ba$
est conditionnelle ; elle est satisfaite si *a* et *b* sont des nombres ; elle ne l'est pas s'ils sont des nombres complexes d'ordre superieur, per ex. des quaternions ; elle n'a pas de signification si *a* et *b* sont des objets dont on n'a pas défini le produit.

A propos des signes ɜ ⊃ | nous donnerons les règles pour reconnaître, à la position, les variables apparentes.

Dans le langage commun les pronoms « ceci, cela, le même, premier, deuxième,... » jouent le rôle des lettres variables. On pourrait les remplacer par les nombres 1, 2,... en faisant des conventions opportunes pour ne pas produire des ambiguïtés dans l'Arithmétique. Voir F1897 p.26.

·2 . ( ) [ ] { }

On divise une formule en parties par des parenthèses ( ) [ ] { } ou par des points.

On écrit un point là où l'on fait la division. Si à cette place on a déjà un point, on écrira un nouveau point, et ainsi de suite. Si *a, b, c,* ... désignent des signes quelconques, les groupements:

a.bc	*ab.c*	*ab.cd*	*a:bc.d*	*ab.cd:e.fg.·.hk.l*

seront identiques à

a(*bc*)	(*ab*)*c*	(*ab*)(*cd*)	*a*[(*bc*)*d*]	{[(*ab*)(*cd*)][*e*(*fg*)]}[(*hk*)*l*]

Nous donnons la préférence aux parenthèses dans les formules algébriques et dans les formules composées comme les algébriques, et aux points pour séparer les propositions partielles d'un théorème; car dans ce cas les parenthèses seraient absolument incombrantes.

Pendant longtemps on a indiqué le groupement des parties d'une formule par une barre horizontale supérieure ou inférieure, dite *vinculum* (Chuquet, Leibniz, ...). Selon cette convention les groupements précédents seront indiqués par

$\underline{abc}$ $\quad$ $\underline{abc}$ $\quad$ $\underline{\underline{abcd}}$ $\quad$ $\underline{\underline{abcd}}$ $\quad$ $\underline{\underline{\underline{\underline{abcdefg}}}\,\underline{\underline{hkl}}}$

Cette convention, très claire, présente quelque difficulté typographique. Elle ne se rencontre plus aujourd'hui que dans les fractions et les racines.

Si l'on complète les vinculums, en les écrivant aussi sous une lettre seule, on voit qu'il y a autant de points que des espaces vides dans les vinculums; les points sont les compléments des vinculums.

La suite de trois lettres peut être décomposée dans les deux formes écrites; la suite de quatre lettres *abcd* dans les 5 formes:

$$a : bc \,.\, d \qquad a : b \,.\, cd \qquad ab \,.\, cd \qquad a \,.\, bc : d \qquad ab \,.\, c : d,$$

et en général la suite de n lettres peut être décomposée en $(2n)!/[n!(n+1)!]$ combinaisons binaires différentes. (F1894 §10).

Plusieurs conventions ont pour but de supprimer des divisions: P3·0, 7·1, §∪ P1·1, §− P1·2-·4, §∃ P1·01, §+ P4·7, §× P1·01 ...

Pour les faire mieux ressortir, nous donnerons aux signes des dimensions différentes, et nous nous aiderons des espaces typographiques.

Les parenthèses et les points sont des signes de l'écriture commune, bien que l'usage soit différent; dans les langages ordinaires le groupement des mots est indiqué par la construction.

Les symboles du Formul. ont une signification constante. En adoptant les parenthèses pour grouper les parties d'une formule, on ne pourra pas les adopter dans une autre signification. Nous ne pourrons pas indiquer par (a) une puissance de a, avec Girard a.1629 (voir §Q P17p), ou la partie entière de a, ou la valeur absolue de a, ou une fonction de a. En général une lettre seule ne sera jamais renfermée entre parenthèses, car elle n'est pas groupée.

·3 Cls

" Cls " signifie " classe ".

Ce symbole a la forme K dans F1889 et dans les travaux de plusieurs Auteurs. Il a la valeur du mot " ὅρος " d'Aristote, " terminus " des scolastiques; et correspond aussi à " idée générale, nom commun, ..." du langage ordinaire, et aux expressions " ensemble, Menge " des mathématiciens.

P. ex. dans l'Arithmétique représentent des Cls les mots ou les symboles:

N ou N_1 = « nombre entier positif »

Np = « nombre premier »

et par une convention générale:

a+N = « a plus un N » ou « nombre plus grand que a »

$a \times N = N \times a =$ « multiple de a »
$N^2 =$ « nombre carré »
$N^2 + N^2 =$ « somme de deux carrés ».

Dans F1899 indiquent aussi des Cls les symboles simples n R r infn ϑ Sgm Q q θ Θ pnt vct quaternio.

Leibniz prend pour exemples les classes de points, ou figures; elles sont des segments de droite dans PhilS. t.7, p.229, 236, ... et des cercles dans ses manuscrits conservés à la bibliothèque de Hannover, *Philosophie,* t.7 fasc. B.4. fol.1-3.

Ces figures ont été aussi adoptées par Euler, a.1768, et par d'autres.

·4 ε

Soit a une Cls; $x\varepsilon a$ signifie "x est un a".

ε est la lettre initiale du mot *ἐστί.*

Exemples: $9 \varepsilon N^2$ $13 \varepsilon N^2+N^2$ $2^{61}-1 \varepsilon Np$

Sur la possibilité de remplacer le signe ε par une autre convention voir F1897 note à la P2.

P signifie "proposition". Ce signe n'est pas un symbole de logique, car il ne se trouve pas dans les formules ; il est une simple abréviation.

Les P catégoriques ne sont pas l'objet du calcul logique.

·5 $\ni$

Soit p une P contenant une lettre x; la formule $x \ni p$ représente "la classe des x qui satisfont à la condition p".

On peut lire le signe $\ni$ par le mot « qui ».

Exemple: $1 \varepsilon x \ni (x^2-3x+2=0)$

« l'unité est une racine de l'équation entre parenthèses ».

Autres ex. :

§quot P1·0 §Dvr P1·0 §mp P2·6 §ϑ P·0 §Med P1·0 §λ P1·0 §q' P4·0...

Dans la formule $x \ni p$, la lettre x est apparente.

Les deux signes $x\varepsilon$ et $x\ni$ représentent des opérations inverses.

Si l'on écrit le signe $x\varepsilon$ en avant d'une Cls on a une P contenant la variable x; réciproquement si l'on écrit le signe $x\ni$ en avant d'une P de cette nature, on obtient une Cls.

Les Cls et les P conditionelles ne sont donc que deux formes pour représenter la même idée. Nous préférons opérer sur les Cls. Une P conditionnelle, contenant une variable x, sera considérée sous la forme $x\varepsilon a$, où a est une Cls.

·6 ;

$(x;y)$ ou (x,y) indique le couple, ou système des objets x et y.

Dans la notation (x,y), très répandue en Analyse lorsqu'il s'agit de

fonctions de plusieurs variables, les parenthèses sont nécessaires, pour ne pas produire des ambiguïtés avec la notation P2·0.

On peut les supprimer dans la notation $(x;y)$, où les parenthèses ont la valeur expliquée par la P1·2.

$x;y;z$ indique le système des trois variables x, y, z, qu'on peut considérer comme le couple formé par $(x;y)$ et z. Voir P7·1.

Soit p une P contenant deux variables x et y ; $(x;y)\ni p$ représente la classe des couples $(x;y)$ qui satisfont à la condition p.

Si a est une Cls de couples, $(x;y)\varepsilon a$ représente une relation entre les deux objets x et y, et toute relation entre les deux variables sera ici écrite sous la forme $(x;y)\,\varepsilon\, a$.

Ex : $(2/5\,;3/5)\ \varepsilon\ (x;y)\ni(x^2+y^2=1)$
signifie « le couple (2/5 ; 3/5) satisfait à l'équation $x^2+y^2=1$ ».

·7 $\supset$

Soient a et b des Cls. $a\supset b$ signifie « tout a est b ».

Soient p et q des propositions contenant une variable x ;

$$p\,.\supset_x.\ q,$$

signifie " de p on déduit, quel que soit x, la q ", c'est-à-dire: " les x qui satisfont à la condition p satisferont aussi à la q ".

Si les propositions p et q contiennent deux variables x, y,

$$p\,.\supset_{x,y}.\ q$$

signifie : " tout système x,y qui satisfait à la condition p est aussi une solution de la condition q ".

Et ainsi de suite pour un plus grand nombre de variables.

On sous-entend les indices au signe $\supset$, lorsqu'il n'y a pas d' ambiguïté à craindre.

La P $a\supset b$, qu'on peut aussi lire « la classe a est contenue dans la b », est dite « universelle affirmative ».

Aristote a exprimé la relation $a\supset b$ par une périphrase (Voir P2·4); Leibniz par « a est b », et par $a\,|\!-\,b$. Segner a. 1740 et Lambert a. 1765 respectivement par $a<b$ et $a>b$; car le signe $\supset$ correspond au signe $<$ ou $>$, ou mieux à $\leqq$ ou $\geqq$, de l'Algèbre, selon que dans la classe on considère le nombre des individus qui la composent, ou le nombre des idées qui la déterminent.

Le signe $\supset$, qu'on peut lire « est contenu », est une déformation de $\mathfrak{o}$, lettre initiale renversée du mot « contient ».

Il a été introduit par Gergonne a.1816. Voir RdM t.6 p.183.

Les signes ε et $\supset$ ont des propriétés différentes ; la relation $\supset$ est transitive, la ε ne l'est pas (P2·4) ; la ε est distributive par rapport à $\cup$, la $\supset$ ne l'est pas (§$\cup$ P4·0) ; la ε est commutable avec $-$, la $\supset$ ne l'est pas (§$-$ P1·5). Une autre différence est donnée par §$\exists$ P1·1. Les signes ε et $\supset$ sont liés par des relations, dont la plus importante est §ι P·2.

Dans la formule $p \supset q$, p s'appelle Hypothèse, abrégé en Hyp ou Hp, et q la thèse, abrégé en Ths.

On sous-entend les indices à $\supset$, lorsqu'il est le seul signe de déduction; ou lorsqu'il représente la déduction principale, qui porte le plus grand nombre de points à ses côtés; ou si le théorème a la forme $p \supset (q \supset r)$. Les indices sous-entendus sont toutes les variables réelles contenues dans l'Hp.

Les lettres qui, exprimées ou sous-entendues, figurent comme indices au signe $\supset$ sont apparentes dans la déduction.

Opérer par $x\varepsilon$ sur la P universelle $a \supset b$
signifie la transformer dans la déduction $x\varepsilon a \,.\supset_x .\, x\varepsilon b$
« de la condition $x\varepsilon a$ on déduit par rapport à x la $x\varepsilon b$ ».

Opérer par $x\ni$ sur la déduction $p \,.\supset_x .\, q$
signifie la transformer dans la P universelle $(x\ni p) \supset (x\ni q)$

Ex. $6N \supset 2N$ « tout multiple de 6 est pair ».

Opérons par $x\varepsilon$; on a : $x\varepsilon\, 6N \,.\supset.\, x\varepsilon\, 2N$,
où l'indice x au signe $\supset$ est sous-entendu.

Ex. $a\,\varepsilon\, Np \,.\supset.\, (a-1)!+1\,\varepsilon\, N\times a$

Le signe $\supset$ se rencontre aussi entre P, sans porter des indices, P5·01.

Quelquefois, dans les démonstrations, le signe $\supset$ lie deux théorèmes, et ne porte pas d'indices. Il est alors une abréviation du mot « on déduit ». Cette abréviation se rencontre sous la forme ·.· dans Pell (v. RdM t.6 p.123), et sous la forme ⊃ dans Abel t.1 p.36. Dans ce cas on peut considérer les signes des idées primitives comme indices à $\supset$.

Dans le F, lorsqu'on rencontre l'expression $x\varepsilon a$, a est toujours une Cls. Analoguement dans la formule $a \supset b$, si un membre est une Cls, l'autre l'est aussi. On pourrait remplacer la P·4 par « $x\,\varepsilon\, a$ signifie a est une Cls, et x est un a », c'est-à-dire ajouter la P :

$$x\,\varepsilon\, a \,.\supset.\, a\,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \qquad \text{| F1889 P52 |}$$

Voir Padoa RdM t.6 p.105.

·8 $\frown$

La Cls commune aux Cls a et b est indiquée par $a \frown b$ ou par ab.

L'affirmation simultanée des propositions p et q est indiquée par $p \frown q$, ou par pq.

Pour supprimer des parenthèses on convient que :
$pq \supset r$ signifie $(pq) \supset r$, et $p \supset qr$ signifie $p \supset (qr)$.
$p. \supset q$ et $p \supset .\, q$ signifient $p \,.\supset.\, q$.

Le signe $\frown$, qu'on peut lire « *et* », et qu'on appelle signe de la multiplication logique, est en général sous-entendu entre des P.

Ex. $(2N) \frown (3N) \supset 6N$ $\qquad$ $6N \supset (2N) \frown (3N)$

$Np \frown (4N+1) \supset N^2+N^2$ $\qquad$ Girard a. 1634 p. 156 :

« Tout nombre premier qui excede un nombre quaternaire de l'unité se peut diviser en deux quarrez entiers. »

$a \varepsilon N \,.\supset.\, a(a+1) \varepsilon 2N \,.\, a(a+1)(a+2) \varepsilon 6N$

$a \varepsilon N \,.\, a^2 \varepsilon N^2 \,.\supset.\, a \varepsilon N^2 \qquad a \varepsilon N \,.\, a < 17 \,.\supset.\, a^2 - a + 17 \varepsilon Np$

Dans ces ex. l'indice a au signe $\supset$ est sous-entendu.

$a \varepsilon Np \,.\, b \varepsilon N+1 \,.\supset.\, b^{a-1} - b \varepsilon N \times a$ | Fermat |

Ici le signe $\supset$ porte les indices sous-entendus a et b.

Ex. où $\supset$ a des indices explicites :

$s \varepsilon Cls \,.\, 1 \varepsilon s : x \varepsilon s \,.\supset_x .\, x+1 \varepsilon s :\supset.\, N \supset s$ (principe d'induction)

§+ 2·5 §n 1·2 2·0 §R 1·2 3·0 §r 2·1·2·5·6·9 §Num ·11 §mlt 1·0 §mp 1·5 ...

·9 $=$

$x = y$ signifie " x est égal à y ".

Le signe d'égalité a la forme $\propto$ ou ∞, déformation de la lettre initiale de *æqualis*, de Viète à Leibniz; la forme $=$, qu'on rencontre dans Record a.1552, adoptée par Wallis et Newton, est devenue ensuite d'usage universel.

La plus grande partie des propositions contenues dans le Formul. s'exprime par les seuls signes de logique ε, $\supset$, et $\frown$ (sous-entendu), combinés avec les signes algébriques.

Le symbole Cls nous est nécessaire dans les propositions de Logique ; le signe $\ni$ nous explique le double rôle du signe $\supset$ entre classes et entre propositions ; le système de variables se rencontre comme indice au signe $\supset$.

Définitions

Df signifie « définition ».

Df? » « définition possible ».

Supposons ordonnés les signes qui représentent les idées d'une science. La définition symbolique d'un signe simple x a la forme

$x =$ (expression composée par les signes précédents) Df

Ont cette forme les Df des individus : 1, 2, 3, ... , ∞, e, C, i, π,

et des Cls : N_1, n, R, r, infn, Np, ϑ, Sgm, Q, q, q'.

Si l'on définit une expression contenant des lettres variables, et s'il faut d'abord limiter la signification des lettres, la Df a une Hp.

Ont une Hp les Df de $+ \; - \; \times \; / \; \upharpoonright \; >$ Num Σ Π ! mod max quot rest Dvr mlt Cmb mp Φ l' Log E β Med λ lim sin D $\int$ ...

Une Df considérée en elle même, sans s'occuper de sa place dans une théorie, est une égalité, dont le premier membre contient un signe qui ne figure pas dans le second, ou qui y figure dans une position différente.

Df? marque les égalités qui ont la forme que nous venons d'expliquer.

Ex: §N_1 ·5 §$\times$ 1·02 ·03 §R 1·01 §r 2·5·9 §$\upharpoonright$ 1·1 §$>$ 2·5·6 3·7 6·01 ...

Le signe Df? exprime donc une propriété intrinsèque d'une P ; le signe Df une propriété relative à sa place dans une théorie.

Supposons fixé un ordre aux idées des sciences mathématiqnes. Une Df? qui contient dans un membre une idée, et dans l'autre des idées précé-

dentes, peut être prise comme Df réelle de la première. S'il y a plusieurs Df? qui remplissent à cette condition, ou choisira la plus commode.

Les idées, dont la Df symbolique fait défaut, s'appellent « idées primitives » relativement à l'ordre fixé. Il y a nécessairement des idées primitives, car on ne peut pas définir la première idée, ni le signe $=$, qui figure dans toute définition.

Si l'on change l'ordre des idées d'une science, une P qui jouait le rôle de Df peut se transformer en une Df?; une idée, qui était primitive relativement au premier ordre, peut être définie, et réciproquement.

Il convient de donner aux idées d'une science un ordre tel que le nombre des idées primitives soit le plus petit possible.

Nous rencontrons trois idées primitives dans l'Arithmétique (§+P1); et trois dans la Géométrie (§ vct P1·0, 2·0 et 8·0).

Les idées primitives sont expliquées par le langage ordinaire, et sont déterminées par des Pp (P primitives) ; celles-ci jouent le rôle de définitions par rapport aux idées primitives, mais n'ont pas la forme.

On peut, si l'on veut, donner aux Pp la forme des définitions symboliques. P. ex. au lieu de prendre comme idées primitives dans l'Arithmétique les idées représentées par les signes $0, N_0, +$, et de les déterminer par 5 Pp (§ + 2·1-·5), on peut définir le système $(0, N_0, +)$ comme le système satisfaisant à ces 5 Pp.

Parmi les principales formes de Df symboliques qu'on rencontre dans le F, nous mentionnerons les définitions « par abstraction », où l'on définit l'égalité de la même fonction de deux variables, sans définir cette fonction. Ont cette forme les §Num ·0, §l' 2·0 §vct 7·3.

Ex. de Df « par induction »: §+ 4·1·2, 6·1·2.

Ex. de Df où les deux membres sont connus: § – P2·4.

Les deux membres de l'égalité qui constitue une Df doivent contenir les mêmes variables réelles. P. ex. la § – P1·41 : $a \varepsilon N . \supset . a - a = 0$ n'est pas une Df? ; elle le devient sous la forme :

$0 =$ « valeur constante de $a - a$, où $a \varepsilon N$ ».

Tout signe défini peut être supprimé, en le remplaçant par sa valeur donnée par la Df.

Démonstrations.

Dm signifie « démonstration ». En général les démonstrations sont renfermées entre [ ] .

Les démonstrations, dans les sciences mathématiques, sont composées d'une suite de propositions convenablement liées.

Ces P. ne diffèrent des théorèmes que par leur moindre importance. Nous pouvons donc les exprimer complètement en symboles.

La liaison entre les P est indiquée dans le langage ordinaire par « on déduit », que nous traduirons par $\supset$. Elle est une forme de raisonnement.

Les lois de logique, contenues dans la suite, ont été en général trouvées en énonçant, sous forme de règles, les déductions qu'on rencontre dans les démonstrations mathématiques.

Parmi les règles plus importantes il y a le syllogisme, composer. exporter, importer, la substitution, et simplifier.

Soient p, q, r, s des propositions.

Syll, abréviation de Syllogisme, indique la forme

$$p \supset q \,.\, q \supset r \,.\supset.\, p \supset r \,.$$

Si les propositions sont réduites à la forme $x \varepsilon a$, où a est une Cls, le syllogisme est exprimé par la P2·4. Mais nous appliquerons le Syll même lorsqu'il s'agit de P non encore réduites à la forme $x \varepsilon a$.

Cmp (composer) indique la forme

$$p \supset q \,.\, p \supset r \,.\supset.\, p \supset qr \,.$$

Voir P3·4. En combinant les raisonnements Cmp et Syll, on a la forme :

P3·61 $\quad p \supset q \,.\, p \supset r \,.\, qr \supset s \,.\supset.\, p \supset s \,.$

Importer signifie passer de la proposition $p \supset . q \supset r$ à la $pq \supset r$.

En réunissant les hypothèses, on réunit aussi les indices au signe $\supset$.

Exporter indique la transformation inverse. Voir P7·3.

Par ex. soit la P : $\quad a \varepsilon \mathrm{N} \,.\, b \varepsilon \mathrm{N} \times a \,.\, c \varepsilon \mathrm{N} \times b \,.\supset.\, c \varepsilon \mathrm{N} \times a$

où le signe $\supset$ porte les indices sous-entendus a,b,c.

Export $.\supset$: $\quad a \varepsilon \mathrm{N} \,.\, b \varepsilon \mathrm{N} \times a \,.\supset:\, c \varepsilon \mathrm{N} \times b \,.\supset_c .\, c \varepsilon \mathrm{N} \times a$

Opérons par $c\varepsilon$: $\quad a \varepsilon \mathrm{N} \,.\, b \varepsilon \mathrm{N} \times a \,.\supset.\, \mathrm{N} \times b \supset \mathrm{N} \times a.$

La substitution consiste à remplacer dans un théorème a de la forme $p \supset_{x,y \ldots} q$, les lettres variables $x,y,\ldots$ par des expressions constantes ou variables $a,b\ldots$; on désigne par

$$(a,b,\ldots) \mid (x,y,\ldots)\ \mathrm{P}a$$

la nouvelle P. Le signe | sera étudié dans son §.

Toute P doit être écrite sous sa forme la plus simple. Si l'on effectue une substitution dans une P, il peut arriver que la nouvelle P ne se présente pas sous la forme plus simple ; il faut la simplifier comme suit :

a) Si l'Hp ne contient plus de lettres variables, et si elle est vraie, on la supprime, et l'on affirme la Ths.

P. ex. soit la P $\quad x \varepsilon \mathrm{Np} \,.\supset.\, (x-1)!+1\ \varepsilon\ \mathrm{N} \times x \qquad (a)$

$(11 \mid x)\mathrm{P}a$:$\supset$: $\quad 11 \varepsilon \mathrm{Np} \,.\supset.\, 10!+1\ \varepsilon\ \mathrm{N} \times 11$

Simplif $.\supset.$ $\quad 10!+1\ \varepsilon\ \mathrm{N} \times 11.$

b) Si dans l'Hp il y a comme facteur logique une P vraie, on la supprime.

Ex. De la P: $\quad a,b \varepsilon \mathrm{N} \,.\supset.\, (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad (a)$

$(1 \mid b)\mathrm{P}a$. Simplif $.\supset$: $\quad a \varepsilon \mathrm{N} \,.\supset.\, (a+1)^2 = a^2+2a+1.$

Si l'on exporte la P vraie, la règle *b*) est conséquence de la *a*).

c) Réciproquement on peut unir à l'Hp des P vraies.

Soit a un théorème : $\quad \mathrm{Hp} \,.\, a \,.\supset.\, \mathrm{Ths}$ est donc une forme abrégée de

$$a \,.\supset:\, \mathrm{Hp} \,.\supset.\, \mathrm{Ths}.$$

d) Si dans l'Hp il y a comme facteur logique une P conséquence des autres, on la supprime.

e) Si dans l'Hp il y a un facteur logique non nécessaire, on le supprime.

f) Réciproquement on peut ajouter à l'Hp des facteurs non nécessaires ; cela revient à dire que de l'affirmation simultanée de plusieurs propositions, on peut déduire l'affirmation de chaque proposition. Voir P3·3.

D'autres formes de raisonnement seront indiquées par un nom :

Distrib(ε,$\frown$)	Oper$\frown$	Comm$\frown$	Assoc$\frown$	Distrib($\frown$,$\supset$)	Distrib(ε,$\frown$)
P3·1	3·5	4·2	4·3	5·3	6·2
Distrib(ε,$\smile$)	Oper$\smile$	Comm$\smile$	Assoc$\smile$	Distrib($\frown$,$\smile$)	Distrib(ε,$\smile$)
§$\smile$ 4·0	1·5	2·2	2·3	3·1	4·1
Transp	Oper$\exists$	Eliminer.			
§– 2·3·4·7 4·2	§$\exists$ 1·21	2·1			

Les P de logique sont en général évidentes. Les démonstrations n'ont pas pour but de nous assurer de la vérité de ces P, mais seulement de réduire plusieurs de ces modes de raisonnement à d'autres plus simples.

Dans le Formul. une démonstration est réduite à une suite de transformations, suivant des régles mentionnées, de l'Hp dans la Ths. Ces transformations sont analogues aux règles algébriques pour résondre un système d'équations.

En supposant ordonnées les P d'une science, une Dm doit déduire une P des précédentes. Une P peut avoir plusieurs démonstrations ; il peut arriver qu'il convienne déduire d'une P une autre précédente ; on pourrait appeler « démonstrations possibles » ces déductions ; elles déviennent des démonstrations si l'on change l'ordre des P. Ex.: §$\smile$ P2·6, §ι 1·61.

Les P dont la Dm manque, s'appellent Pp (propositions primitives). Si dans une science il y a des idées primitives, il y aura aussi des Pp, qui fixent la valeur des premières.

Une P est primitive, si l'on ne l'a pas démontrée. Dans plusieurs cas on prouve qu'un système de n Pp est irréductible ; pour ce but on donne aux idées primitives n interprétations différentes de la réelle, et telles que chacune satisfasse à toutes des Pp, une à la fois exceptée. Voir §+ et §vct.

Dans quelque cas on prouve seulement que chaque Pp est indépendante des précédentes ; on prouve l'indépendence ordonnée. Voir Pieri TorinoM a.1898 t.48 p.60.

✱ 2. $\supset \varepsilon$

·0 $a\varepsilon$ Cls $.\supset:$ $x,y\varepsilon a$ $.=.$ $x\varepsilon a$. $y\varepsilon a$ Df

« Soit a une classe ; nous écrirons $x,y\varepsilon a$, qu'on lira "x et y sont des a", au lieu de $x\varepsilon a$. $y\varepsilon a$ ».

La formule $x,y,z\varepsilon a$ signifie $x,y\varepsilon a$. $z\varepsilon a$

" x et y sont des a, z est un a ,, , qu'on lira " x, y, z sont des a ,,; et ainsi de suite quel que soit le nombre des sujets.

Ex. $2^2-1,\ 2^3-1,\ 2^5-1\ \varepsilon$ Np

$a,b\varepsilon N\ .\supset.\ ab=ba\ .\ a^2+b^2 \geqq 2ab$

·1 $a,b\varepsilon$ Cls $.\supset.\therefore$ $a\supset b$ $.=:$ $x\varepsilon a$ $.\supset_x.$ $x\varepsilon b$ Df? { F1889 P50 }
{ Oper $x\varepsilon$ } { Oper $x\ni$ }

Cette P relie les deux fonctions du signe $\supset$ entre Cls et entre P, et exprime les règles « opérer par $x\varepsilon$, ou par $x\ni$ ». Voir P1·7.

Si l'on considére le signe $\supset$ entre P comme une idée primitive, la P·1 définira le même signe entre Cls.

Réciproquement on pourrait essayer de prendre comme idée primitive la valeur du signe $\supset$ entre Cls, et d'en déduire la valeur entre les conditions $x\varepsilon a$ $x\varepsilon b$ par la même P·1. Mais cette P contient déjà le signe $\supset$ avec la signification « on déduit » entre l'Hp et la Ths.

·2 $a\varepsilon \text{Cls} .\supset. a\supset a$ { LEIBNIZ voir P3·3 }

·3 $a,b\varepsilon \text{Cls} . a\supset b . x\varepsilon a .\supset. x\varepsilon b$ { F1889 P55 }

[P·1 $.\supset.$ $a,b\varepsilon \text{Cls} . a\supset b .\supset: x\varepsilon a .\supset_x . x\varepsilon b$ (1)
(1) . Import $.\supset.$ P]

Appelons p et q les conditions $x\varepsilon a$ $x\varepsilon b$. Par la Df P·1, la P·3 devient : $p\supset q . p .\supset. q$ « si de p on déduit q, et la p est vraie, sera vraie la q ».
Cette forme de raisonnement est une espèce de syllogisme.

·4 $a,b,c\varepsilon \text{Cls} . a\supset b . b\supset c .\supset. a\supset c$ { Syll }

{ ARISTOTELES, *Analytica Priora*, lib. I, cap. IV:
« *Εἰ τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Β, καὶ τὸ Β κατὰ παντὸς τοῦ Γ, ἀνάγκη τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Γ κατηγορεῖσθαι.* » }

{ LEIBNIZ Mss. *Philosophie* VIIB 4 fol.17 :
« Nota Γ aut vox *est*. $e\Gamma d$ sive $d\Gamma e$. Si $e\Gamma d$ et $d\Gamma a$ tunc $e\Gamma a$. » }

Cette P exprime le « syllogisme » abrégé en Syll.
Soit xay une relation entre les objets x et y. Elle est dite « transitive » si $xay . yaz .\supset. xaz$.
Le Syll dit que la relation $\supset$ est transitive. La relation ε ne l'est pas. P. ex. de $7\varepsilon \text{Np}$
et $\text{Np}\,\varepsilon$ (ensemble infini illimité dénombrable)
on ne peut pas tirer de conséquence. On dit que ε a le sens composé (sensus compositi), et $\supset$ le sens divisé (sensus divisi). $x\varepsilon a$ dit que a est une propriété de x ; $x\supset a$ dit que a est une propriété des individus de la classe x.

·5 $a,b,c,d\varepsilon \text{Cls} . a\supset b . b\supset c . c\supset d .\supset. a\supset d$
[Hp . Syll $.\supset.$ $a\supset c . c\supset d$. Syll $.\supset.$ Ths]

·6 $a,b,c\varepsilon \text{Cls} .\supset: a\supset b\supset c .=. a\supset b . b\supset c$ Df

Cette abréviation se rencontre dans quelques démonstrations.

✱ 3. $\cdot\cdot \supset \frown$

·0 $a,b\varepsilon \text{Cls} .\supset: ab = a\frown b : x\varepsilon ab .=. x\varepsilon (ab)$
$a,b,c\varepsilon \text{Cls} .\supset: abc = (ab)c :$
$ab = c .=. (ab) = c : a = bc .=. a = (bc) :$
$ab \supset c .=. (ab) \supset c : a \supset bc .=. a \supset (bc)$ Df

Ces conventions ont pour but de sous-entendre le signe $\frown$ et des parenthèses.

·1 $a,b\varepsilon \text{Cls} .\supset: x\varepsilon a\frown b .=. x\varepsilon a .\frown. x\varepsilon b$ Df? { Distrib(ε, $\frown$) }
{ F1889 P47 }

Cette égalité est une Df? (définition possible), car le signe $\frown$ figure dans le premier membre entre Cls, et dans le second entre P. Si l'on suppose connue sa valeur entre P, on en déduira la valeur de la formule $x\varepsilon\, ab$; mais pour avoir dans le premier membre ab seul, il est encore nécessaire la transformation indiquée par la P6·2.

Réciproquement si l'on considère comme une idée primitive le produit ab de deux Cls, on déduira la valeur du produit logique entre les P $x\varepsilon a$ et $x\varepsilon b$. Mais l'Hp $a,b\varepsilon$ Cls, par la P2·0 est déjà le produit logique de deux P.

Soient xay et $x\beta y$ deux fonctions de x,y. L'opération a est dite distributive par rapport à la β, si l'on a

$$xa(y\beta z) = (xay)\beta(xaz) \qquad \{\mathrm{Distrib}(a,\beta)\}$$

Le signe à droite indique le théorème qui exprime cette propriété.

P. ex. l'opération arithmétique $\times$ est distributive par rapport à $+$.

L'opération ε, dont le résultat est une P, est donc distributive par rapport à $\frown$.

Ex. De la P : $\quad \mathrm{Np} \frown (4\mathrm{N}+1) \supset \mathrm{N}^2+\mathrm{N}^2$

Opér $x\varepsilon$. Distrib$(\varepsilon, \frown)$.$\supset$: $\quad x\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.\, x\varepsilon\, 4\mathrm{N}+1 \,.\supset.\, x\varepsilon\, \mathrm{N}^2+\mathrm{N}^2$.

·2 $\quad a,b\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\supset.\, ab\, \varepsilon\, \mathrm{Cls}$ $\qquad$ { F1897 P22 }

·3 $\quad a,b\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\supset.\, ab \supset a$ $\qquad$ ·31 $\quad$ Hyp P·3 .$\supset$. $ab \supset b$

{ LEIBNIZ, Specimen calculi universalis, *PhilS.* t.7 p.218 :
« *a* est *a* » « *ab* est *a* » « *ab* est *b*. » }

·4 $\quad a,b,c\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\, a \supset b \;\; a \supset c \,.\supset.\, a \supset bc$ $\qquad$ { Cmp }

{ LEIBNIZ Id. p.222 :

« Diversa praedicata in unum conjungi possunt, ut si constet *a* esse *b*, itemque aliunde constet *a* esse *c*, poterit dici *a* esse *bc*. » }

Elle exprime la forme de raisonnement dite « composer » (Cmp).

·5 $\quad a,b,c\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\, b \supset c \,.\supset.\, ab \supset ac$ $\qquad$ { Oper $\frown$ }

{ LEIBNIZ Id. p.222 :

« Si *b* est *c*, tunc *ab* erit *ac*. Quod ita demonstratur: *ab* est *b*, *b* est *c*, ergo *ab* est *c*, per regulam consequentiarum primam. *ab* est *c*, *ab* est *a*, ergo *ab* est *ac* per demonstrata supra. » }

[$a,b,c\,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\, b \supset c$. P·31 .$\supset$. $ab \supset b \,.\, b \supset c$. Syll .$\supset$. $ab \supset c$ $\qquad$ (1)

» » » . P·3 . (1) .$\supset$. $ab \supset a \,.\, ab \supset c$. Cmp .$\supset$. $ab \supset ac$]

Cette P, analogue à §> P4·1, s'appelle « opérer par $\frown$ ».

La démonstration est la traduction exacte de celle donnée par Leibniz. Nous voulons décomposer les différentes déductions, qui sont complexes, dans les formes simples. On verra par cet exemple comment cette décomposition soit longue.

Hp signifie « hypothèse du théorème »; dans notre cas : $a,b,c\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\, b \supset c$.

Simplifier par la P3·3 signifie répéter la première de deux affirmations; simplifier par la P3·31 signifie répéter la deuxième.

Nous commençons à décomposer l'Hp en affirmations simples :

Simpl (P3·3) .⊃:	Hp .⊃. $a,b,c\varepsilon$ Cls	(α)
Simpl (P3·31) .⊃:	Hp .⊃. $b \supset c$	(β)
Simpl (P3·3) .⊃:	$a,b,c\varepsilon$ Cls .⊃. $a,b\varepsilon$ Cls	(γ)
(α) . (γ) . Syll .⊃:	Hp .⊃. $a,b\varepsilon$ Cls	(δ)
Simpl (P3·31) .⊃:	$a,b,c\varepsilon$ Cls .⊃. $c\varepsilon$ Cls	(ε)
(α) . (ε) . Syll .⊃:	Hp .⊃. $c\varepsilon$ Cls	(ς)
Simpl (P3·3) .⊃:	$a,b\varepsilon$ Cls .⊃. $a\varepsilon$ Cls	(ζ)
(δ) . (ζ) . Syll .⊃:	Hp .⊃. $a\varepsilon$ Cls	(η)
Simpl (P3·31)	$a,b\varepsilon$ Cls .⊃. $b\varepsilon$ Cls	(θ)
(δ) . (θ) . Syll .⊃:	Hp .⊃. $b\varepsilon$ Cls	(ι)
P3·2 .=:	$a,b\varepsilon$ Cls .⊃. $ab\ \varepsilon$ Cls	
(δ) . P3·21 . Syll .⊃:	Hp .⊃. $ab\ \varepsilon$ Cls	($\iota\alpha$)
($\iota\alpha$) . (θ) . Cmp .⊃:	Hp .⊃. $ab,b\ \varepsilon$ Cls	($\iota\beta$)
($\iota\beta$) . (ς) . Cmp .⊃:	Hp .⊃. $ab,b,c\ \varepsilon$ Cls	($\iota\gamma$)
P3·31 .=:	$a\varepsilon$ Cls .⊃. $ab \supset b$	
(δ) . P3·31 . Syll .⊃:	Hp .⊃. $ab \supset b$	($\iota\delta$)
($\iota\gamma$) . ($\iota\delta$) . Cmp .⊃:	Hp .⊃. $ab,b,c\varepsilon$ Cls . $ab \supset b$	($\iota\varepsilon$)
($\iota\varepsilon$) . (β) . Cmp .⊃:	Hp .⊃. $ab,b,c\varepsilon$ Cls . $ab \supset b$. $b \supset c$	($\iota\varsigma$)
$(ab,b,c)\|(a,b,c)$Syll .⊃:	$ab,b,c\varepsilon$ Cls . $ab \supset b$. $b \supset c$.⊃. $ab \supset c$	($\iota\zeta$)
($\iota\varsigma$) . ($\iota\zeta$) . Syll .⊃:	Hp .⊃. $ab \supset c$	($\iota\eta$)
P3·3 .=:	$a,b\varepsilon$ Cls .⊃. $ab \supset a$	
(δ) . P3·3 . Syll .⊃:	Hp .⊃. $ab \supset a$	($\iota\theta$)
($\iota\alpha$) . (η) . Comp .⊃:	Hp .⊃. $ab,a\varepsilon$ Cls	($\varkappa$)
($\varkappa$) . (ς) . Comp .⊃:	Hp .⊃. $ab,a,c\varepsilon$ Cls	($\varkappa\alpha$)
($\varkappa\alpha$) . ($\iota\theta$) . Cmp .⊃:	Hp .⊃. $ab,a,c\varepsilon$ Cls . $ab \supset a$	($\varkappa\beta$)
($\varkappa\beta$) . ($\iota\alpha$) . Cmp .⊃:	Hp .⊃. » » . $ab \supset c$	($\varkappa\gamma$)
$(ab,a,c)\|(a,b,c)$Cmp .⊃:	$ab,a,c\varepsilon$ Cls . $ab \supset a$. $ab \supset c$.⊃. $ab \supset ac$	($\varkappa\delta$)
($\varkappa\gamma$) . ($\varkappa\delta$) . Syll .⊃:	P	

·6 $a,b,c,d\varepsilon$ Cls . $a \supset b$. $d \supset c$.⊃. $ad \supset bc$

{ LEIBNIZ Id. p.223:

« Si a est b, et d est c, tunc ad erit bc. Hoc est praeclarum theorema, quod demonstratur hoc modo :
a est b, ergo ad est bd per priora,
d est c, ergo bd est bc rursus per priora,
ad est bd, et bd est bc, ergo ad est bc. Quod erat demonstrandum. »}

{ MCCOLL a.1878 P9 }

[Hp . P·5 .⊃. $ad \supset bd$. $bd \supset bc$.⊃. Ths]

·61 $a,b,c,d\varepsilon$ Cls . $a \supset b$. $a \supset c$. $bc \supset d$.⊃. $a \supset d$ {F1897 P35}

[Hp . Cmp .⊃. $a \supset bc$. $bc \supset d$. Syll .⊃. Ths]

·62 ———————. $ab \supset c$. $ac \supset d$.⊃. $ab \supset d$ {F1897 P37}

[Hp .⊃. $ab \supset ac$. $ac \supset d$.⊃. Ths]

·63 ———————. $a \supset b$. $bc \supset d$.⊃. $ac \supset d$ {F1895 P115}

[Hp .⊃. $ac \supset bc$. $bc \supset d$.⊃. Ths]

·64 ————. $a \supset bd \,.\, b \supset c \,.\supset.\, a \supset c$ { LEIBNIZ Id. p.218 }

[Hp . P·3 $.\supset.$ $a \supset bd \,.\, bd \supset b \,.\, b \supset c$ $.\supset.$ Ths]

❋ 4.

·0 $a,b \varepsilon$ Cls $.\supset:$ $a = b \,.=.\, a \supset b \,.\, b \supset a$ Df?

{ LEIBNIZ *PhilS.* t.7 p.225 :

« Si a est b, et b est a, tunc a et b dicuntur esse idem. » }

{ MCCOLL P7 : $(a=b)=(a:b)(b:a)$ }

Cette P exprime l'égalité de deux classes par le signe $\supset$. Le signe $=$ se rencontre nécessairement dans toute définition, et ne peut pas être défini. Si l'on veut considérer cette P comme une Df il faut regarder le deuxième signe $=$ comme lié avec le signe Df. Leur ensemble signifie « est égal par définition » ou « nous posons ». Il n'est plus le même signe qui figure dans $a=b$.

Ex : $(2N) \cap (3N) = 6N$

« les nombres multiples de 2 et multiples de 3 sont multiples de 6 ».

$N \cap x \ni (3x-2 \,\varepsilon\, 5N) = 5N-1$

« Les nombres x qui rendent $3x-2$ multiple de 5 s'obtiennent de la formule $5y-1$, en y remplaçant y par tous les N ».

·1 $a \varepsilon$ Cls $.\supset.$ $a = aa$ { LEIBNIZ Mss. VII p.3 : « $AA \infty A$ » }

[$(a,a,a)|(a,b,c)$P3·4 . Simpl $.\supset:$ $a \varepsilon$ Cls $.\supset.$ $a \supset aa$ (1)

$(a|b)$P3·3 . Simpl $.\supset:$ $a \varepsilon$ Cls $.\supset.$ $aa \supset a$ (2)

(1) . (2) . Cmp . P·0 $.\supset.$ P]

·2 $a,b \varepsilon$ Cls $.\supset.$ $ab = ba$ { Comm $\cap$ }

{ LEIBNIZ Mss. VIIB2 p.3 : « $AB \infty BA$ » }

Soit xay une fonction de x et y. L'opération a est dite commutative si l'on a $xay = yax$ { Comm a }

La P·2 exprime la commutativité de l'opération $\cap$.

[Hp . P3·3 . P3·31 $.\supset.$ $ab \supset b \,.\, ab \supset a$. Cmp $.\supset.$ $ab \supset ba$ (1)

Hp . $(b,a)|(a,b)$P(1) $.\supset.$ $ba \supset ab$ (2)

(1) . (2) $.\supset.$ P]

·3 $a,b,c \varepsilon$ Cls $.\supset:$ $a(bc) = (ab)c = abc$ { Assoc $\cap$ }

{ BOOLE a.1854 p.29 }

On dit que l'opération a est associative, si

$(xay)az = xa(yaz)$ { Assoc a }

L'opération $\cap$ est associative.

[Hp . P3·3 $.\supset.$ $(ab)c \supset ab \,.\, ab \supset a$ $.\supset.$ $(ab)c \supset a$ (1)

» » » . $ab \supset b$ $.\supset.$ $(ab)c \supset b$ (2)

» » $(ab)c \supset c$. (2) . Cmp $.\supset.$ $(ab)c \supset bc$ (3)

(1) . (3) . Cmp $.\supset.$ $(ab)c \supset a(bc)$]

✱ 5.

Soient p, q, r des P contenant une variable, ou un système de variables x.

·0 $p .=_x . q$ signifie $p .\supset_x . q : q .\supset_x . p$.

·01 $p .\supset_x : q .\supset . r$ signifie $pq .\supset . r$.

·02 $p .\supset_x : q .=. r$ signifie $p .\supset_x : q .\supset . r : r .\supset . q$.

Ces P s'énoncent symboliquement :

·1 $a,b \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset \therefore x\varepsilon a .=_x . x\varepsilon b :=. a=b$ Df

·11 $a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset :: x\varepsilon a .\supset_x : x\varepsilon b .\supset . x\varepsilon c \therefore=. ab \supset c$ Df

·12 $a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset :: x\varepsilon a .\supset_x : x\varepsilon b .=. x\varepsilon c \therefore=. ab\supset c . ac\supset b$ Df

Dans la formule $p .=_x . q$, la lettre x est apparente. On sous-entend l'indice au signe $=$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre. Voir §1P3.

Ex. $a\varepsilon \mathrm{Np} .=. a\varepsilon \mathrm{N}+1 . (a-1)!+1 \varepsilon \mathrm{N}\times a$

§— P1·3 §n P3·6 §/P1·3 §R P6·6 P14·1 §r P10·1-·3,·5-·8 ...

Dans ces exemples l'indice au signe $=$ est toujours sous-entendu.

Dans la formule $p .\supset_x : q .\supset . r$, le premier $\supset$ porte l'indice x qui peut être sous-entendu; le deuxième ne porte pas d'indice.

Des deux formes $p\supset . q\supset r$ et $pq\supset r$, la deuxième est plus simple, lorsqu'il s'agit d'une proposition seule; mais la première est plus commode lorsqu'on a une longue suite de propositions qui ont une Hp commune; alors on peut mettre en évidence cette Hp, et l'écrire une seule fois.

Ex.: §R P2·6·7 P11·2-·4.

La P·11 exprime, dans un cas particulier, la règle de l'exporter.

Ex. de la ·02: $a,b,c\varepsilon \mathrm{N} .\supset : a=b .=. a+c=b+c$

$a,b\varepsilon \mathrm{N} .\supset : a^2+b^2 \varepsilon 3\mathrm{N} .=. a\varepsilon 3\mathrm{N} . b\varepsilon 3\mathrm{N}$

·2 $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset : a\supset b .=. a=ab$ Df?

{ LEIBNIZ *PhilS.* t.7 p.214 : « Omne A est B id est $AB \propto A$. »}

Cette P transforme $a\supset b$ en une égalité. Le signe $\supset$ y figure aussi pour pour séparer l'Hp de la Ths. Voir F1897 P52 note.

[$a,b\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset b$. P2·2 $.\supset . a\supset a . a\supset b$. Cmp $.\supset . a\supset ab$ (1)

$a,b\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset b$. (1) . P3·3 $.\supset . a\supset ab . ab\supset a$. P4·0 $.\supset . a=ab$ (2)

» » $a=ab$. P3·31 $.\supset . a\supset b$ (3)

(2) . (3) $.\supset .$ P]

·3 $a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset : a\supset bc .=. a\supset b . a\supset c$ { Distrib($\supset$, ^) }

{ MC COLL a.1878 P12 : «$(x : \mathrm{A})(x : \mathrm{B})(x : \mathrm{C}) = (x : \mathrm{ABC})$. »}

[$a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset bc$. P3·3·31 $.\supset . a\supset b . a\supset c$ (1)

(1) . Cmp $.\supset .$ P]

·4 $a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} . ab\supset c . ac\supset b .\supset . ab=ac$ {F1897 P55}

[Hp $.\supset . ab\supset ac . ac\supset ab .\supset .$ Ths]

Ex. Appelons a, b, c les trois équations

$$x+y=m \qquad xy=n \qquad (x-y)^2=m^2-4n$$

Par des règles algébriques on a $ab \supset c$ $ac \supset b$; on déduit l'équivalence des systèmes ab et ac (mais non de ab et bc).

✱ 6.

·1 $a\varepsilon \text{ Cls} .\supset. x\ni(x\varepsilon a)=a$ Df? {F1889 P58}

Cette égalité a le caractère d'une Df?, car le signe $\ni$ figure dans le premier membre et non dans le second. Mais, contrairement aux autres Df, le premier membre est plus compliqué que le second. Dans la pratique on écrit le signe $x\varepsilon$ en avant d'une P réductible, mais non réduite, à la forme $x\varepsilon a$.

·2 $a,b\varepsilon \text{ Cls} .\supset. a\cap b = x\ni(x\varepsilon a .\cap. x\varepsilon b)$ Df? { Distrib($\ni$,$\cap$) } {F1889 P60}

[P3·1 . Oper $x\ni$.$\supset$. P]

Cette P dit que l'opération $\ni$ est distributive par rapport à $\cap$.

·3 $a\varepsilon \text{ Cls} .\supset. a= x\ni(u\varepsilon \text{ Cls} . a\supset u .\supset_u. x\varepsilon u)$ {F1897 P61}

[P2·3 .$\supset$ $a,u\varepsilon \text{ Cls} . a\supset u . x\varepsilon a .\supset. x\varepsilon u$ (1)

(1) . Export .$\supset$ $a\varepsilon \text{ Cls} .\supset\therefore x\varepsilon a .\supset_x : u\varepsilon \text{ Cls} . a\supset u .\supset_u . x\varepsilon u$ (2)

(2) . Oper $x\ni$.$\supset$ $a\varepsilon \text{ Cls} .\supset. a\supset x\ni($ » » $)$ (3)

$a\varepsilon \text{ Cls} : u\varepsilon \text{ Cls} . a\supset u .\supset_u . x\varepsilon u :\supset: a\varepsilon \text{ Cls} . a\supset a :\supset: x\varepsilon a$ (4)

(4) . Export . Oper $x\ni$.$\supset$ $a\varepsilon \text{ Cls} .\supset. x\ni(u\varepsilon \text{ Cls} . a\supset u .\supset_u . x\varepsilon u) \supset a$ (5)

(3) . (5) .$\supset$. P]

Ex. §$\cup$ 2·1 Dm . 2·6 Dm . §$-$ 3·8 Dm.

✱ 7.

·1 $(x;y;z)=[(x;y);z]$ Df {F1898 P70}

·2 $(x;y)=(a;b) .=. x=a . y=b$ Df? {F1897 P71}

Sur cette P voir RdM t.6 p.65, p.119.

·3 $a,b,c\varepsilon \text{ Cls} .\supset::$

$x\varepsilon a .\supset_x: (x;y)\varepsilon b .\supset_y . (x;y)\varepsilon c \therefore=: x\varepsilon a . (x;y)\varepsilon b .\supset_{x,y}. (x;y)\varepsilon c$

{F1894 §18 P2; 1897 P74}

Considérons une condition contenant une variable x, et deux conditions contenant deux variables x et y. Nous écrirons la première sous la forme $x\varepsilon a$, où a est une Cls ; et les deux dernières sous la forme $(x;y)\varepsilon b$ et $(x;y)\varepsilon c$, où b et c sont des Cls de couples. Alors la déduction

$$x\varepsilon a . (x;y)\varepsilon b .\supset_{x,y}. (x;y)\varepsilon c$$

est identique à la

$$x\varepsilon a .\supset_x : (x;y)\varepsilon b .\supset_y . (x;y)\varepsilon c$$

La P·3 est l'expression simbolique de règles « exporter » et « importer »

dont nous avons parlé dans les « démonstrations ». Un cas particulier est la P5.11.

Ex. dans les Dém. des §R P2·1 §λ P1·2 §Lm P1·1 1·4

·4 $a,b,c\varepsilon \text{Cls} .\supset::$
$x\varepsilon a .\supset x: y\varepsilon b .\supset y . (x,y)\,\varepsilon c \;.:=:.\; y\varepsilon b .\supset y : x\varepsilon a .\supset x . (x,y)\varepsilon c$
{ PEIRCE a.1880 p.24 : $|x \prec (y \prec z)| = |y \prec (x \prec z)|$ }

·5 $a,b,c,d\varepsilon \text{Cls} .\supset::$
$x\varepsilon a .\supset x: y\varepsilon b . (x;y)\,\varepsilon c .\supset y . (x;y)\,\varepsilon d \;.:=:.$
$y\varepsilon b .\supset y: x\varepsilon a . (x;y)\,\varepsilon c .\supset x . (x;y)\,\varepsilon d$
[Import . Export .⊃. P]

D'autres identités où figurent des relations entre plusieurs variables son contenues dans §∃ P2.

✱ 8.

·1 $x=x$ { Ex. §+ 3·1 }
·2 $x=y .\supset. y=x$
·3 $x=y . y=z .\supset. x=z$

Ces trois propriétés de l'égalité sont indépendentes. Voir §vct P2·1·2·3.

Si l'on suppose vérifiées les ·2·3, et que, étant donné un objet x, il en existe un autre y tel que $x=y$, P·2 ⊃ $y=x$, P·3 ⊃ P·1.

Voir Vailati RdM. t.1 p.127, t.2 p.161, et De Amicis RdM. t.2 p.113.

Il y a des relations, différentes de l'égalité, et qui satisfont aux conditions ·1·2·3.

Sont telles les relations géométriques :

« la droite x est parallèle à la y »

« la figure x est superposable à la y »

« la figure x est semblable, ou projective, à la y ».

Voir F1894 §39.

Si l'équation $f(x,y)=0$, où le premier membre est une fonction algébrique entière des nombres x et y, exprime entre ces variables une relation ayant les propriétés ·1·2·3, elle est réductible à la forme $Fx = Fy$, où F est une fonction rationnelle. Voir IdM. a.1900 p.37.

·4 $x=y=z \;.=:\; x=y . y=z$ Df

exprime une abréviation très connue.

·5 $a\varepsilon \text{Cls} . x\varepsilon a . y=x .\supset. y\varepsilon a$ { F1895 §4 P10 }
·6 $x=y \;.=:\; a\varepsilon \text{Cls} . x\varepsilon a .\supset_a . y\varepsilon a$ Df? { F1897 P80 }

{ LEIBNIZ Id. p.219 : « Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate. » }

L'égalité $x=y$ signifie « toute classe qui contient x contiendra aussi y », ou « toute propriété de x est une propriété de y » ; ou « la vérité de la proposition $x\varepsilon a$, qui contient x, n'est pas altérée si l'on remplace x par y. »

Cette P est une Df?, car le second membre ne contient pas le signe $=$ qui figure dans le premier. La difficulté qu'on rencontre à la considérer comme une Df réelle, que le signe $=$ sert déjà dans la définition, peut être écartée par la remarque à la P4·0.

La P·6 ne donne pas toute la signification de $x=y$, car on doit encore définir cette égalité pour les nombres négatifs, rationnels §n1·2 §R1·2, dans les Df par abstraction ; de P·1 on ne peut pas tirer la P4·0. V. F1897 p.39.

Dans les traités d'Arithmétique on a les P

2/3 = 4/6 2/3 est une fraction irréductible 4/6 ne l'est pas

ce qui paraît en contradiction avec la P·5. Ici le signe 2/3 représente d'abord un nombre rationnel, ensuite l'ensemble des trois signes 2 / 3.

·61	Dm P·1	$a\varepsilon \mathrm{Cls} . x\varepsilon a$. Simplif $.\supset.$ $x\varepsilon a$: P·6 $:\supset.$ P
·62	Dm P·2	P·1 $.\supset.$ $x\varepsilon\ z\ni(z=x)$. P·6 $.\supset.$ $y\varepsilon\ y\ni(z=x)$ $.\supset.$ P
·63	Dm P·3	Hp $.\supset:$ $a\varepsilon \mathrm{Cls} . x\varepsilon a$. P·6 $.\supset.$ $y\varepsilon a$. P·6 $.\supset.$ $z\varepsilon a$ $:\supset.$ Ths
·64	Dm P·5	P·6 . Import $.\supset.$ P { F1897 P80-84 }

§2 $\smile$

✱ 1.

·0 $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset. a\smile b = x\ni(c\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset c . b\supset c .\supset_c . x\varepsilon c)$ Df

{F1897 P241}

$a\smile b$, qu'on peut lire « a ou b » indique donc la classe des objets qui appartiennent à l'une, au moins, des classes a et b.

L'opération indiquée par le signe $\smile$ s'appelle « addition logique ».

Ex. §Np P2·1 : $\mathrm{Np} \frown (3+\mathrm{N}) \supset (6\mathrm{N}+1) \smile (6\mathrm{N}-1)$

§$\frown$ 5·9 §Num 2,·31,·32·5·6 §max ·3 §Dvr 1·33 §mlt 1·02·33 §q 43·7 §λ 1·3 4·1 §sin^{-1} P1·1, 2·1.

Leibniz a indiqué l'opération $\smile$ par le signe $+$, ou par le même signe dans un cercle. Nous ne pouvons pas représenter par un même signe les additions logique et arithmétique, sans produire des ambiguïtés. P. ex. :

$\mathrm{Np}+\mathrm{Np} = 2(\mathrm{N}+1)$, $\mathrm{Np} \smile \mathrm{Np} = \mathrm{Np}$.

Le signe $+$ dans Boole a une signification un peu différente.

·1 $a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset:$

$ab\smile c = (ab)\smile c : a\smile bc = a\smile(bc) : a\smile b\supset c .=. (a\smile b)\supset c : a\supset b\smile c .=. a\supset(b\smile c) :$

$a\smile b\smile c = (a\smile b)\smile c : x\varepsilon\ a\smile b .=. x\varepsilon(a\smile b)$ Df

·2 $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset. a\smile b\ \varepsilon \mathrm{Cls}$

·3 » $a\supset a\smile b . b\supset a\smile b$

» { LEIBNIZ *PhilS.* t.7 p.240 : « *N* est in *A* ⊕ *N* » }

[§1P2·3 $.\supset:$ $a,b,c\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset c . b\supset c . x\varepsilon a .\supset. x\varepsilon c$ (1)

(1) . Export $.\supset:$ $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} . x\varepsilon a .\supset: c\varepsilon \mathrm{Cls} . a\supset c . b\supset c .\supset_c . x\varepsilon c$ (2)

(2) . P·0 $.\supset:$ » » $.\supset.$ $x\varepsilon a\smile b$ (3)

(3) . Export $.\supset:$ $a,b\varepsilon \mathrm{Cls} .\supset: x\varepsilon a .\supset_x . x\varepsilon a\smile b$ (4)

(4) . Oper $x\ni$ $.\supset.$ P]

·4 $a,b,c\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\supset c\,.\,b\supset c\,.\supset.\,a\cup b\supset c$ { LEIBNIZ Id. p.232:
«Si A est in C et B est in C etiam $A+B$ erit in C.» }

[P·0 . Oper $x\varepsilon\,.\supset:\,a,b\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\supset.\cdot.\,x\varepsilon\,a\cup b\,.=:\,c\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\supset c\,.\,b\supset c\,.\supset_c.\,x\varepsilon c$ (1
(1) . Simpl $.\supset.\cdot.\,a,b\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,x\varepsilon\,a\cup b\,.\supset:\,c\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\supset c\,.\,b\supset c\,.\supset_c.\,x\varepsilon c$ (2
(2) . Import $.\supset:\,a,b,c\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,x\varepsilon\,a\cup b\,.\,a\supset c\,.\,b\supset c\,.\supset.\,x\varepsilon c$ (3
(3) . Export $.\supset.\cdot.\,a,b,c\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\supset c\,.\,b\supset c\,.\supset:\,x\varepsilon\,a\cup b\,.\supset_x.\,x\varepsilon c$ (4
(4) . Oper $x\varepsilon\,.\supset.$ P]

·5 $a,b,c\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\supset b\,.\supset.\,a\cup c\supset b\cup c$ { Oper $\cup$ }
{ LEIBNIZ Id. p.239 } { McCOLL a.1878 P10 }

·6 $a,b,c,d\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\supset b\,.\,c\supset d\,.\supset.\,a\cup c\supset b\cup d$ { LEIBNIZ p.232:
«Si A est in M, et B est in N, erit $A+B$ in $M+N$.» }

·61 $a\supset b\cup c\,.\,b\supset d\,.\,c\supset d\,.\supset.\,a\supset d$
{ DE MORGAN *Formal logic* a.1847 p.123 }

✱ 2. $a,b,c\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\supset.$

·1 $a\cup a=a$ { LEIBNIZ Id. p.230:
«Si idem secum ipso sumatur, nihil constituitur novum, seu $A+A\infty A$.»
[Df $\cup$ $.\supset.\,a\cup a=x\ni(c\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\supset c\,.\supset_c.\,x\varepsilon c)$. §1P6·3 $.\supset.$ P]

·2 $a\cup b=b\cup a$ { LEIBNIZ Id. p.237 } { Comm$\cup$ }
[Df$\cup$ $.\supset.\,a\cup b\,=\,x\ni(c\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\supset c\,.\,b\supset c\,.\supset_c.\,x\varepsilon c)$
Comm$\cap$ $.\supset.$ » » $.\,b\supset c\,.\,a\supset c\,.\supset_c.$ »
Df$\cup$ $.\supset.$ » $b\cup a$]

·3 $a\cup b\cup c=a\cup(b\cup c)=(a\cup b)\cup c$ { Assoc$\cup$ }
{ SCHRÖDER a1877 P3′ }

[$(a\cup b)\cup c\,=\,x\ni[d\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\cup b\supset d\,.\,c\supset d\,.\supset.\,x\varepsilon d]$
$=\,x\ni[d\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\supset d\,.\,b\supset d\,.\,c\supset d\,.\supset.\,x\varepsilon d]$
$=\,x\ni[d\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\supset d\,.\,b\cup c\supset d\,.\supset.\,x\varepsilon d]$
$=\,a\cup(b\cup c)$]

·4 $b\supset a\,.=.\,a\cup b=a$ { LEIBNIZ Id. p.232:
«Si B est in A, erit $A+B\infty A$ ... Si $A+B\infty A$, tunc B erit in A.»

·5 $a\supset c\,.\,b\supset c\,.=.\,a\cup b\supset c$ [P1·2·3·4 $.\supset.$ P]
{ McColl a.1878 p.11 }

·6 P·5 $.\supset.$ P1·0
[§1 P6·3 $.\supset.\,a\cup b\,=\,x\ni(c\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\cup b\supset c\,.\supset_c.\,x\varepsilon c)$
P·5 $.\supset.$ » » » $.\,a\supset c\,.\,b\supset c\,.$ »)]

De la P1·0, considérée comme Df du signe $\cup$, nous avons tiré les P successives. Réciproquement de la dernière 2·5 on peut déduire la 1·0; et puisque la ·5 est conséquence des P1·2·3·4, on aura une autre façon de traiter cet ensemble de P. On peut introduire l'idée $\cup$ comme primitive, en la déterminant par les P1·2·3·4, qui joueront le rôle de Pp (propositions primitives).

Si l'on remplace $a \supset b$ par $b \supset a$, et $a \frown b$ par $a \smile b$ dans les P :

§2 P5·2·3·4·5·6·61 6·1·2·3 7·2·3

on trouve §3 P1·2·3·4·5·6·61 2·1·2·3 ·4·5

La même substitution dans les démonstrations des premières P, permet de tirer directement les dernières des P1·2·3·4.

Cette correspondence, dite « loi de dualité », a été énoncée par Peirce a.1867.

Une troisième théorie du signe $\smile$ sera indiquée dans §– P3·1.

✱ 3. $a,b,c,d \varepsilon$ Cls $.\supset.$

·0 $ab \smile ac \supset a(b \smile c)$

[P1·3 $.\supset.$ $b \supset b \smile c$. $c \supset b \smile c$. Oper $\frown$ $.\supset.$ $ab \supset a(b \smile c)$. $ac \supset a(b \smile c)$. P1·4 $.\supset.$P]

·01 $a(b \smile c) \supset ab \smile ac$ Pp

Cette P n'est pas conséquence des P précédentes. Pour reconnaître son indépendence, il suffit de donner aux signes Cls, $\frown$, $\smile$ une interprétation qui satisfasse aux P précédentes, mais non à cette-ci. Considérons des points; par Cls indiquons les classes convexes de points, c'est-à-dire les u telles que Med$u=u$; au signe $\frown$ conservons sa valeur ; alors, par la Df1·0 , $a \smile b$ indique « la plus petite classe convexe contenant a et b ». Il est aisé de voir que subsistent les propositions précédentes du § $\smile$, et aussi les dualitiques, mais non la nouvelle ·01. Il faut donc, en suivant l'ordre que nous avons ici choisi, la considérer comme une « proposition primitive ». Voir §– P3·5.

·1 $a(b \smile c) = ab \smile ac$ [=. P·0 . P·01] { Distrib($\frown$,$\smile$) }

{ LAMBERT a.1781 p.33 :

« Will man aber setzen $(m+n)A$, so ist dieses $= mA+nA$. » }

·11 $(a \smile b)c = ac \smile bc$ [Comm $\smile$. Distrib ($\frown$, $\smile$) $.\supset.$ P]

·12 $(a \smile b)(c \smile d) = ac \smile ad \smile bc \smile bd$ { LAMBERT id. }

·2 $a \smile ab = a$ ·21 $a(a \smile b) = a$ { SCHRÖDER a.1877 P10°10′ }

·22 $(a \smile c)(b \smile c) = ab \smile c$ [Distrib($\smile$,$\frown$)] { PEIRCE a.1867 p.250 }

·23 $(a \smile b)(b \smile c)(c \smile a) = ab \smile bc \smile ca$ { SCHRÖDER a.1890 p.383 }

·3 $a=b \;.=.\; a \smile b \supset ab$ { SCHRÖDER a.1890 p.382 }

·4 $ac \supset b \,.\, a \supset b \smile c \;.=.\; a \supset b$ { PEIRCE a.1880 p.34 }

·41 $ac \supset bc \,.\, a \smile c \supset b \smile c \;.=.\; a \supset b$ { SCHRÖDER a.1890 p.362 }

·42 $ac = bc \,.\, a \smile c = b \smile c \;.=.\; a=b$ { » a.1877 p.12 }

·43 $a \supset b \,.\, b \supset c \;.=.\; a \smile b \supset bc$ { PADOA F1897 }

·5 $a \supset b \smile c \,.\, ab \supset d \,.\, ac \supset d \;.\supset.\; a \supset d$ { PIERI F1897 }

✱ 4. $a,b,c \varepsilon$ Cls $.\supset.$

·0 $x \varepsilon a \;.\smile.\; x \varepsilon b \;.=.\; x \varepsilon\, a \smile b$ Df { Distrib(ε,$\smile$) } { F1889 P48 }

Cette P exprime la somme logique de deux propositions $x \varepsilon a$ et $x \varepsilon b$ par la P $x \varepsilon\, a \smile b$, où ne figure que la somme de deux classes. Puisque toute P est réductible à la forme $x \varepsilon\, a$, ou x est une variable, ou un système de variables, on aura défini la somme de deux P quelconques.

Ex. §Np P1·2 : $a\varepsilon$ Np . $b,c\varepsilon$N . $b\times c\ \varepsilon\ N\times a\ .\supset.\ b\varepsilon\ N\times a\ .\cup.\ c\varepsilon\ N\times a$
Ex. §$\times$ 1·5 2·4 §$\wedge$ 5·4·5 §$>$ 2·4·5 ...

La P·0 dit que l'opération ε est distributive par rapport à $\cup$. L'opération $\supset$ ne l'est pas. En effet de $(N+1)^2 \supset 4N \cup (4N+1)$, on ne peut pas tirer $(N+1)^2 \supset 4N$, ou $(N+1)^2 \supset 4N+1$.

·1 $x\ni(x\varepsilon a\ .\cup.\ x\varepsilon b) = a\cup b$ Df? { Distrib($\ni$,$\cup$) } { F1889 P62 }

[P·0 . Oper $x\ni$.$\supset$. P]

Cette P exprime la somme logique de deux classes par une somme de P.

·2 $a\supset c\ .\cup.\ b\supset c\ .\supset.\ ab\supset c$ { McColl a.1878 P13 }
·21 $a\supset b\ .\cup.\ a\supset c\ .\supset.\ a\supset b\cup c$ » » P14

§3 $\wedge$

✱ 1·0 $\wedge = x\ni(a\varepsilon\ \text{Cls}\ .\supset_a.\ x\varepsilon a)$ Df

$\wedge$ indique la classe nulle. Leibniz l'a indiquée par N, initiale de Nihil ; Boole et ses continuateurs par 0. Ce signe ne se rencontre plus dans F1899 où il est exprimé par les signes - et $\exists$. Nous le conservons ici, car il permet de traiter simplement quelques théories logiques. Ex :
$N^3\cap(N^3+N^3)=\wedge$ « il n'y a pas de cubes, sommes de deux cubes ».

·1 $\wedge\ \varepsilon$ Cls { F1897 P436 }

·2 $a\varepsilon$ Cls .$\supset$. $\wedge\supset a$ { F1888 §2 P13 }
[P·0 .$\supset$∴ $x\varepsilon\wedge$.$\supset$: $a\varepsilon$ Cls .$\supset_x$. $x\varepsilon a$ (1)
(1). Import .$\supset$∴ $x\varepsilon\wedge$. $a\varepsilon$ Cls .$\supset$. $x\varepsilon a$ (2)
(2). Export .$\supset$∴ $a\varepsilon$ Cls .$\supset$: $x\varepsilon\wedge$.$\supset_x$. $x\varepsilon a$ (3)
(3). Oper $x\varepsilon$.$\supset$. P]

·3 $a\varepsilon$ Cls .$\supset$. $a\cap\wedge = \wedge$ { Boole a.1854 p.48 }
[P·2 . §1P5·2 .$\supset$. P]

·4 $a\varepsilon$ Cls .$\supset$: $a\supset\wedge$.=. $a=\wedge$ { F1889 P38 }
[P·2 .$\supset$. P]

·5 $a\varepsilon$ Cls .$\supset$: $a=\wedge$.=: $b\varepsilon$ Cls .$\supset_b$. $a\supset b$ Df? { F1897 P300 }

$a,b,c,d\varepsilon$ Cls .$\supset$.
·6 $a\supset b\ .\ b=\wedge\ .\supset.\ a=\wedge$ [P·4 . Syll .$\supset$. P]
·7 $a\supset b\ .\ bc=\wedge\ .\supset.\ ac=\wedge$ { Aristoteles id. id. }
·8 $a\supset c\ .\ b\supset d\ .\ cd=\wedge\ .\supset.\ ab=\wedge$ { De Morgan a.1847 p.123 }

$\cup\wedge$ ✱ 2. $a,b,c,d\varepsilon$ Cls .$\supset$:

·1 $a\cup\wedge = a$ { Boole a.1854 p.47 }
[Hp . P·2 .$\supset$. $\wedge\supset a$. §$\cup$ P2·4 .$\supset$. Ths]

2 $a \cup b = \Lambda \;.=.\; a = \Lambda \,.\, b = \Lambda$ { BOOLE a.1854 } { F1888 §6 P9 }

[P1·4 $.\supset:\; a \cup b = \Lambda \;.=.\; a \cup b \supset \Lambda$
§∪ P2·5 $.\supset:$ » $.=.\; a \supset \Lambda \,.\, b \supset \Lambda$
P1·4 $.\supset:$ » $.=.\; a = \Lambda \,.\, b = \Lambda$]

·3 $a = \Lambda \;.\cup.\; b = \Lambda \;.\supset.\; ab = \Lambda$ { F1895 §3 P11 }

·4 $a \cup b = a \cup c \,.\, a \cap b = \Lambda \,.\, a \cap c = \Lambda \;.\supset.\; b = c$

·5 $a \cup b = c \cup d \,.\, a = c \,.\, ab = \Lambda \,.\, cd = \Lambda \;.\supset.\; b = d$

{LEIBNIZ Id. p.234: « Si $A+B \infty C+D$ et $A \infty C$, erit $B \infty D$, modo A et B itemque C et D sint incommunicantia. » }

·6 $a \cup b \supset c \cup d \,.\, c \supset a \,.\, d \supset b \,.\, ab = \Lambda \;.\supset.\; a \supset c \,.\, b \supset d \,.\, cd = \Lambda$
{ HAUBER a.1829 §291 }

·7 $a \supset b \cup c \,.\, ab = \Lambda \;.\supset.\; a \supset c$ { DE MORGAN a.1847 p.122 }

Une remarque curieuse est la suivante. Remplaçons :

$x \varepsilon$ Cls par $x \varepsilon$ N
$a \supset b$ » $a \leqq b$, ou par « a est un diviseur de b »
$a \cap b$ » « le plus petit des nombres a et b » ou par « le plus grand commun diviseur entre a et b »
$a \cup b$ » « le plus grand des nombres a et b » ou par « le plus petit multiple commun entre a et b »
Λ » 1

Subsisteront toutes les P précédentes qui ne contiennent que les signes indiqués, comme les §2 P3·4·5 P5·2-·64 P6·0-·3 P7·2·3·4... P. ex la §Λ P2·7, par la deuxième substitution devient :

« Si le nombre a divise le plus petit multiple commun entre b et c, et s'il est premier avec b, alors il divise c ».

§4 -

✱ 1·0 Soit a une Cls ; $-a$ indique la Cls des " non a ".
·01 Soit p une proposition; $-p$ désigne sa négation.

Ex. de la négation d'une Cls, §Np P1·0 :

$$\mathrm{Np} = (\mathrm{N}+1)-[(\mathrm{N}+1)\times(\mathrm{N}+1)] \qquad \text{Df.}$$

« Nombre premier signifie nombre (supérieur à l'unité), non décomposable dans le produit de deux nombres ».

Dans ce cas, et dans §N_1 ·5·7 §r 7 §$\wedge$ 35 §max 1·0 §Dvr 1·81 §Np 5·2 13·0·2·3 §l' 4·6·7 §log 1·1·6·7 §q_n 2·0 §Subst 3·0 5·4 §q' 5·3 §tng 6·5 §vct 8·83 70·1·2·3·4 §D 3·2·37 45·3 on a toujours l'expression $b-a$ où la classe a est contenue dans b.

Dans §δ 4·0 §q_n 21·0 la classe a n'est pas nécessairement contenue dans b.

Ex. de la négation d'une P :

§>10·01 : $a, b \varepsilon$ N . $-(a=b) \;.\supset.\; a^2+b^2 > 2ab$.

Autres ex : §+ 2·4 §N_1 ·3 §r 10·1·3·4 11 §$\wedge$ 4·2·3·5·6·7 §≦ 2·6 §Num ·01·03

·05·3·8 §Σ 1·6 §max 12·2 §quot 2·7 §Dvr 1·9 §Np 10·3 12·2 §Sgm ·3 §lim 15·1 §q′ 2·5 4·2 5·2 §π 4·2 §tang 6·0·4 §vct 60·35·37 61·3 §D 3·21 5·1-·3.

Nous avons cités presque toutes les P du F contenant le signe –. On voit que leur nombre est très petit.

Le signe de négation se rencontre sous la forme du signe — de l'Arithmétique, avec lequel il présente quelques analogies formelles, dans Leibniz, Segner, Boole,..., avec la même valeur, ou avec des valeurs semblables. Dans quelques travaux il a la forme $\backsim$.

Nous ne donnons pas ici une définition symbolique de la négation ; nous la considérons comme une idée primitive, dont la valeur est déterminée par les propositions primitives 2·1·2·3.

Les P3·8, §ι P·6 indiquent la possibilité d'autres théories, où la négation est définie ; dans F1897 P363 et 433 sont indiquées deux autres théories ; mais elles ne sont pas développées.

·1 $a\varepsilon$ Cls $.\supset.$ $-(x\varepsilon a) = x\varepsilon -a$ Df?

·11 » $-a = x\varepsilon -(x\varepsilon a)$ Df?

Les P lient le double rôle de la négation entre P et entre Cls ; la .1 exprime la négation d'une P par la négation d'une classe ; la ·11 exprime la négation d'une classe par la négation d'une P. Il suffit donc de considérer l'une des P·0·01 comme exprimant une idée primitive, et prendre une des P·1·11 comme Df.

Pour supprimer des parenthèses on fait les conventions suivantes :

·2 $x -= y \;.=.\; -(x=y)$ Df

$a,b\varepsilon$ Cls $.\supset:$ ·3 $x-\varepsilon a \;.=.\; -(x\varepsilon a)$ Df

·31 $x,y-\varepsilon a \;.=.\; x-\varepsilon a \,.\, y-\varepsilon a$ | Ex. §Np P6·2-·4 | Df

·4 $x\varepsilon -a \;.=.\; x\varepsilon(-a) : a-b = a\backsim b : -a\supset b \;.=.\; (-a)\supset b : -a=b \;.=.\; (-a)=b$ Df

·5 $x\varepsilon -a \;.=.\; x -\varepsilon\, a$ [P·1 . P·3 $.\supset.$ P] | Comm(ε,–) |

On dit qu'une opération α est commutable avec la β si $\alpha\beta x=\beta\alpha x$. Cette P dit que les opérations ε et – sont commutables. L'operation $\supset$ n'est pas commutable avec la –. En effet de $-(\mathrm{Np}\supset 2\mathrm{N}+1)$ « non est vrai que tous les nombres premiers soient impaires » (car 2ε Np), on ne déduit pas $\mathrm{Np}\supset -(2\mathrm{N}+1)$, « tous les nombres premiers sont pairs ».

| ·1-·5 F1889 P46, 61,... |

✱ 2. $a,b,c\varepsilon$ Cls $.\supset.$

·1 $-a\ \varepsilon$ Cls Pp

·2 $-(-a) = a$ | LEIBNIZ Mss. VIIB 2 p.3 : « $A \infty \overline{\text{non non } A}$ » | Pp

·3 $ab\supset c \;.\supset.\; a-c\supset -b$ | Transposer | Pp

·4 $a\supset b \;.\supset.\; -b\supset -a$ »

| LEIBNIZ Mss. *Phil.* VIIB 2 fol.17 : « *A* est *B* ergo non*B* est non*A* » |

[Hp $.\supset.$ $(-b)a\supset a \,.\, a\supset b \;.\supset.\; (-b)a\supset b$. P·3 $.\supset.$ $(-b)(-b)\supset -a$. Simplif $.\supset.$ Ths]

Nous appelons « transposer » l'application des P·3·4, par l'analogie qu'elles

présentent avec la transposition des termes dans une égalité ou inégalité algébrique. La règle ·3 est appelée quelquefois « la loi des inverses ». Nous appelons aussi « transposer » les règles P3·7·71, et 4·2.

La P·4, conséquence des précédentes, remplace la Pp·3 dans les Dm des P·5·51·52 3·1 ...

·5 $a \supset b \;.=.\; -b \supset -a$ [P·4 . $(-b,-a)|(a,b)$P·4 .⊃. P]
{ F1888 P8 }

·51 $a=b \;.=.\; -a=-b$ [P·5 .⊃. P]

·52 $a=b \;.=.\; a \supset b \,.\, -a \supset -b$ { F1897 P118 }

·53 $a-(ab) = a-b$ { F1897 P117 }

·54 $a \supset b \;.=.\; a-b \supset b$ { PADOA F1897 P122 }

·55 $a-b = b-a \;.=.\; a=b$ { VAILATI RdM a.1891 p.103 }

·6 $ab \supset c \;.=.\; a-c \supset -b$ { PEIRCE a.1880 p.35 }
[P·3 . $(-c,-b)|(b,c)$P·3 .⊃. P]

·61 $a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, ab \supset c \,.\, a-b \supset c \;.\supset.\; a \supset c$

·62 $(a-b)c = (ac)-(bc)$ { BOOLE a.1854 p.34 }

·63 $ab = ac \;.=.\; a-b = a-c$ { WHITEHEAD a.1898 p.40 }

$\cup -$ ✱ 3. $a,b,c,d,x \varepsilon \mathrm{Cls} \;.\supset.$

·1 $a \cup b = -|(-a) \frown (-b)|$ Df?

[§2 P5·3 .⊃. $ab \supset a \,.\, ab \supset b$. Transp .⊃. $-a \supset -(ab) \,.\, -b \supset -(ab)$ (1)
(1) . §∪ P1·4 .⊃. $-a \cup -b \supset -(ab)$ (2)
$(-a\,,-b)|(a,b)$ (2) .⊃. $a \cup b \supset -[(-a)(-b)]$ (3)
§∪ P1·3 .⊃. $a \supset a \cup b \,.\, b \supset a \cup b$. Transp .⊃. $-(a \cup b) \supset -a \,.\, -(a \cup b) \supset -b$.
Cmp .⊃. $-(a \cup b) \supset (-a)(-b)$. Transp . $-(-a)(-b) \supset a \cup b$ (4)
(3) . (4) .⊃. P]

·2 $-(a \cup b) = (-a)(-b)$ [P·1 .⊃. P]

·3 $a \frown b = -[(-a) \cup (-b)]$ Df? [$(-a\,,-b)|(a,b)$ P·2 .⊃. P]

·4 $-(ab) = -a \cup -b$ [P·3 .⊃. P]
{ ·1-·4 DE MORGAN a.1858 p.208 } { SCHRÖDER a.1877 p.18 }

·5 P2·1·2·3 . P3·1 .⊃. §∪ P3·01 { F1897 P215 }
[$a,b,c \varepsilon$ Cls .⊃. $ab \supset ab \,.\, ac \supset ac$. Transp .⊃. $a-(ab) \supset -b \,.\, a-(ac) \supset -c$.
Cmp . $a-(ab)-(ac) \supset -b-c$. Transp .⊃. $a-(-b-c) \supset -[-(ab)-(ac)]$. P·1 .
⊃. $a(b \cup c) \supset ab \cup ac$]

La P·1 exprime l'opération ∪ par les ⌒ et - ; dans F1897 on l'a prise comme Df. La P·5 dit que de la ·1, et des propriétés de la négation on déduit la §∪ P3·01, qui se présenta ici comme Pp.

·6 $a = ab \cup a-b$ { LAMBERT a.1781 p.11 : « $a = ax + a|x$ » }

·7 $a-b \supset c \;.=.\; a \supset b \cup c$ { PEIRCE a.1867 } { Transp }
[Transp .⊃: $a-b \supset c \;.=.\; -b-c \supset -a \;.=.\; a \supset b \cup c$]

·71 $ab \supset c \cup d \,.\!=\!.\, a-c \supset d \cup b$ } Transp {

} PEIRCE a.1880 p.36 : $a \circ b \cup c - d = a \circ \overline{d} \cup c - \overline{b}$ ·

·8 $a-b = x \ni c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a \supset b \cup x \,.\supset_c .\, x \varepsilon c$ Df? } F1897 P257 {

[§1 P5·3 $.\supset.\ a-b = x \ni c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a-b \supset x \,.\supset_c .\, x \varepsilon c$

P·7 $.\supset.$ » » $.\, a \supset b \cup x$ »]

La P·7 contient dans un membre le signe – qui ne figure pas dans le second ; on peut la transformer dans la P·8, qui est une définition possible de l'expression $a-b$.

Si l'on prend la ·8 comme Df. il ne faut plus considérer le signe $-b$, isolé, qui effectivement ne se rencontre pas dans les applications. En conséquence il faut modifier l'énonciation de quelques P précédentes. P. ex. la P2·4 doit être transformée en $a.b.c\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a \supset b \,.\supset.\, c-b \supset c-a$.

Il y a l'avantage à prendre la ·8 comme Df. qu'on supprime la négation du nombre des idées primitives ; mais de la ·8 comme Df. et des P précédentes ce § on ne sait pas déduire les P de ce §. Voir un essai dans F1897 P258-260.

·9 $(a \cup x)(b \cup x) = a-x \cup bx$ } PEIRCE a.1880 p.36 {

·91 $(ax \cup b-x)(cx \cup d-x) = acx \cup bd-x$ } BOOLE a.1854 {

·92 $-(ax \cup b-x) = (-a)x \cup (-b)(-x)$ } SCHRÖDER a.1877 P.19 {

·93 $ab \supset ax \cup b-x \supset a \cup b$ } SCHRÖDER a.1891 P.48 {

·94 $a \cup b = a \cup b(-a)$ } » a.1890 p.308 {

·95 $a = b-c \cup c-b \,.\supset.\, b = c-a \cup a-c$

} JEVONS *Pure logic* a.1864 p.61 {

Cet A. a indiqué la fonction $a-b \cup b-a$ par $a \circ b$; le signe $\circ$ correspond au latin *aut* ; le signe $\cup$ à *vel*. Cette opération a des curieuses propriétés, développées dans F1895 §3 P24-30, dont la plus importante est la ·95.

Λ = ✱ 4. $a, b \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset:$ ·1 $a-a = \Lambda$

} LEIBNIZ *PhilS.* t.7 p.230 : « seu A—A ∞ N » {

[P3·8 $.\supset.\ a-a = x \ni c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a \supset a \cup c \,.\supset_c .\, x \varepsilon c$

§$\cup$ 1·3 » $= x \ni c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset_c .\, x \varepsilon c = \Lambda$]

·2 $a \supset b \,.\!=\!.\, a-b = \Lambda$ Df? } Transp {

} LEIBNIZ id. p.212: Omne *A* est *B*, id est ... *A* non *B* est non Ens {

} F1888 §6 P2 {

[§Λ P2·1 . §– P3·7 . §Λ P1·4 $.\supset:$

$a \supset b \,.\!=\!.\, a \supset b \cup \Lambda \,.\!=\!.\, a-b \supset \Lambda \,.\!=\!.\, a-b = \Lambda$]

·3 $a = \Lambda \,.\!=\!.\, a \supset -a$ Df?

·4 $a \supset -\Lambda$

[Hp . §– P2·1 $.\supset.\ -a\ \varepsilon \mathrm{Cls}$. §Λ P1·2 $.\supset.\ \Lambda \supset -a$. Transp $.\supset.$ P]

·5 $a-\Lambda = a$ [P·4 . §1 P5·2 $.\supset.$ P.]

$\cup \Lambda - \ast$ 5. . $a,b,c,x \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset$:

·1 $a=b \,.=.\, a-b \cup b-a = \Lambda$ { SCHRÖDER a.1877 P175 }

·2 $a=b \cup c \,.\, bc = \Lambda \,.\supset.\, b=a-c$ { BOOLE a.1854 p.35 }

·3 $ax \cup b-x = \Lambda \,.=.\, b \supset x \supset -a$
{ BOOLE p.101; SCHRÖDER a.1891 P49 }

·4 $ax \cup b-x = \Lambda \,.\supset.\, ab = \Lambda$ { BOOLE a.1854 p.101 }

La classe $-\Lambda$ a été indiquée par Peirce, AJ. a.1887 et dans F 1889 et suivants, par le signe $\vee$, qu'on lit « tout » ou « vrai ». Toute expression obtenue en combinant une classe x avec des classes données par les signes $\cap \cup -$ est réductible à la forme $ax \cup b-x$, où a et b sont des classes déterminées. En effet une classe constante $a = ax \cup a-x$;
la variable $x = \vee x \cup \Lambda - x$;
la somme de deux expressions ayant cette forme a évidemment la même forme; et les P3·91-·92 réduisent à cette forme le produit et la négation d'une expression semblable.

Si l'on pose $fx = ax \cup b-x$, on déduit $f\vee = a$, et $f\Lambda = b$; et l'on a le développement de toute fonction logique:

$$fx = (f\vee)x \cup (f\Lambda)-x$$

du à Boole, et qui présente quelques analogies avec la formule de Taylor.

Soit $f(x,y)$ une fonction logique des deux classes x et y. Développons par rapport à x, et ensuite les coefficients par rapport à y; on aura·

$$f(x,y) = f(\vee,\vee)\,x\,y \cup f(\Lambda,\vee)(-x)\,y \cup f(\vee,\Lambda)\,x(-y) \cup f(\Lambda,\Lambda)(-x)(-y).$$

En général, une fonction logique a $2^m = n$ termes, chacun desquels contient un coefficient multiplié par le produit de l'affirmation ou de la négation de chacune des lettres.

Si la fonction ne contient que les m lettres, les coefficients auront nécessairement la valeur $\vee$ ou la Λ. On obtient aussi 2^n expressions différentes avec m lettres; parmi elles il y a les classes constantes Λ et $\vee$.

Toute déduction, et toute égalité entre deux expressions de la forme dite est réductible à une égalité dont le second membre est Λ, par P4·2 5·1; le système simultané de plusieurs équations est réductible à une équation seule, par §$\cup$ P2·2. En conséquence tout système de déductions on d'égalités logiques est réductible à la forme 5·3, qui permet de la résoudre par rapport à la classe inconnue x.

Soient données n propositions conditionnelles, indépendentes entre elles; c'est-à-dire telles qu'une quelconque ne puisse être déduite des autres en les combinant par les signes $\cap \cup -$; cela arrive si elles sont indiquées par n lettres variables. Par la relation qui passe entre les Cls, et les P conditionnelles, qui ne sont que deux formes d'une même idée, on déduit qu'en les combinant par les signes $\cap \cup -$, on peut composer 2^{2^n} propositions différentes. Les signes $\vee$ et Λ, lorsqu'il s'agit de P, signifient « vrai » et « faux ».

Considérons encore m classes indépendentes. En égalant toutes les fonctions de ces classes à Λ, on a un ensemble de P; mais elles ne sont pas

indépendentes; car, par la $\S\cup$ P2·2, si le premier membre est une somme, on peut décomposer cette P dans l'affirmation de plusieurs autres.

Les P indépendentes s'obtiennent en égalant à $\wedge$ les produits des affirmations ou des négations des m Cls; elles sont en nombre de $2^m = n$. Les produits des affirmations ou des négations de ces n équations sont en nombre de $2^n = p$; parmi eux il y a le produit de toutes ces n P, qui est réductible à $\vee = \wedge$, proposition fausse, qui ne contient plus de variables, et que nous supprimons. On a encore $p-1$ produits contenant effectivement de variables.

En affirmant la somme logique d'un nombre quelconque de ces P, on a $2^{p-1} = q$ propositions. L'affirmation de toutes, ou d'aucune P ne contiennent plus de variables. On a en tout $q-2 = 2^{\wedge} 2[^{\wedge}(2^{\wedge} m-1)]-2$ propositions, qu'on peut énoncer avec m Cls, en les combinant par les signes $\frown, \smile, -$, soit entre Cls, soit entre les P résultantes, et qui contiennent effectivement les variables. Il forment un système complet: en les combinant par addition, multiplication, et négation, on a toujours des P du même système.

Si $m=1$, avec une Cls a on peut énoncer les 6 P:

$$a = \wedge \qquad -a = \wedge \qquad a - = \wedge \qquad -a - = \wedge$$
$$a - = \wedge \,.\, -a - = \wedge \qquad a = \wedge \,.\cup.\, -a = \wedge$$

Sur deux classes ($m=2$), on peut énoncer 32766 relations.

Nous avons indiqué par des signes simples des deux relations $a \supset b$ et $a = b$; quelques A. ont introduit des signes nouveaux pour indiquer d'autres relations moins importantes.

Nous avons fait ce calcul dans F1888 p.X. V. aussi Schröder a.1891 p.164.

Ces théories ne sont que partiellement réduites en symboles, et n'ont pas reçu d'application dans les sciences mathématiques.

§5 $\exists$

$\wedge - \exists$ ✱ 1. $a, b \varepsilon$ Cls $.\supset:$ ·0 $\exists a \,.=.\, a - = \wedge$ Df

·01 $\exists ab \,.=.\, \exists(ab)$ Df

Soit a une Cls; $\exists a$ signifie « il y a des a, les a existent ». Nous exprimons cette idée au moyen des précédentes par la P·0. Ex:

$\exists N^2 \frown (N^2 + N^2)$ « Il y a des nombres carrés, sommes de deux carrés ». §+ 2·52 §R 4·8 §$^{\wedge}$ 4·2-·8. La P particulière « quelque a est b » s'exprime. sans conventions nouvelles, par $\exists\, ab$.

·1 $x \varepsilon a \,.\supset.\, \exists a$ { F1889 P53 } {Ex.: §Dvr P1·3}

[Syll $.\supset:$ $a \varepsilon$ Cls $.\, a = \wedge \,.\, x \varepsilon a \,.\supset.\, x \varepsilon \wedge$ (1)

(1) . §- 2·1 . Df $\wedge$ $.\supset:$ » » $x \varepsilon - a$ (2)

(2) . Transp . Df $\exists$ $.\supset.$ P]

De $x \supset a$ on ne déduit pas $\exists a$, si l'on n'est pas assuré que $\exists x$ (P1·2).

·2 $a \supset b \,.\, \exists a \,.\supset.\, \exists b$ [§$\wedge$ 1·5 . Transport $.\supset.$ P]

·21 $a \supset b \,.\supset:\, \exists a \,.\supset.\, \exists b$ { Oper $\exists$ } { F1895 P116 }

« Opérer par $\exists$ » signifie écrire le signe $\exists$ en avant des deux membres d'une déduction. On obtient une déduction de même sens.

·3 $\exists\, a \frown b \,.\supset.\, \exists a \,.\, \exists b$ [P·2 ⊃ P] { F1895 §3 P12 }
·4 $a \supset b \,.=.\, \exists \operatorname{Cls} \frown c \ni (a = bc)$ Df? { F1897 P411 }

✱ 2. $a,b,c \varepsilon \operatorname{Cls} \,.\supset.\,\therefore$

·1 $(x;y)\varepsilon a \,.\supset_{x,y}.\, y\varepsilon b \;:=:\; \exists\, x \ni [(x;y)\varepsilon a] \,.\supset_y.\, y\varepsilon b$
{ P·1 = Elim x = (éliminer la variable x) }

Supposons que dans une déduction: Hp .⊃. Ths (1)
l'Hp contienne une variable x, ou un système de variables, qui ne figure pas dans la Ths; le signe ⊃ porte comme indices x et d'autres variables. Alors la P (1) est réductible à la forme:

(S'il y a des x vérifiant l'Hp) .⊃. Ths (2)

où le signe ⊃ ne porte plus comme indice x. La transformation de (1) en (2) s'appelle « élimination de x ». Dans la nouvelle Hp la lettre x est apparente. Dans plusieurs cas on peut la faire disparaître.

Ex. dans les Dém. de §> 1·1·2 §Dvr 1·3 §ϑ·33 §λ 1·2 §vct 3·11.

·2 $\exists\, x \ni \exists\, y \ni [(x;y)\varepsilon a] \,.=.\, \exists\, y \ni \exists\, x \ni [(x;y)\varepsilon a] \,.=.\, \exists a$

Soit une relation ou condition entre les variables x, y, que nous représentons par $(x;y)\varepsilon a$. Alors dans la P " il y a des x tels qu'il y a des y qui vérifient la condition donnée " on peut permuter les deux variables. On peut la transformer aussi en " il y a des couples $(x;y)$ qui satisfont à la condition ".

·3 $\exists\, y \ni [x\varepsilon a \,.\, (x;y)\varepsilon b] \,.=_x.\, x\varepsilon a \,.\, \exists\, y \ni [(x;y)\varepsilon b]$

La P " il y a des y qui vérifient le produit logique d'une condition en x et d'une en (x, y) " signifie " la condition en x est vérifiée, et il y a des y qui vérifient la condition en y ". Autrement dit, on peut permuter le signe $\exists y \ni$ avec $x\varepsilon a$.

·4 $\exists\, a \frown x \ni \{\exists\, b \frown y \ni [(x;y)\varepsilon c]\} \,.=.\, \exists\, b \frown y \ni \{\exists\, a \frown x \ni [(x;y)\varepsilon c]\}$
·5 $\exists\, (x;y) \ni (x\varepsilon a \,.\, y\varepsilon b) \,.=.\, \exists a \,.\, \exists b$

" Il y a des couples (x, y) qui vérifient le produit logique d'une condition en x par une condition en y " signifie " il y a des x qui satisfont à la première condition, et des y qui satisfont à la deuxième ".

·6 $\exists\, y \ni [x\varepsilon a \,.\supset_x.\, (x;y)\varepsilon b] \,.\supset:\, x\varepsilon a \,.\supset_x.\, \exists\, y\varepsilon [(x;y)\varepsilon b]$
{ ·1-·6 F1889 P66, F1894 §18 ... }

Ces P expriment les principales identités qu'on rencontre entre les systèmes de variables. Remarquons que la P·6 n'est pas invertible. (Elle a été invertie par les analystes qui ont confondu la convergence d'une série avec sa convergence uniforme, la P §cont 1·01 avec la P1·1, et dans d'autres cas).

$\cup = \exists$ ✱ 3. $a,b \varepsilon \operatorname{Cls} \,.\supset:$ ·1 $\exists(a \cup b) \,.=.\, \exists a \,.\cup.\, \exists b$
{ F1895 §3 P10 } { Distrib($\exists$,$\cup$) }
·2 $a \supset b \,.=.\, \exists \operatorname{Cls} \frown c \ni (a \cup c = b)$ Df? { F1897 P412 }
·3 $\exists a \,.=.\, -a = a \cup -a$ Df? { PADOA F1899 }

§6 ι

$\cdot 0 \quad \iota x = y\ni(y=x) \quad \{ = (\text{égal à } x)\}$ Df

$\cdot 01 \quad y\varepsilon\, \iota x .=. y\varepsilon(\iota x) : a \supset \iota x .=. a \supset (\iota x) : a = \iota x .=. a = (\iota x)$ Df

Dans quelques cas il est utile de décomposer le signe $=$ (est égal à), dans le signe ε (est), et dans un nouveau signe ι (égal à). Ce signe ι est l'initiale du mot ἴσος. En conséquence ιx désigne la classe formée par l'objet x, et $\iota x \cup \iota y$ la classe composée des objets x et y.

$-\iota x$ signifie « différent de x ».

Ex. $\quad \mathrm{Np} - \iota 2 \supset 2\mathrm{N}+1$

« tout nombre premier différent de 2 est impair ». Opérons par $x\varepsilon$ (§1 2·1), par Distrib(ε,$\cap$) (§1 3·1), et Comm(ε,$-$) (§ 1·5). Elle devient:

$$x\varepsilon\ \mathrm{Np} \,.\, x - = 2 \,.\supset.\, x\varepsilon\ 2\mathrm{N}+1$$

Transposons : $\quad x\varepsilon\ \mathrm{Np} \,.\supset.\, x = 2 \,.\cup.\, x\varepsilon\ 2\mathrm{N}+1.$

Ex.: §N_1 ·4·5 §r 1·1·2 7 11 §$\wedge$ 35 §Np 4·31 13·2 §Q 1·01·4 3·2 27·01 33·2.

Les idées x et ιx sont évidemment différentes; car si l'on opère par $y\varepsilon$, on obtient les propositions différentes $y\varepsilon x$, et $y = x$.

$\cdot 1 \quad y\varepsilon\, \iota x .=. y = x$ [= P·0]

$\cdot 2 \quad a\varepsilon\,\mathrm{Cls} \,.\supset:\, x\varepsilon a .=. \iota x \supset a$ Df?

[§1 P8·5 $.\supset:$ $\quad a\varepsilon\,\mathrm{Cls} \,.\, x\varepsilon a \,.\, y\varepsilon\, \iota x \,.\supset.\, y\varepsilon a$ (1)

(1) . Export $.\supset.\cdot.$ $\quad a\varepsilon\,\mathrm{Cls} \,.\, x\varepsilon a \,.\supset:\, y\varepsilon\, \iota x \,.\supset_y .\, y\varepsilon a$ (2)

(2) . Oper $y\ni .\supset:$ $\quad a\varepsilon\,\mathrm{Cls} \,.\, x\varepsilon a \,.\supset.\, \iota x \supset a$ (3)

§1 P8·1 $.\supset.$ $\quad x\varepsilon\, \iota x$ (4)

(4) $.\supset:$ $\quad a\varepsilon\,\mathrm{Cls} \,.\, \iota x \supset a \,.\supset.\, x\varepsilon\, \iota x \,.\, \iota x \supset a \,.\supset.\, x\varepsilon a$ (5)

(3) (5) $\supset$ P]

La P·2 exprime la P singulière $x\varepsilon a$ sous la forme d'une P universelle, contenant le signe ι.

$\cdot 3 \quad \iota x = \iota y .=. x = y$ $\quad [\ \iota x = \iota y .=. \iota x \supset \iota y \,.\, \iota y \supset \iota x .=. x\varepsilon\iota y\ ]$

$\cdot 4 \quad a\varepsilon\,\mathrm{Cls} \,.\supset.\cdot.\, a = \iota x .=:\, x\varepsilon a : y\varepsilon a \cdot\supset_y .\, y = x$

$\cup\ \iota \quad \cdot 5 \quad a\varepsilon\,\mathrm{Cls} \,.\supset:\, x,y\varepsilon a .=. \iota x \cup \iota y \supset a$ Df?

$\wedge\ -\ \iota \quad \cdot 6 \quad a\varepsilon\,\mathrm{Cls} \,.\supset.\, -a = x\ni(\iota x \cap a = \wedge)$ Df?

$[\ -a = x\ni(x\varepsilon -a) = x\ni(\iota x \supset -a) = x\ni(\iota x \cap a = \wedge)\ ]$

Cette P exprime la négation au moyen des idées $\wedge$ et ι, définies par les seules idées des §§ 1 et 2. Nous pouvons déduire une des P fondamentales du signe $-$:

$\cdot 61 \quad \mathrm{P}\cdot 6 \supset$ §$-$ P2·4

$[\ a,b\varepsilon\,\mathrm{Cls} \,.\, a \supset b \,.\supset.\, a \cap \iota x \supset b \cap \iota x$

» » » $(b \cap \iota x = \wedge) \supset (a \cap \iota x = \wedge)$

» » » $x\ni(\quad » \quad) \supset x\varepsilon(\quad » \quad) \,.\supset.\, -b \supset -a\ ]$

$\exists\ \iota \quad \cdot 7 \quad a\varepsilon\,\mathrm{Cls} \,.\supset.\, x\varepsilon a .=. \exists\, \iota x \cap a$ Df? [P·6 $\supset$ P]

$\cdot 8 \quad \exists\, \iota x \quad [\ x\varepsilon\iota x \,.\, \S\exists\ 1\cdot 1 \,.\supset.\, \mathrm{P}\ ]$ $\quad \{$ ·0·1·2·7 F1895 p.116.

·5·6 F1897 P423, 425. ·3·4·8 Padoa RdM t.6 p.117 $\}$

§7 $\imath$

$\exists\ \iota\ \imath$

·0	$a\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,\exists a : x,y\varepsilon a\,.\supset_{x,y}.\,x=y\ :\supset:\ z=\imath a\,.=.\,a=\iota z$	Df
·01	» $: y\varepsilon a\,.\supset_y.\,a=\iota y\ :\supset:$ » »	Df?
·02	» $.\,\exists\, y\ni(a=\iota y)\ .\supset:$ » »	Df?
·03	Hp P·0 $.\supset:\ z=\imath a\,.=.\,z\varepsilon a$	Df?
·04	» $.\,b\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\supset\therefore\ \imath a\,\varepsilon b\,.=:\ a=\iota x\,.\supset_x.\,x\varepsilon b$	Df?
·05	» » » » $\exists\, x\ni(a=\iota x\,.\,x\varepsilon b)$	Df?
·06	» » » » $\exists\, a\cap b$	Df?
·07	» » » » $a\supset b$	
·1	» $.\supset.\ \imath a\,\varepsilon a$ [$(a\|b)$P·04 $\supset$ P] Ex.: §— 1·1 §l' 1·1	
·11	» » $\iota(\imath a)=a$	
·2	$\imath(\iota x)=x$	Df?
·3	$a\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a=\iota x\,.\supset.\,x=\imath a$	
$\bigwedge\imath$ ·4	$\bigwedge=\imath\ \mathrm{Cls}\cap x\ni[a\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\supset_a.\,x\supset a]$	Df?
$\bigwedge\dot{-}\imath$ ·5	$\bigwedge=\imath\ x\ni[a\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\supset_a.\,a\dot{-}a=x]$	Df?

{ ·0·1·2·4·5 F1897 P430-5. ·03·11·3 PADOA RdM t.6 p.118 F1899 }

Soit a une classe qui contient un seul individu x. Cela arrive lorsqu'il y a des a, et si deux individus de la classe a sont nécessairement égaux. Dans ce cas $\imath a$ (ou $\bar{\iota}\,a$ des travaux précédents), qu'on peut lire " le a ", indique l'individu x qui forme la classe a.

Ex. §— 1·0 : $a,b\varepsilon\mathrm{N}\,.\,b>a\,.\supset.\,b-a=\imath\,\mathrm{N}\cap x\ni(a+x=b)$

« Soient a et b des nombres, et soit $a>b$. Par $b-a$ on indique *le* nombre qu'il faut ajouter à a pour avoir b ».

Nous savons de l'Arithmétique que, dans les hypothèses énoncées, la classe $\mathrm{N}\cap x\ni(a-x=b)$ existe, et qu'elle contient un seul individu. On conclut, par la P·1 $b-a\varepsilon\,\mathrm{N}\ .\ a+(b-a)=b$.

Si, selon M. Padoa RdM t.6 p.117, on indique par « $a\varepsilon$ Elm » (a est un élément), l'Hp de la P·0, quelques P se présenteront sous une forme plus simple.

Les P·01-·03 sont des transformations de la même définition. Nous ne sommes pas réussi à donner une Df du signe isolé $\imath a$, mais seulement de l'égalité $x=\imath a$. Les P·04-·06 expriment la P $\imath a\,\varepsilon b$ sous une autre forme, où ne figure plus le signe $\imath$; puisque toute P contenant le signe $\imath a$ est réductible à la forme $\imath a\,\varepsilon b$, où b est une Cls, on pourra éliminer le signe $\imath$ dans toute P.

La P·2 dit que $\imath$ représente l'opération inverse de ι. Elle a le caractère d'une Df ?, car le signe $\imath$ figure dans le premier membre, et non dans le second. Mais le premier membre est plus compliqué que le second ; on écrit le signe $\imath$ en avant d'une expression réductible, mais non réduite à la forme ιx.

Voir d'autres remarques dans F1897 p.50.

Ex. §/ 1·0 §R 3·0 5·0 12·0 22·0 25·0 §r 2·2·3·6·7·9 §mod 1·1 §max 1·0 §l′ 1·0 §Log ·1 §E 1·1 §lim 1·0 §sin^{-1} 1·0 §vct 3·1·2·3 §S 1·0.

§8 ⁝

0 $u,v\varepsilon$ Cls $.\supset.$ $(u⁝v) = (x;y)\ni(x\varepsilon u \,.\, y\varepsilon v)$ Df

·01 » $.\supset:$ $(x;y)\ \varepsilon\ (u⁝v)\ .=.\ x\varepsilon u \,.\, y\varepsilon v$ Df ?

·02 $u,v,w\ \varepsilon$ Cls $.\supset.$ $(u⁝v⁝w) = [(u⁝v)⁝w]$ Df

·03 » » $(u⁝v⁝w) = (x;y;z)\ni(x\varepsilon u \,.\, y\varepsilon v \,.\, z\varepsilon w)$

$(u⁝v)$ désigne l'ensemble des couples formés par un objet de la classe u avec un objet de la classe v; il faut distinguer ce nouveau signe, de $(u;v)$ qui désigne le couple dont les deux éléments sont les classes u et v.

Ex.: §Num ·7

Num N = Num(N⁝N) « le nombre des nombres naturels est un infini de la même puissance que le nombre des couples des nombres naturels ».

§lim 19·1·2 §Dtrm §∫ 11·1.

$\iota\ \imath$ ⁝ ·1 $(\iota x ⁝ \iota y) = \iota(x;y)$ ·2 $x;y = \imath(\iota x ⁝ \iota y)$

·3 $\iota x ⁝ \iota y = \iota z ⁝ \iota t\ .=.\ x;y = z;t$

$\exists$ ⁝ ·4 $a,b,c,d\varepsilon$ Cls $.\ \exists a\ .\ \exists b\ .\ a;b = c;d\ .\supset.\ a⁝b = c⁝d$

{ ·0-·03 F1899 §8. ·1-·4 PADOA RdM t.6 p.120 }

§9 f ɟ

✱ 1. $a,b,c\varepsilon$ Cls $.\supset.\therefore$

·0 $u\varepsilon\ a\jmath b\ .=:\ x\varepsilon a\ .\supset_x.\ xu\ \varepsilon b$ Df

·01 $u\varepsilon\ bfa\ .=:\ x\varepsilon a\ .\supset_x.\ ux\ \varepsilon b$ Df

Note sur les fonctions.

On peut prononcer « fonction » le signe f et « ef » le signe ɟ.

Ces signes permettent de représenter par les symboles idéographiques les idées de « fonction, correspondance, opération » etc.

P·0 " Soient a et b des classes. Nous dirons que u est un $a\jmath b$, lorsque, le signe u écrit après un individu quelconque de la classe a produit un b " (P·01) " et que u est un bfa, lorsque le signe u écrit en avant d'un a produit un b ".

Dans les traités d'Analyse on dit que a est la classe des valeurs de la « variable indépendente », et la classe b contient des valeurs de la fonction.

P. ex. soit x un N; $x!$ (factorielle de x) est un N; donc $! \varepsilon$ N$\jmath$N. Il est le seul exemple de fonction ɟ répandu en Analyse.

Les expressions $+a$, $-a$, $/a$, ont les significations « ajouter a », « retrancher a », « diviser par a », et l'on a les P § P5·4, §— P1·5, §/ P1·5. Ainsi se présentent naturellement les nombres négatifs et les fractionnaires.

Dans l'usage commun et dans le Form., le signe de fonction précède, en général, la variable.

Ex : mod sgn Φ nt dt E β Chf log sin cos B.

Ici les valeurs de la variable et de la fonction sont des nombres de différentes espèces : N, n, R, Q, q, q'.

Les signes de fonction Num, max, min, Dvr, mlt, l', l,, précèdent des classes de nombres ; la valeur de la fonction est un nombre.

Les signes Med λ δ font correspondre des classes de nombres à d'autres classes.

Une fonction de deux variables est quelquefois représentée par un signe écrit devant le couple des variables. Ex. quot, rest, Cmb, mp.

Dans d'autres cas on place le signe de fonction entre les deux variables; ex. $a+b$, $a-b$, $a\times b$, a/b, $a\backslash b$; ici a, b, et la valeur de la fonction sont des nombres. Dans $a\cdots b$, $a\vdash b$, $a\frown b$, $a\smile b$, la valeur de la fonction est une Cls. Ont la même forme les « relations » $a=b$, $a\supset b$, $a\varepsilon b$, $a<b$; les signes de relation sont des signes de fonction, dont la valeur est une proposition.

Quelquefois on écrit la variable comme indice à la fonction ; nous conviendrons que u_1 u_2 ... ne diffèrent, que par la forme, de $u1$ $u2$ ...

Plusieurs A. ont aujourd'hui l'habitude d'enfermer la variable entre ( ) ; mais dans la formule $u(x)$ les ( ) n'ont pas la valeur expliquée par §1 P1·2, car une lettre seule ne doit pas être enfermée. Elles ne sont pas nécessaires, puisqu'on écrit $\log x$ et non $\log(x)$, $f(x+h)$ et non $f((x+h))$; elles ne se trouvent pas dans Lagrange, Abel, ... Dans le langage ordinaire la variable est mise au génitif ; c'est cela qu'on veut indiquer par les ( ) ; Legendre a. VI p.135 écrit $f:x$, où les (:) correspondent à « de ». Nous supposons le mot « de » incorporé dans le signe de fonction ; ainsi « log », signifie « le logarithme de ».

Les signes f et ɟ se présentent nécessairement lorsqu'on indique par une lettre un signe de fonction ; c'est-a-dire lorsqu'on considère une expression dont la valeur dépend de la nature d'une fonction, comme Σ Π lim Dtrm D S.

P. ex : $\Sigma(f,u)$, où $u\varepsilon$ Cls, et $f\varepsilon$ qf$u$, c'est-à-dire f est une fonction numérique définie dans la classe u, indique la somme des valeurs de f, lorsque la variable varie dans la classe u.

Pour quelques formes de la classe u la fonction f dans l'usage commun a des noms particuliers :

$n\varepsilon$ N $.\supset.$ q f $1\cdots n$ = (succession de n quantités)

qf$(1\cdots n$ ⁝ $1\cdots n)$ = (fonction numérique de deux variables qui prennent les valeurs de 1 à n) = (lettre qui, munie de deux indices variables de 1 à n représente une quantité) = (matrice d'un déterminant d'ordre n.

q f N = (série, ou suite, de quantités) §Lm §lim.

q f(N⁝N) = (série double) §lim P10.

qf $a\vdash b$ = (fonction réelle définie dans l'intervalle de a à b) §cont P2.

On pourrait convenir d'écrire toujours le signe de fonction en avant de la variable (f), ou toujours après (ɟ) ; nous écrirons les P sous une seule des deux formes ; mais nous conservons tous deux les signes f et ɟ.

·1 $u\varepsilon\, a$ɟ$b\,.\,x,y\varepsilon a\,.\,x=y\,.\supset.\,xu=yu$

[§1 P6·1 $.\supset.\, x\varepsilon\, z\ni(zu=xu)$. Hp $.\supset.\, y\varepsilon\, z\ni(zu=xu)\,.\supset.$ Ths]

·2 $u\varepsilon\, a\jmath b\,.\, c \supset a\,.\supset.\, u\varepsilon\, c\jmath b$ [Hp . $x\varepsilon c\,.\supset.\, x\varepsilon a\,.\supset.\, xu\,\varepsilon b\,:\supset.$ P]

·3 $u\varepsilon\, a\jmath b\,.\, b \supset c\,.\supset.\, u\varepsilon\, a\jmath c$ [Hp $.\supset:\, x\varepsilon a\,.\supset.\, xu\,\varepsilon b\,.\supset.\, xu\,\varepsilon c\,:\supset.$ Ths]

✱ 2. $a,b,c,d\varepsilon$ Cls $.\supset.\therefore$

·0 $u\varepsilon\, a\jmath b\,.\, v\varepsilon\, b\jmath c\,.\, x\varepsilon a\,.\supset.\, x(uv) = (xu)v = xuv$ Df

·01 $u\varepsilon\, bfa\,.\, v\varepsilon\, cfb\,.\, x\varepsilon a\,.\supset.\, (vu)x = v(ux) = vux$ Df

·1 $u\varepsilon\, a\jmath b\,.\, v\varepsilon\, b\jmath c\,.\supset.\, uv\ \varepsilon\, a\jmath c$

·2 $u\varepsilon\, a\jmath b\,.\, v\varepsilon\, b\jmath c\,.\, w\varepsilon\, c\jmath d\,.\, x\varepsilon u\,.\supset.\, (xu)(vw) = (xuv)w$

L'opération vu, définie par la P·01 est dite « le produit des opérations u et v ». Dans le calcul différentiel on l'appelle « fonction de fonction ». Si u et v sont des mouvements, et en général des pnt f pnt, $v\,u$ est dit le mouvement composé. L'expression vux est associative.

{ 1·0·-3, 2·0-·2 F1895 p.6 }

§10 |

·1 $a,b\varepsilon$ Cls . $u\varepsilon\, bfa\,.\supset.\, (ux)|x = u$ Df

·2 ——— $u\varepsilon\, a\jmath b\,.\supset.\, (|x)(xu) = u$ — { F1898 }

Le signe | est le signe d'inversion.

Soit u un signe de fonction f; ux est une expression contenant x. Réciproquement soit A une expression contenant la lettre variable x; par $A|x$, qu'on peut lire « l'expression A considérée comme fonction de x », nous indiquons le signe de fonction u qui, écrit en avant de x, produit la formule donnée A.

Si l'expression A a la forme ux, on déduit la P·1. Mais on écrit le signe $|x$ après une expression, dans le but de la réduire à la forme ux.

Ex : $a^n / n!\ |n$ représente le signe de fonction qui pour la valeur n de la variable a la valeur $a^n / n!$. Donc $\Sigma(a^n / n!\ |n, \mathrm{N}_0) =$ (somme de la série qu'on obtient de $a^n / n!$ en donnant à n les valeurs 0,1,2... (§e P·6).

Le signe | désigne la variable dans les opérations Σ, Π, lim, D, S.

P·2. « Soit A une formule contenant la lettre variable x; $(|x)A$ désigne le signe de fonction qui écrit après x produit l'expression donnée A ».

Par le signe | on peut indiquer la substitution; car si A est une formule contenant la lettre variable x, $y|xA$ indique « la valeur que prend la fonction $|xA$, pour la valeur y de la variable », ou « ce que devient la formule A, lorsque l'on remplace x par y ». On peut remplacer un couple, un terne, ... par un autre couple ou terne. Ex.: §+ P4·1-·5 Dm, §× P1·41 Dm ...

Dans les formules $ux|x$ $|x(xu)$ $(y|x)(xu)$, la lettre x est apparente.

§11 ‘ ’

$\exists$ f ‘ ✱ 1. $a,b,c,d\varepsilon$ Cls . $u\varepsilon\, bfa\,.\supset.$

·0 $u`a = y\ni[\,\exists\, a\frown x\ni(ux = y)\,]$ Df

$\cdot 01 \quad y\varepsilon\, u`a \;.=.\; \exists\, x\ni(x\varepsilon a \,.\, ux = y)$ [=P·0]

$\cdot 02 \quad x\varepsilon a \,.\, y = ux \;.\supset.\; y\varepsilon\, u`a$

On peut lire la formule $u`a$ par « $u$ des $a$ » ou « $u$ de quelque $a$ »; on doit la considérer comme décomposée en $(u`)a$. La P·02 dit que la relation $y\varepsilon\, u`a$ résulte de l'élimination de x dans le système $x\varepsilon a \,.\, ux = y$.

Ex: §Med 3 §Lm §lim 1·5 §cont 1·2 §D 4·5 §S 3·1 ...

Dans plusieurs cas le signe ` est sous-entendu par des conventions exprimées dans la suite: §+ 8·1-·3, §— 2·1, §× 2·0, §/ 2·1...

On ne peut pas le sous-entendre dans tous les cas.

P. ex. Num ` Cls signifie « les valeurs de l'expression Num u, ou u est une classe quelconque »; il représente l'ensemble du nombre 0, des nombres finis, et des différents nombres infinis. Num Cls signifie « le nombre des classes », qui est l'infini le plus grand.

$\cdot 1 \quad x\varepsilon a \;.\supset.\; ux\, \varepsilon\, u`a$ $\qquad \cdot 11 \quad u`a \supset b$

$\cdot 2 \quad c \supset a \;.\supset.\; u`c \supset u`a$

[Hp $.\supset.\; c \frown x\ni(ux=y) \supset a \frown x\ni(ux=y)$. Oper $\exists$. Oper $y\ni$ $.\supset.$ P]

$\cdot 21 \quad c \supset a \,.\, d \supset a \;.\supset.\; u`(c \frown d) \supset u`c \frown u`d$ [P·2⊃P]

$\cdot 3 \quad \exists\,(u`a) \frown c \;.=.\; \exists\, a \frown x\ni(ux\, \varepsilon c)$ Ex. §Lm P1·1 Dm

[Df ` $.\supset:$ $\quad \exists\,(u`a) \frown c \;.=.\; \exists\, c \frown y\ni[\, \exists\, a \frown x\ni(ux=y)$

§∃ 2·4 $.\supset:$ » $\exists\, a \frown x\ni[\, \exists\, c \frown y\ni(y=ux)]$

Df ι $.\supset:$ » » $(\, \exists\, c \frown \iota ux\,)$

§ι ·7 $.\supset:$ » » $(ux\, \varepsilon c)$]

$\cdot 31 \quad u`a \supset c \;.=:\; x\varepsilon a \,.\supset_x.\, ux\, \varepsilon c$ [(-c | c)P·3 ⊃ P]

$\cdot 4 \quad v\varepsilon\, cfb \;.\supset.\; v`(u`a) = (vu)`a$

$\cup$, $\cdot 5 \quad c \supset a \,.\, d \supset a \;.\supset.\; u`(c \cup d) = u`c \cup u`d$

[Df ` $.\supset.$ $\quad u`(c \cup d) = y\ni \exists[(c \cup d) \frown x\ni(ux=y)]$

Distrib($\frown$,$\cup$) $.\supset.$ » $y\ni \exists[c\, x\ni(ux=y) \cup d\, x\ni(ux=y)]$

Distrib($\exists$,$\cup$) $.\supset.$ » $y\ni[\, [\exists\, c\, x\ni(ux=y)] \cup [\exists\, d\, x\ni(ux=y)]\,]$

Distrib($\ni$, $\cup$) $.\supset.$ » $y\ni[\, \exists\, c\, x\ni(ux=y)\,] \cup y\ni[\, \exists\, dx\ni(ux=y)\,]$

Df ` $.\supset.$ » $u`c \cup u`d$]

$\cdot 6 \quad x\varepsilon a \;.\supset.\; u`\iota x = \iota\, ux$

{ ·0·2·21·3 F1889 p.XV ; ·1·11·6 PADOA F1899 }

✱ 2.

$\cdot 0 \quad a,b\varepsilon \text{ Cls} \,.\, u\varepsilon\, a\jmath b \;.\supset.\; a`u = y\ni \exists\, a \frown x\ni(xu = y)$ Df

$\cdot 1 \quad k\varepsilon \text{ Cls} \;.\supset.\; \text{Cls}`k = y\ni \exists \text{ Cls} \frown x\ni(xk = y) \doteq \text{Cls} \frown y\ni(y \supset k)$ Df?

On peut lire $a`u$ par « des a le u ».

En conséquence Cls'k signifie « l'ensemble des valeurs de l'expression xk, où x est une classe » c'est-à-dire, par la §∃ P1·4, « Classe de k ».

Ainsi Cls'N signifie « classe de nombres ». Ex. §max §Dvr §l' ...

§12 f sim rcp idem

$a,b,c\varepsilon$ Cls $.\supset.$

·0 $u\varepsilon\,(bfa)\mathrm{sim}\ .=:\ u\varepsilon\,bfa : x,y\varepsilon a\,.\,ux=uy\,.\supset_{x,y}.\,x=y$ Df

·1 $u\varepsilon\,(bfa)\mathrm{sim}\,.\,c\supset a\,.\supset.\,u\varepsilon\,(bfc)\mathrm{sim}$

·2 » $.\,b\supset c\,.\supset.\,u\varepsilon\,(cfa)\mathrm{sim}$

·3 » $.\,x,y\varepsilon a\,.\supset:\,x=y\,.=.\,ux=uy$

·4 » $.\,v\varepsilon\,(cfb)\mathrm{sim}\,.\supset.\,vu\,\varepsilon\,(cfa)\mathrm{sim}$

Le signe sim ou Sim signifie « correspondance semblable (similis) ».
Ex.: §+ P5·2·5, §Q P33·0, §lim P10·4.

·5 $u\varepsilon\,(bfa)\mathrm{rcp}\ .=.\ u\varepsilon\,(bfa)\mathrm{sim}\,.\,b\supset u`a$ Df

·6 $u\varepsilon(bfa)\mathrm{rcp}\,.\,v\varepsilon\,(cfb)\mathrm{rcp}\,.\supset.\,vu\,\varepsilon\,(cfa)\mathrm{rcp}$

·7 $u\varepsilon\,(bfa)\mathrm{sim}\,.\supset.\,u\varepsilon\,(u`a\,\mathrm{f}\,a)\mathrm{rcp}$

{ ·0-·7 F1895 p.116, F1897 P521 }

Le signe « rcp » signifie « correspondance réciproque ».
Ex. §Num P·0 : $a,b\varepsilon$ Cls $.\supset:$ Num$a=$ Num$b\ .=.\ \exists\,(bfa)\mathrm{rcp}$
§Σ P1·2·5·7, §Π P1·2, §lim P18·2·3 ...
On suppose écrites les formules correspondantes pour le signe ɟ.

·8 $\mathrm{idem}x=x$ Df {F1899}

$\mathrm{idem}\,\varepsilon\,afa\ .\ \mathrm{idem}\,\varepsilon\,(afa)\mathrm{sim}\ .\ \mathrm{idem}\,\varepsilon\,(afa)\mathrm{rcp}\ .\ \mathrm{idem}`a=a$

« idem » représente l'identité ; telles sont les opérations Arithmétiques +0, —0, ×1, /1, ⋀1, ⋁1, ... Dans la théorie des Substitutions l'identité est indiquée simplement par 1. Seul ex. §Σ P1·71.

§13 Variab F Funct

·1 $u,v\varepsilon$ Cls $.\,f\varepsilon\,vfu\,.\,x\varepsilon u\ .\supset.\ (f;u)x=fx$ Df

·2 ——— . ——— $.\supset.$ Variab$(f;u)=u$ Df

·3 ——— $.\supset.\ v\mathrm{F}u=g\ni\{\exists\,vfu\wedge f\ni[g=(f;u)]\}$ Df

·4 Funct $=g\ni\,(u;v)\ni[u,v\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,g\varepsilon\,v\mathrm{F}u]$ Df

·5 $f,g\varepsilon$ Funct $.\supset:$

$f=g\ .=:$ Variab$f=$ Variab$g : x\varepsilon$ Variab$f\,.\supset_x.\,fx=gx$ Df

·6 $u,v\varepsilon$ Cls $.\supset.\ v\mathrm{F}u\supset vfu$ [P·1 . §f P1·01 $.\supset.$ P]

·7 $u\varepsilon$ Cls $.\,x\varepsilon u\ .\supset.\ [\imath(\iota a\mathrm{F}u)]x=a$ { ·1-·7 F1899 }

Soient u et v des Cls; et $f\varepsilon\,vfu$. Si l'on donne l'opération f, la classe dans laquelle l'opération est définie n'est pas déterminée; car si l'opération est définie dans la classe u, elle est aussi définie dans toute classe contenue dans u, par la §f P·2, et il y a toujours la possibilité de la définir dans toute classe différente. P. ex. l'opération « mod » dans §mod P·0 est définie sur les nombres relatifs ; en conséquence elle est définie sur les nombres positifs, et dans ce cas coïncide avec l'identité ; ensuite la même opération

est définie sur les les nombres complexes d'ordre quelconque, sur les substitutions, sur les vecteurs, et on est toujours en droit de l'employer dans des nouveaux cas, présentant quelque analogie, et jamais de contradiction, avec les anciens.

Dans quelques cas il faut considérer en même temps une opération f et une classe u dans laquelle cette opération est définie ; c'est à dire le couple $(f;u)$. On rencontre ce couple dans les formules $\Sigma(f,u)$, $\Pi(f,u)$, qui représentent la somme, ou le produit des valeurs de la fonction f, lorsque la variable prend toutes les valeurs dans la classe u, et dans $S(f,u)$, qui représente l'intégrale de f, étendue au domaine u de variabilité.

P·1. A l'expression $(f,u)x$, où u est une classe, f une opération sur les u, et x un u, nous donnons la signification fx.

P·2. Par variabilité de (f,u) nous entendons la classe u.

P·3. $v\mathrm{F}u$ (v fonction définie des u) indique les couples formés d'une vfu et de la classe u.

P·4. « Funct » indique toutes les expressions de la forme $v\mathrm{F}u$, où u et v sont des classes.

P·5. Deux Fonctions définies sont égales, lorsqu'elles ont la même variabilité, et dans cette variabilité produisent des résultats égaux.

P·6. Toute F est f. Nous parlerons donc des Fonctions sim, rcp, etc.

Ex : (mod, Q) = (idem, Q)

« Les fonctions mod et idem, dans la classe Q, coïncident ».

Voir une autre façon de considérer l'égalité des fonctions dans Burali, RdM t.6 p.141.

$$m,n\varepsilon\mathrm{N} \;.\supset.\; \mathrm{Num}\,(1\cdots m\ \mathrm{F}\ 1\cdots n) = m^n$$
$$\mathrm{Num}\,(1\cdots m\ \mathrm{F}\ 1\cdots n)\mathrm{sim} = \Pi[m-0\cdots(n-1)]$$
$$\mathrm{Num}\,(1\cdots n\ \mathrm{F}\ 1\cdots n)\mathrm{rcp} = n!$$

$1\cdots m\,\mathrm{F}\,1\cdots n$ = arrangements avec répétition n à n des nombres $1\cdots m$.
$(1\cdots m\,\mathrm{F}\,1\cdots n)\mathrm{sim}$ » » simples »
$(1\cdots n\,\mathrm{F}\,1\cdots n)\mathrm{rcp}$ = permutations des nombres $1\cdots n$.

Ex. §Σ 20 §Π 10 11, §! 2 §q_n 1·0 §perm ·0 §Dtrm §Subst §D 1·2.

§14 $^{-1}$ (inversion)

$a,b\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,u\varepsilon(b\mathrm{F}a)\mathrm{rcp}\;.\supset..$

·0 $u^{-1} = \imath\,[(\mathrm{Variab}\,u)\mathrm{F}(u\text{'}\ \mathrm{Variab}\,u)] \frown v\ni(vu = (\mathrm{idem},\ \mathrm{Variab}\,u)$ Df

·01 $u^{-1} = \imath\,(a\mathrm{F}b) \frown v\ni[vu = (\mathrm{idem},\ a)]$

·1 $u^{-1}u = (\mathrm{idem},\ a)$ ·2 $x\varepsilon a\;.\supset.\;u^{-1}ux = x$ ·3 $(u^{-1})^{-1} = u$

·4 $a,b,c\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,u\varepsilon\,(b\mathrm{F}a)\mathrm{rcp}\,.\,v\varepsilon\,(c\mathrm{F}b)\mathrm{rcp}\;.\supset.\;(vu)^{-1} = u^{-1}\,v^{-1}$

·5 $a\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,u,v\varepsilon\,(a\mathrm{F}a)\mathrm{rcp}\,.\,uv = vu\;.\supset.\;u^{-1}\,v = v\,u^{-1}$

·6 » » » » $u^{-1}\,v^{-1} = v^{-1}\,u^{-1}$

Il faut considérer l'exposant —1 comme un signe simple pour indiquer l'inversion. Voir F1897 p.61.

ALCUNI TEOREMI DI ARITMETICA.

Fra le proposizioni che a mio parere potrebbero convenientemente trovar posto nel *Formulaire de mathématiques*, pubblicato dalla *Revue de mathématiques*, credo siano da annoverarsi le seguenti.

La maggior parte di esse si riferisce a questioni sulla divisibilità, sul massimo comun divisore dei numeri interi, e sui numeri primi. I paragrafi in cui sono divise, ed i numeri d'ordine che le classificano indicano il posto che devono occupare in una nuova edizione del *Formulaire de mathématiques*. Altre proposizioni formano il § 68 Nprf.

Varie proposizioni sono anche trascritte in linguaggio ordinario; in queste trascrizioni adopero spesso, per brevità, la parola « *numero* » invece di « *numero intero positivo* ». Però, come si scorge facilmente confrontando la trascrizione in simboli di logica e la trascrizione in linguaggio ordinario d' una medesima proposizione, quest' ultima è sempre meno rigorosa della prima; e quest' inconveniente non si può evitare senza complicare considerevolmente l'enunciato delle proposizioni.

§ 25. $\times$

3·3 $2N_0+1 = 4N_0+1 \smile 4N_1-1$

§ 29. $\upharpoonright$

1·7 $a\varepsilon N_0 \,.\supset.\, (10N_0+a)^5 \supset 10N_0+a$

4·12 $n\varepsilon N_1 \,.\supset.\, (N_0^2+N_0^2+N_0^2)^n \supset N_0^2+N_0^2+N_0^2$

6·0 $a\varepsilon N_0 \,.\supset.\, a(a+1)(a+2)(a+3)+1 \,\varepsilon\, N_1^2$

6·01 $a\varepsilon N_1 \,.\supset.\, a(a+1) \,-\!\varepsilon\, N_1^2 \,.\, a(a+1)(a+2) \,-\!\varepsilon\, N_1^2.$
$a(a+1) \,-\!\varepsilon\, N_1^3 \,.\, a(a+1)(a+2) \,-\!\varepsilon\, N_1^3$ {cont. §*Π* P1·92}

6·02 $a,b,c \,\varepsilon\, 2N_0+1 \,.\supset.\, ab+ac+bc \,-\!\varepsilon\, N_1^2$

6·1 $10N_0+2 \smile 10N_0+3 \smile 10N_0+7 \smile 10N_0+8 \supset -N_0^2$

6·2 $a\varepsilon N_1 \,.\supset.\, (10a+5)^2 = a(a+1)\times 100+25$

6·3 $a,b,c \,\varepsilon\, N_1 \,.\, a^2 = b^2+c^2 \,.\supset.\, b \,\varepsilon\, 3N_1 \smile c \,\varepsilon\, 3N_1 \,.\, b \,\varepsilon\, 4N_1 \smile c \,\varepsilon\, 4N_1 \,.$
$a \,\varepsilon\, 5N_1 \smile b \,\varepsilon\, 5N_1 \smile c \,\varepsilon\, 5N_1 \,.\, abc \,\varepsilon\, 60N_1$

6·4 $a\varepsilon N_0 \,.\, n\varepsilon\, 2N_1 \,.\supset.\, (100a+24)^n \,\varepsilon\, 100N_1+76$

6·41 $a\varepsilon N_0 \,.\, n\varepsilon\, 2N_1+1 \,.\supset.\, (100a+24)^n \,\varepsilon\, 100N_1+24$

6·42 $a\varepsilon N_0 \,.\, n\varepsilon N_1 \,.\supset.\, (100a+76)^n \,\varepsilon\, 100N_0+76$

6·43 $a \varepsilon N_0 . n \varepsilon N_1+1 . \supset . (100a+26)^n \varepsilon 100N_1+76$

11·8 $4N_0 \supset N_0^2-N_0^2$

11·81 $n \varepsilon N_1+1 . \supset . N_0^n \supset N_0^2-N_0^2$

11·82 $N_1^2 \supset 7N_1 \cup (7N_1+1) \cup (7N_1-1)$

11·83 $N_1^3 \supset 9N_1 \cup (9N_1+1) \cup (9N_1-1)$

11·84 $a \varepsilon (2N_0+1)-(5N_0) . \supset . a^4-1 \varepsilon 80N_0$

11·85 $n \varepsilon N_0 . \supset .$

$2^{n+2}+3^{2n+1} \varepsilon 7N_1 . 2^{6n+1}+3^{2n+2} \varepsilon 11N_1 . 2^{6n+3}+3^{4n+2} \varepsilon 17N_1 .$
$2^{3n+1}+3 \times 5^{2n+1} \varepsilon 17N_1 . 2^{n+1}+2^{n+4}+5^{2n+1} \varepsilon 23N_1 . 11^{2n}-2^{6n} \varepsilon 57N_1 .$
$2^{8n+2}+7^{4n+4} \varepsilon 65N_1 . 3^{12n+6}+1 \varepsilon 730N_1 . 2^{2n}-3n-1 \varepsilon 9N_0 .$
$2^{3n+2}+21n-4 \varepsilon 49N_0 . 3^{2n}-8n-1 \varepsilon 64N_0 . 2^{4n}-15n-1 \varepsilon 225N_0 .$
$7^{2n+1}-48n-7 \varepsilon 288N_0$

11·86 $n \varepsilon N_1 . \supset . 3^{3n-3}+7^n \times 2^{3n-1} \varepsilon 29N_1 . 2^{5n} \times 3^{4n}-4^{3n} \times 5^{2n} \varepsilon 992N_1$

15·9 $a,b \varepsilon n . m \varepsilon N_1 . \supset . a^m-b^m \varepsilon n \times (a-b) . a^{2m}-b^{2m} \varepsilon n \times (a+b) .$
$a^{2m+1}+b^{2m+1} \varepsilon n \times (a+b)$

15·91 $a \varepsilon n . n \varepsilon N_1-3N_1 . \supset . a^{2n}+a^n+1 \varepsilon N_1 \times (a^2+a+1)$

15·92 $a,b \varepsilon n . \supset . ab(a+b)(a-b) \varepsilon 6n$

$a \varepsilon n . \supset .$

16·0 $a(a^2-1) \varepsilon 6n$ 16·1 $a(a^2-1)(a^2-4) \varepsilon 120n$ Cont §! P·2

16·2 $a(a^{12}-1) \varepsilon 2730n$

$a \varepsilon 2n+1 . \supset .$

16·3 $a(a^4-1) \varepsilon 240n$

16·4 $a^2(a^2-1)(a^4-1) \varepsilon 5760n$

16·5 $a^2(a^2-1)(a^6-1) \varepsilon 4032n$

16·6 $a^2(a^4-1)(a^8-1) \varepsilon 115200n$

Note.

1·7. La quinta potenza di un numero (N_0) è terminata colla medesima cifra di questo numero. Ne segue che se si scrivono per ordine le successive potenze intere positive di un numero intero (N_0), l'ultima cifra d'una di esse, si ritrova periodicamente come ultima cifra di ogni quarto numero successivo. Es. per le potenze di 2 si ha : 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192,.....

6·0. Se si aumenta di un'unità il prodotto di quattro numeri interi consecutivi (N_0), si ottiene per somma un quadrato (N_1^2).

6·1. Un numero intero (N_1) che termini per 2, o per 3, o per 7 o per 8, non può essere un quadrato.

6·2. Per fare il quadrato di un numero intero (N_1), che termini per 5, basta moltiplicare il numero delle decine pel numero successivo, e scrivere 25 alla destra del prodotto.

6·4—41. Se un numero intero (N_1) termina per 24, la sua potenza enne-

sima ($n \varepsilon N_1$) termina per 76 o per 24 secondochè n è un numero pari od un numero dispari.

6·42. Se un numero intero (N_1) termina per 76, la sua potenza ennesima ($n \varepsilon N_1$) termina per 76.

6·43. Se un numero intero (N_1) termina per 26, la sua potenza ennesima ($n \varepsilon N_1 + 1$) termina per 76.

§30. $\leqq$ $>$

7·6 $a \varepsilon R - 1 \,.\supset.\, a + /a > 2$

La somma di due numeri reciproci interi o frazionarii (R) diversi dall'unità è maggiore di 2.

§31. ···

2·0 $a,b \,\varepsilon\, 0 \cdots 9 \,.\, a \gtrless b \,.\supset.\, (10a+b)-(10b+a) = 9(a-b)$

2·1 $a,b,c \,\varepsilon\, 0 \cdots 9 \,.\, a \gtrless c \,.\supset.$
$(100a+10b+c)-(100c+10b+a) = 99(a-c)$

2·2 $a,b,c,m,n,p \,\varepsilon\, 0 \cdots 9 \,.\, a \gtrless c \,.\, (100a+10b+c)-(100c+10b+a) =$
$100m+10n+p \,.\supset.\, n = m+p = 9$

Note.

2·0 La differenza fra un numero (N_1) di due cifre, ed il medesimo numero rovesciato è eguale a 9 volte la differenza delle due cifre del numero dato.

2·1—2 La differenza fra un numero (N_1) di tre cifre, ed il medesimo numero rovesciato, è eguale a 99 volte la differenza delle due cifre estreme del numero dato; ed ha 9 per cifra delle decine, e 9 per somma delle sue due cifre estreme.

§32. Num infn

·9 $a \,\varepsilon\, N_1^2 \,.=.\, \mathrm{Num}\, N_1 \frown (a/N_1) \,\varepsilon\, 2N_0 + 1$

§33. Σ

11·4 $n \,\varepsilon\, N_1 \,.\supset.\, \Sigma\,(1 \cdots 10^n) = 5 \times 10^{n-1} \times 10^n + 5 \times 10^{n-1}$

11·5 $n \,\varepsilon\, N_1 \,.\supset.\, \Sigma(1 \cdots 10^n)^2 = \Sigma[3 \,.\, 10^r | r, 0 \cdots (n-1)] \times 10^{2n} + 8 \times 10^{2n-1}$
$+ \Sigma[3 \times 10^r | r, 0 \cdots (n-2)] \times 10^n + 5 \times 10^{n-1}$

11·6 $a \,\varepsilon\, (2N_0+1) - (5N_1) \,.\supset.\, \exists(x,m) \ni [x,m \,\varepsilon\, N_1 \,.\, ax = \Sigma(10^r | r, 0 \cdots m)]$

11·7 $a \,\varepsilon\, N_1 \,.\supset.\, \exists(m,n,x) \ni \{n \,\varepsilon\, N_0 \,.\, x,m \,\varepsilon\, N_1 \,.$
$ax = [\Sigma(9 \times 10^r | r, 0 \cdots m)] \times 10^n\}$

11·8 $\{\Sigma[9 \times 10^r | r, 0 \cdots (n-1)]\} \times \{\Sigma[7 \times 10^r | r, 0 \cdots (n-1)]\} =$
$\{\Sigma[7 \times 10^r | r, 0 \cdots (n-2)]\} \times 10^{n+1} + 6 \times 10^n + \{\Sigma[2 \times 10^r | r, 0 \cdots (n-2)]\}$
$\times 10 + 3$ {Ibn Albanna}

11·9 $\{\Sigma[9 \times 10^r | r, 0 \cdots (n-1)]\}^2 = \{\Sigma[9 \times 10^r | r, 0 \cdots (n-2)]\} \times 10^{n+1}$
$+ 8 \times 10^n + 1$ {Ibn Albanna}

11·91 $a = \Sigma[4 \times 10^r | r, 0 \cdots (2n-1)] \,.\, b = \Sigma[4 \times 10^r | r, 0 \cdots (n-1)] \,.\supset.$
$a+b+1 \,\varepsilon\, N_1^2$

11·92 $a = \Sigma[10^r|r,0\cdots(2n-1)] \,.\, b = \Sigma[4\times10^r|r,0\cdots(n-1)] \,.\supset.$
$a+b+1 \,\varepsilon\, N_1^2$

11·93 $a \,\varepsilon\, N_1 \,.\, n \,\varepsilon\, 4N_1 \,.\supset.\, \Sigma[(a+x)^n|x,0\cdots9] \,\varepsilon\, 10N_1+3$

11·94 $a,n \,\varepsilon\, N_1 \,.\, n \,\varepsilon\, 4N_1 \,.\supset.\, \Sigma[(a+x)^n|x,0\cdots9] \,\varepsilon\, 10N_1+5$

11·95 $a,n \,\varepsilon\, N_1+1 \,.\supset.\, \exists\, N_1 \cap m \ni [a^n = \Sigma\,\{2(m+x)+1|x,1\cdots a\}$

11·96 $a,m,n \,\varepsilon\, N_1 \,.\, x\varepsilon[0\cdots(10^n-1)]F(1\cdots m) \,.\, 10^n-1 \,\varepsilon\, N_1\times a \,.$
$b = \Sigma(x_r\times10^{n\,r}|r,\, 0\cdots m) \,.\, \Sigma x \,\varepsilon\, N_1\times a \,.\supset.\, b \,\varepsilon\, N_1\times a$
{ Abbé E. Gelin. — Traité d'Arithmétique Élémentaire — Huy a.1897 p.99 }.

11·97 $a,m,n,p \,\varepsilon\, N_1 \,.\, n = p\pm1 \,.\, x \,\varepsilon\, [0\cdots(10^m-1)]F(1\cdots n) \,.$
$y \,\varepsilon\, [0\cdots(10^m-1)]F(1\cdots p) \,.\, 10^m+1 \,\varepsilon\, N_1\times a \,.\, b = \Sigma(x_r\times10^{m(2r)}|$
$r,\, 0\cdots n)+\Sigma(y_r\times10^{m(2r+1)}|r,\, 0\cdots p) \,.\, \Sigma x-\Sigma y \,\varepsilon\, N_1\times a \,.\supset.$
$b \,\varepsilon\, N_1\times a$ { Gelin. l. c. P100 }

Note.

11·4 Per avere la somma dei numeri interi da 1 a 10^n ($n\varepsilon N_1$), basta scrivere 5, poi $n-1$ zeri, poi 5, poi $n-1$ zeri. Es. la somma dei numeri inter da 1 a 10^3 è 500500.

11·5. Per avere la somma dei quadrati dei primi 10^n numeri interi ($n\varepsilon N_1$), basta scrivere n volte il 3, poi 8, poi $n-1$ volte il 3, poi 5, poi $n-1$ zeri. Es. la somma dei quadrati dei primi mille numeri interi ($1000 = 10^3$), è 333 833 500.

11·6. Ogni numero dispari ($2N_0+1$) che non termini per 5 ha un multiplo formato con sole cifre 1.

11·7. Ogni numero intero (N_1) ha un multiplo formato con sole cifre 9, seguite o non da zeri.

11·8. Il prodotto di un numero intero (N_1) formato da n cifre 9 ($n\varepsilon N_1$) per un numero intero (N_1) formato da n cifre 7, si ottiene scrivendo $n-1$ cifre 7, poi 6, poi $n-1$ cifre 2, poi 3. Es. $9999\times7777 = 77762223$.

11·9. Per avere il quadrato di un numero intero (N_1) formato da n cifre 9 ($n\varepsilon N_1$), basta scrivere $n-1$ cifre 9, poi 8, poi $n-1$ zeri, poi 1. Esempio $9999^2 = 99980001$.

11·91. La somma di un numero intero (N_1) formato da $2m$ cifre 4 ($m\varepsilon N_1$)i e di un numero intero (N_1) formato da m cifre 4, aumentata di 1, è un quadrato. Es. $4444+44+1 = 4489 = 67^2$.

11·92. La somma di un numero intero (N_1) formato da $2m$ cifre 1 ($m\varepsilon N_1$) e di un numero intero formato da m cifre 4, aumentata di 1, è un quadrato. Es. $111111+444+1 = 111556 = 334^2$.

11·93—4. La somma delle potenze simili di dieci numeri interi consecutivi (N_1) termina per 3 o per 5 secondochè l'esponente della potenza è divisibile o non è divisibile per 4.

11·95. Qualsiasi potenza ad esponente intero, positivo, maggiore dell'u-

nità, di un numero intero a ($a \varepsilon N_1$), è la somma di a numeri dispari consecutivi.

11·96. Un numero intero (N_1) è divisibile pel numero intero a ($a \varepsilon N_1$) se a divide $10^n - 1$ ($n \varepsilon N_1$), e se a divide anche la somma dei gruppi di n cifre in cui si può scomporre il numero dato, partendo da destra. (L'ultimo gruppo a sinistra può anche avere meno di n cifre).

Sia p. e. $n=1$, sarà $10^n - 1 = 9 = 3^2$; ed avremo: *Un numero é divisibile per 3 o per 9 se è divisibile per 3 o per 9 la somma delle cifre del numero dato.*

Sia p. e. $n=2$, sarà $10^n - 1 = 99 = 3^2 \times 11$; ed avremo: *Un numero è divisibile per 11 o per 33 o per 99 se è divisibile per 11, per 33 o per 99 la somma dei gruppi di due cifre in cui si può scomporre il numero dato, partendo da destra.* E così di seguito.

11·97. Un numero intero (N_1) è divisibile pel numero intero a ($a \varepsilon N_1$), se a divide $10^m + 1$ ($m \varepsilon N_1$), e se scomponendo il numero dato in gruppi di m cifre, a partire da destra, la differenza fra la somma dei gruppi di posto dispari, e la somma dei gruppi di posto pari, è divisibile per a. (L'ultimo gruppo a sinistra può aver meno di m cifre).

Sia p. e. $m=1$, sarà $10^m + 1 = 11$; ed avremo: *Un numero è divisibile per 11 se, scomponendo il numero in gruppi di due cifre a partire da destra, la differenza fra la somma dei gruppi di posto dispari, e la somma dei gruppi di posto pari è divisibile per 11.*

Sia p. e. $m=3$, sarà $10^m + 1 = 1001$. I divisori di 1001 sono 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001; e quindi avremo: *Un numero è divisibile per 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001, se, scomponendo il numero in gruppi di tre cifre a partire da destra, la differenza fra la somma dei gruppi di posto dispari, e la somma dei gruppi di posto pari, è divisibile per 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001.* E così di seguito.

§34 Π

1·9 $n \varepsilon N_1 + 1 \;.\supset.\; \Pi[(2+4x)|x, 0 \cdots (n-1)] = \Pi[(n+1) \cdots 2n]$

1·91 $n \varepsilon N_1 + 1 \;.\supset.\; \Pi[(n+1) \cdots 2n] = \{\Pi[(2x-1)|x, 1 \cdots n]\} \times 2^n$

{ Klügel a.1803 t.1 p.313. }

1·92 $m \varepsilon N_1 . n \varepsilon N_1 + 1 \;.\supset.\; \Pi[m + (1 \cdots n)] = \varepsilon N_1 \upharpoonright (N_1 + 1)$

Note.

1·9. Il prodotto dei primi n termini ($n \varepsilon N_1$) della progressione aritmetica $\div 2.6.10.14....$ è eguale al prodotto dei primi n numeri interi consecutivi che seguono n. Es. $2 \times 6 \times 10 \times 14 \times 18 = 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$.

1·91. Il prodotto dei primi n numeri interi consecutivi che seguono n ($n \varepsilon N_1$) è eguale a 2^n moltiplicato pel prodotto dei primi n numeri dispari. Es. $6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 2^5 \times 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9$.

1·92. Il prodotto di quanti si voglia numeri interi consecutivi non può mai essere eguale ad una potenza ad esponente intero, positivo, maggiore di 1.

§42. max min

15·3 $a \varepsilon N_1 . m \varepsilon N_1+1 . \mathrm{Num}\, N_1 \frown (a/N_1) = m . r \varepsilon 1 \cdots m . \supset .$
$\min_r (N_1 \frown a/N_1) \times \min_{m-r} (N_1 \frown a/N_1) = a$

Nota.

15·3 Se si dispongono per ordine di grandezza tutti i divisori di un numero (N_1), il prodotto di due divisori equidistanti dagli estremi è eguale a numero dato.

§43 quot rest

3·0 $a,b,c \varepsilon N_1 . \supset . \mathrm{rest}(a+b, c) = \mathrm{rest}[\mathrm{rest}(a,c) + \mathrm{rest}(b,c), c]$

3·1 $a \varepsilon N_1 . m \varepsilon N_1+1 . x \varepsilon N_1 F 1 \cdots m . \supset . \mathrm{rest}(\Sigma x, a) =$
$\mathrm{rest}[\Sigma(\mathrm{rest}\{x,a\}, a)]$

3·2 $a,b,c \varepsilon N_1 . \supset . \mathrm{rest}(ab, c) = \mathrm{rest}[\mathrm{rest}(a,c) \times \mathrm{rest}(b,c), c]$

3·21 $a \varepsilon N_1 . m \varepsilon N_1+1 . x \varepsilon N_1 F 1 \cdots m . \supset . \mathrm{rest}(\Pi x, a) =$
$\mathrm{rest}[\Pi(\mathrm{rest}\{x,a\}, a)]$

3·3 $a,b,c,d \varepsilon N_1 . \mathrm{rest}(a,c) = \mathrm{rest}(b, c) . \supset . \mathrm{rest}(a+d, c) = \mathrm{rest}(b+d, c)$

3·4 » » » » $\mathrm{rest}(ad, c) = \mathrm{rest}(bd, c)$

3·5 $a,b,c,d \varepsilon N_1 . a > d . b > d . \mathrm{rest}(a,c) = \mathrm{rest}(b,c) . \supset .$
$\mathrm{rest}(a-d, c) = \mathrm{rest}(b-d, c)$

3·6 $a,b,c \varepsilon N_1 . \supset . \mathrm{rest}(a, bc) = \mathrm{rest}(a,b) + \mathrm{rest}[\mathrm{quot}(a,b), c] \times b$

3·7 $a,b,c,d \varepsilon N_1 . \supset . \mathrm{rest}(a, bcd) = \mathrm{rest}(a,b) + \mathrm{rest}[\mathrm{quot}(a,b), c] \times b +$
$\mathrm{rest}\{\mathrm{quot}[\mathrm{quot}(a,b), c], d\} \times bc$

3·8 $a,b \varepsilon N_1 . a > b . \supset . \mathrm{rest}(a, a-b) = \mathrm{rest}(b, a-b)$

3·81 $a,b,c,m \varepsilon N_1 . \supset : \mathrm{rest}(a,c) = \mathrm{rest}(b,c) . = . \mathrm{rest}(a+m, c) =$
$\mathrm{rest}(b+m, c)$

3.82 » » » $. \supset . \mathrm{rest}(am, c) =$
$\mathrm{rest}(bm, c)$

3·83 $a,b,m \varepsilon N_1 . a > b . \supset . \mathrm{rest}(a^m, a-b) = \mathrm{rest}(b^m, a-b)$

3·84 $a \varepsilon N_1 . \supset . \mathrm{rest}(a,6) = \mathrm{rest}(a^3,6) . \mathrm{rest}(a^2,4) = \iota 0 \smile \iota 1$

3·85 $a,b,m \varepsilon N_1 . \supset : \mathrm{quot}(a,b) = \mathrm{quot}(a, b+m) . = . \mathrm{rest}(a,b) \leqq$
$[\mathrm{quot}(a,b)] \times m$

3·86 $a,b,m \varepsilon N_1 . b > m . \supset : \mathrm{quot}(a,b) = \mathrm{quot}(a, b-m) . =.$
$b - \mathrm{rest}(a,b) > [\mathrm{quot}(a,b)+1] \times m$

3·87 $a,b,m \varepsilon N_1 . \supset : \mathrm{quot}(a,b) = \mathrm{quot}(a+m, b+m) . = . \mathrm{rest}(a,b) \leqq$
$[\mathrm{quot}(a,b)-1] \times m$

3·90 $a,b \varepsilon N_1 . \supset . \max N_1 \frown x \ni \{\mathrm{quot}(a+x,b) = \mathrm{quot}(a,b)\} =$
$b - \mathrm{rest}(a,b) - 1$

3·91 $a,b \varepsilon N_1 . a > b . \supset . \mathrm{quot}(a, a-b) - \mathrm{quot}(b, a-b) = 1$

3·92 $a,b,c \varepsilon N_1 . a > b . \mathrm{rest}(a,c) = \mathrm{rest}(b,c) . \supset . a-b \varepsilon N_1 \times c$

3·93 $a,b,c \varepsilon N_1 . \mathrm{rest}(a,c) + \mathrm{rest}(b,c) \varepsilon N_1 \times c . \supset . a+b \varepsilon N_1 \times c$

3·94 $a \varepsilon N_1 . n \varepsilon N_1 + 1 . u \varepsilon N_1 F 1 \cdots n . \supset : \Sigma u \varepsilon N_1 \times a . = .$
$\Sigma \mathrm{rest}(u,a) \varepsilon N_1 \times a$

3·95 $a,b,n \varepsilon N_1 . x \varepsilon [0 \cdots (10^n - 1)] . 10^n \varepsilon N_0 \times b . \supset . \mathrm{rest}(x,b) =$
$\mathrm{rest}(a \times 10^n + x, b)$

3·96 $a,m,n \varepsilon N_1 . x \varepsilon [0 \cdots (10^n - 1)] F (1 \cdots m) . 10^n - 1 \varepsilon N_1 \times a . \supset .$
$\mathrm{rest}(\Sigma x, a) = \mathrm{rest}[\Sigma (x_r \times 10^{n r} | r, 0 \cdots m), a]$

3·97 $a,m,n,p \varepsilon N_1 . n = p \pm 1 . x \varepsilon [0 \cdots (10^m - 1)] F (1 \cdots n) .$
$y \varepsilon [0 \cdots (10^m - 1)] F (1 \cdots p) . 10^m + 1 \varepsilon N_1 \times a . \supset . \mathrm{rest}(\Sigma x - \Sigma y, a) =$
$\mathrm{rest}[\Sigma (x_r \times 10^{m(2r)} | r, 0 \cdots n) + \Sigma (y_r \times 10^{m(2r+1)} | r, 0 \cdots p), a]$

Note.

3·1. Il resto che si ottiene dividendo una somma di più numeri (N_1) per un numero a ($a \varepsilon N_1$) è il medesimo che si ottiene quando si divide per a la somma dei resti ottenuti dividendo ciascun numero dato per a.

3·21. Il resto che si ottiene dividendo un prodotto di più numeri (N_1) per un numero a ($a \varepsilon N_1$) è il medesimo che si ottieue quando si divide per a il prodotto dei resti ottenuti dividendo ciascun numero dato per a.

3·85. Affinchè il quoto di due numeri (N_1) non cambi quando si aumenta il divisore di m unità ($m \varepsilon N_1$) è necessario e sufficiente che il resto della divisione dei due numeri dati sia maggiore od uguale ad m volte il loro quoto.

3.86. Affinchè il quoto di due numeri (N_1) non cambi togliendo m unità ($m \varepsilon N_1$) al divisore, è necessario e sufficiente che la differenza fra il divisore ed il resto sia maggiore di m volte il quoto aumentato di 1.

3·87. Affinchè il quoto di due numeri (N_1) non cambi aggiungendo m unità ($m \varepsilon N_1$) al dividendo ed al divisore, è necessario e sufficiente che il resto sia minore od eguale ad m volte il quoto diminuito di 1.

3·90. Il più grande numero (N_1) che si può aggiungere al dividendo senza alterare il quoto è eguale al divisore meno il resto, meno 1.

3·94. Affinchè la somma di più numeri (N_1) sia divisibile pel numero a ($a \varepsilon N_1$), è necessario e sufficiente che sia divisibile per a la somma dei resti che si ottengono dividendo per a ciascuno dei numeri dati.

3·95. Se il numero b ($b \varepsilon N_1$) divide 10^n ($n \varepsilon N_1$), il resto che si ottiene dividendo un numero (N_1) per b è il medesimo che si ottiene dividendo per b il numero formato dalle ultime n cifre a destra del numero dato.

Es. se $n=1$, i divisori di 10^n sono 2, 5, 10, e si ha: *Il resto che si ottiene dividendo un numero per 2 o per 5 o per 10 è il medesimo che si ottiene dividendo per 2 o per 5 o per 10 l'ultima cifra a destra del numero dato.*

3·96. Se il numero a ($a \varepsilon N_1$) divide $10^n - 1$, ($n \varepsilon N_1$) il resto che si ottiene dividendo un numero (N_1) per a è il medesimo che si ottiene dividendo

per a la somma dei gruppi di n cifre in cui si può scomporre il numero dato, partendo da destra. (L'ultimo gruppo a sinistra può avere meno di n cifre).

Es. se $n=1$, $10^n-1=9$, e si ha: *Il resto che si ottiene dividendo un numero per 3 o per 9 è il medesimo che si ottiene dividendo per 3 o per 9 la somma delle cifre del numero dato.*

3·97. Se il numero a ($a\varepsilon N_1$) divide 10^n+1, ($n\varepsilon N_1$) il resto che si ottiene dividendo un numero (N_1) per a è il medesimo che si ottiene scomponendo il numero in gruppi di n cifre a partire da destra, e dividendo per a la differenza fra la somma dei gruppi di posto dispari, e la somma dei gruppi di posto pari. (L'ultimo gruppo a sinistra può avere meno di n cifre).

Es. se $n=1$, $10^n+1=11$, e si ha: *Il resto che si ottiene dividendo un numero per 11 è il medesimo che si ottiene dividendo per 11 la differenza fra la somma delle cifre di posto dispari, e la somma delle cifre di posto pari del numero dato.*

§44 Dvr

$N_1 \times$ Dvr

$a,b,m,n\ \varepsilon N_1 . \supset :$

1·44 $D(a,b)=1 . D(b,m)=1 . D(a,n)=1 . \supset . D(ab, am+bn)=1$

1·45 $D(a,b)=1 . \supset . D(a+b, ab)=1$

1·46 $a>b . D(a,b)=1 . \supset . D(a-b, ab)=1$

1·47 $D(a,b) = D(a+bm, a+bm+b)$

1·48 $D(a,b) = D(a+bm, a+bm-b)$

1·91 $D(a,b)=D[b, b-\mathrm{rest}(a,b)]$

1·92 $a>b . D(a,10)=D(b,10)=1 . \supset . a^2+b^2\ \varepsilon 10N_1 . \cup . a^2-b^2\ \varepsilon\ 10N_1$

1·93 $D(a,b)=1 . D(a+b, 3)=1 . \supset . D(a+b, a^2-ab+b^2)=1$

1·94 $a>b . D(a,b)=1 . \supset . D(a+b, a-b)=\iota 1 \cup \iota 2$

3·0 $D[a/D(a,b) , b/D(a,b)]=1$

Se due numeri (N_1) si dividono pel loro massimo comun divisore, i quoti sono primi fra loro.

3·1 $a,b,c\ \varepsilon\ 2N_1+1 . \supset . D(a,b,c)=D[(a+b)/2, (a+c)/2, (b+c)/2]$

3·2 $a,b\ \varepsilon\ N_1 . \supset . D(a,b)=\mathrm{Num}\ N_1 \cap x\ni[x\varepsilon 1\cdots b . ax\ \varepsilon N_1 \times b]$

Il massimo comun divisore di due numeri a,b ($a,b\varepsilon N_1$) è eguale al numero dei multipli di b contenuti nella serie a, $2a$, $3a$, ... ba.

3·3 $n\ \varepsilon N_1+1 . u\ \varepsilon N_1 F 1\cdots n . a\ \varepsilon N_1 \times u . r,s\ \varepsilon 1\cdots n . r=\!=s . \supset_{r,s}$
$D(u_r, u_s) = 1 : \supset . a\varepsilon N_1 \times \Pi u$

Se un numero (N_1) è divisibile per più altri primi fra loro a due a due, è divisibile pel loro prodotto.

§45 mlt

3·1 $n\varepsilon N_1+1 . \supset . m(1\cdots 2n) = m[(n+1)\cdots 2n]$

§50 Np

5·81 $n \varepsilon N_1 . \supset . 4^{2n+1}+1 - \varepsilon Np$

5·82 $n \varepsilon N_1+1 . \supset . n^4+4 - \varepsilon Np$

5·83 $a \varepsilon Np . a > 3 . \supset . a^2 \varepsilon 24N_1+1$

5·84 $a \varepsilon Np . a > 3 . \supset . a^3 \varepsilon 18N_1+1 \cup 18N_1-1$

5·85 $p \varepsilon Np - \iota 2 . q \varepsilon 1 \cdots (p-1) . \supset . \Sigma[r \upharpoonleft q | r, 1 \cdots (p-1)] \varepsilon N_1 \times p$

{MATROT, Revue semestrielle a.1900, t.8$_1$ p.40}

5·86 $m \varepsilon N_0 . n \varepsilon N_1 . p \varepsilon Np - \iota 2 . q \varepsilon 1 \cdots (p-1) . \supset .$
$\Sigma\{r \upharpoonleft [m(p-1)+q] | r, 1 \cdots (np-1)\} \varepsilon N_1 \times p$

{PAPPIT, Revue semestrielle a.1900, t.8$_1$ p.40}

5·92 $a \varepsilon Np . \supset . \Pi[1 \cdots (a-1)] - \varepsilon N_1 \times a$

5·93 $a \varepsilon (N_1+4) - Np . \supset . \Pi[1 \cdots (a-2)] \varepsilon N_1 \times a$

5·94 $a \varepsilon Np . b \varepsilon 2N_1 . a > b . \supset . \Pi[(a-b) \cdots (a-1)]/b! \varepsilon N_0 \times a+1$

5·941 $a \varepsilon Np . b \varepsilon 2N_1+1 . a > b . \supset . \Pi[(a-b) \cdots (a-1)]/b! \varepsilon N_1 \times a-1$

5·95 $a \varepsilon Np . b \varepsilon 2N_1 . a > b . \supset . \Pi[(a-b) \cdots (a-2)]/(b-1)! \varepsilon N_1 \times a-b$

5·951 $a \varepsilon Np . b \varepsilon 2N_1+1 . a > b . \supset .$
$\Pi[(a-b) \cdots (a-2)]/(b-1)! \varepsilon N_0 \times a+b$

5·96 $n \varepsilon N_1+1 . a \varepsilon Np . x \varepsilon N_1 F 1 \cdots n . \Pi x \varepsilon N_1 \times a . \supset .$
$\exists 1 \cdots n \cap r \ni (x_r \varepsilon N_1 \times a)$

Se un numero primo divide un prodotto, esso dividerà uno almeno dei fattori.

5·97 $n \varepsilon N_1+1 . a \varepsilon Np . x \varepsilon Np F 1 \cdots n . \Pi x \varepsilon N_1 \times a . \supset .$
$\exists 1 \cdots n \cap r \ni (x_r = a)$

Se un numero primo divide un prodotto di numeri primi, esso è eguale ad uno di essi.

10·6 $p \varepsilon Np . a \varepsilon N_1 - (N_1 \times p) . r,s \varepsilon 1 \cdots (p-1) . r = s . \supset .$
$\text{rest}(ra,p) = \text{rest}(sa,p)$

Se un numero a ($a \varepsilon N_1$) non è divisibile pel numero primo p, i multipli successivi di a, fino a quello ottenuto col moltiplicatore $p-1$, divisi per p, dànno resti disuguali.

10·7 $a,b \varepsilon N_1 . a+b \varepsilon Np . \supset . D(a,b) = 1$

10·71 $a,b \varepsilon N_1 . a > b . a-b \varepsilon Np . \supset . D(a,b) = 1 \cup a,b \varepsilon N_1 \times (a-b,$

10·72 $a,b \varepsilon Np . m,n \varepsilon N_1 . \supset . D(a^m+b^n,a) = D(a^m+b^n,b) = 1$

10·73 $a,b \varepsilon Np . m,n \varepsilon N_1 a^m > b^n . \supset . D(a^m-b^n,a) = D(a^m-b^n,b) = 1$

§ 67. β

$a,b,m,n \varepsilon N_1 . \supset :$

3·0 $X^n, X^n \beta X^{-n} a \varepsilon N_0 \times b . \supset . a \varepsilon N_1 \times b$

3·1 $m \times X^n - 1, EX^{-n} a + (X^n \beta X^{-n} a) \times m \varepsilon N_0 \times b . \supset . a \varepsilon N_1 \times b$

3·2 $m \times X^n + 1, EX^{-n} a -$ » » » » $. \supset .$ » »

3·0 Un numero intero (N_1) è divisibile pel numero intero b ($b \varepsilon N_1$) se b divide 10^n ($n \varepsilon N_1$) e divide anche il numero formato dalle ultime n cifre a destra del numero dato. Sia $n = 1$; i divisori di 10 sono 2, 5, 10, e si ha il noto carattere di divisibilità per 2, 5, 10, cioè: *Un numero è divisibile per 2, 5, 10, se la cifra delle unità è divisibile per 2, 5, 10.* (Se la cifra delle unità é *zero*, il numero è divisibile per 2, 5, 10, perchè $n \varepsilon N_1 . \supset . 0 \varepsilon N_0 \times n$).

Sia $n = 2$; i divisori di 100 sono 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100; e si ha: *Un numero è divisibile per 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 se il numero formato dalle ultime due cifre a destra è divisibile per 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.* (Se le ultime due cifre a destra sono due zeri, il numero è divisibile per ciascuno dei numeri sopra considerati). E così di seguito.

Questa proposizione si sarebbe anche potuta scrivere assai semplicemente così:

$$a,b,n \varepsilon N_1 . 10^n, \mathrm{rest}(a,10^n) \varepsilon N_0 \times b . \supset . a \varepsilon N_1 \times b$$

3·1 Un numero intero (N_1) è divisibile pel numero intero b ($b \varepsilon N_1$), se b divide $m \times 10^n - 1$ ($m,n \varepsilon N_1$), e se separando n cifre alla destra del numero dato, la somma del numero di sinistra e di m volte il numero di destra è divisibile per b.

Sia p. e. $m=9, n=2$, sarà $m \times 10^n - 1 = 899 = 29 \times 31$; e quindi avremo le due proposizioni:

$$a \varepsilon N_0 . b \varepsilon (0 \cdots 99) . a + 9b \varepsilon 29N_1 . \supset . 100a + b \varepsilon 29N_1$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad . a + 9b \varepsilon 31N_1 . \supset . 100a + b \varepsilon 31N_1$$

Ossia: *Un numero* (N_1) *è divisibile per 29 o per 31 se la somma del numero delle centinaia, è di nove volte il numero formato dalle sue due ultime cifre a destra è divisibile per 29 o per 31.*

Sia p. e. $m=4, n=3$, sarà $m \times 10^n - 1 = 3999 = 3 \times 31 \times 43$; e quindi avremo le due proposizioni:

$$a \varepsilon N_0 . b \varepsilon (0 \cdots 999) . a + 4b \varepsilon 31N_1 . \supset . 1000a + b \varepsilon 31N_1$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad . a + 4b \varepsilon 43N_1 . \supset . 1000a + b \varepsilon 43N_1$$

Ossia: *Un numero* (N_1) *è divisibile per 31 o per 43 se la somma del numero delle migliaia e di quattro volte il numero formato dalle sue tre ultime cifre a destra è divisibile per 31 o per 43.* E così di seguito.

Questa proposizione si potrebbe anche scrivere assai semplicemente così:

$$a,b,m,n \varepsilon N_1 . m \times 10^n - 1, \mathrm{quot}(a,10^n) + [\mathrm{rest}(a,10^n)] \times m \varepsilon N_0 \times b.$$
$$. \supset . a \varepsilon N_1 \times b$$

3·2 Un numero intero (N_1) è divisibile pel numero intero b ($b \varepsilon N_1$) se b divide $m \times 10^n + 1$ ($m,n, \varepsilon N_1$), e se separando n cifre alla destra del numero dato, la differenza fra il numero di sinistra, ed m volte il numero di destra è divisibile per b.

Sia p. e. $m=9$, $n=2$, sarà $m \times 10^n + 1 = 901 = 17 \times 53$; e quindi avremo le due proposizioni:

$$a \varepsilon N_0 \,.\, b \varepsilon (0 \cdots 99) \,.\, a - 9b \,\varepsilon\, 17N_1 \,.\supset.\, 100a + b \,\varepsilon\, 17N_1$$
$$\quad » \quad » \quad .\, a - 9b \,\varepsilon\, 53N_1 \,.\supset.\, 100a + b \,\varepsilon\, 53N_1$$

Ossia: *Un numero* (N_1) *è divisibile per 17 o per 53 se la differenza fra il numero delle centinaia e nove volte il numero formato dalle sue ultime due cifre a destra é divisibile per 17 o per 53.*

Sia p. e. $m=2$, $n=3$, sarà $m \times 10^n + 1 = 2001 = 3 \times 23 \times 29$; e quindi avremo le due proposizioni:

$$a \varepsilon N_0 \,.\, b \varepsilon (0 \cdots 999) \,.\, a - 2b \,\varepsilon\, 23N_1 \,.\supset.\, 1000a + b \,\varepsilon\, 23N_1$$
$$\quad » \quad » \quad .\, a - 2b \,\varepsilon\, 29N_1 \,.\supset.\, 1000a + b \,\varepsilon\, 29N_1$$

Ossia: *Un numero* (N_1) *è divisibile per 23 o per 29 se la differenza fra il numero delle migliaia ed il doppio del numero formato dalle sue ultime tre cifre a destra è divisibile per 23 o per 29.* E così di seguito.

Questa proposizione si potrebbe anche scrivere assai semplicemente così:

$$a,b,m,n \varepsilon N_1 \,.\, m \times 10^n + 1 \,.\, \mathrm{quot}(a,10^n) - [\mathrm{rest}(a,10^n)] \times m \,\varepsilon\, N_0 \times b \,.$$
$$.\supset.\, a \,\varepsilon\, N_1 \times b$$

§68 Nprf

N_0 N_1 $+$ $-$ $\times$ $/$ $\upharpoonright$ $>$ $\cdots$ Σ min Np Nprf

·0 $\mathrm{Nprf} = N_1 \cap x \ni \{x = \Sigma\, N_1 \cap [x/(N_1+1)]\}$ =Numero perfetto Df

·1 $\mathrm{Min\ Nprf} = 6$

·2 $m \varepsilon N_1 \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{Np}^m \cap \mathrm{Nprf}$

·3 $m \varepsilon N_1 + 1 \,.\, 2^m - 1 \varepsilon \mathrm{Np} \,.\supset.\, 2^{m-1}(2^m - 1) \,\varepsilon\, \mathrm{Nprf}$

{ EUCLIDES IX, P36 }

·4 $m \,\varepsilon\, \iota 2 \cup \iota 3 \cup \iota 5 \cup \iota 7 \cup \iota 13 \cup \iota 17 \cup \iota 19 \cup \iota 31 \cup \iota 61 \,.\supset.$
$2^{m-1}(2^m - 1) \,\varepsilon\, \mathrm{Nprf}$

·5 $a \varepsilon \mathrm{Nprf} \cap 2N_1 \,.\supset.\, \exists\, N_1 \cap m \ni [a = 2^{m-1}(2^m - 1)]$ { EULER }

·51 $\mathrm{Nprf} \cap 2N_1 \,.\supset.\, 10N_0 + 6 \cup 100N_0 + 28$

·52 $\mathrm{Nprf} \cap 2N_1 = \iota 6 \,.\supset.\, 9N_1 + 1$

·53 $\mathrm{Nprf} \cap 2N_1 = \iota 28 \,.\supset.\, (7N_1 + 1) \cup (7N_1 - 1)$

·54 $\mathrm{Nprf} \cap (10N_1 + 6) \,.\supset.\, 45N_1 + 1$

·55 $\mathrm{Nprf} \cap (10N_1 + 8) \,.\supset.\, 30N_1 - 2$

·56 $a \varepsilon \mathrm{Nprf} \cap (10N_1 + 8) \,.\supset.\, \mathrm{EX}^{-2} a \,\varepsilon\, 9N_0$

·57 $\mathrm{Nprf} \cap (496 + 2N_1) \,.\supset.\, (100N_1 + 16) \cup (100N_1 + 28) \cup$
$(100N_1 + 36) \cup (100N_1 + 56) \cup (100N_1 + 76)$

·6 $a \varepsilon \mathrm{Nprf} \,.\supset.\, \Sigma/[N_1 \cap (a/N_1)] = 2$

Note.

·0 Questa proposizione dà la definizione di *numero perfetto;* cioè « *dicesi perfetto* (τέλειος) *un numero quando eguaglia la somma dei suoi divisori, l'unità compresa, ed esso eccettuato* ».

·2 Un numero perfetto non è mai eguale ad una potenza d'un numero primo.

·3 Tutti i numeri contenuti nella formola $2^{m-1}(2^m-1)$, in cui m è un numero intero maggiore dell'unità, e 2^m-1 è un numero primo, sono numeri perfetti.

·4 Tutti i numeri perfetti che si conoscono sono contenuti nella formola $2^{m-1}(2^m-1)$, e corrispondono ai valori 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61 di m. Essi sono: 6, 28, 496, 8 128, 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328, 2 305 843 008 139 952 128, 2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176.

I sigg. I. Fitz Patrik e G. Chevrel nei loro *Exercices d'Arithmétique* — Paris, Hermann 1893, pag. 363 — dicono che è perfetto anche il numero 144 115 187 807 420 416, il quale corrisponde al valore $n=29$, e ciò contrariamente a quanto afferma Dupuis nelle sue tavole logaritmiche.

Per trovare altri numeri perfetti contenuti in questa formola, basta cercare altri valori di m pei quali 2^m-1 sia un numero primo. Questa ricerca viene grandemente semplificata dalla prop. $m \varepsilon N_1 . 2^m-1 \varepsilon Np . \supset . m \varepsilon Np$ che è la P5·7 del § 50Np di F_2N3; basta infatti limitarsi a dare ad m i valori dei numeri primi. Sono già stati sperimentati i valori dei numeri primi non superiori a 61. Ma, anche così semplificata, questa ricerca è straordinariamente laboriosa.

Mersenne nell'opera *Cogitata physico-mathematica* asserisce che sono perfetti i numeri corrispondenti ai valori 67, 127, 257 di m; ciò però non è ben certo.

La formola che dà i numeri perfetti che conosciamo, si suole anche scrivere così: $2^n(2^{n+1}-1)$. Noi preferiamo l'altra, perchè più facile a ritenersi a memoria. Evidentemente si passa da una all'altra ponendo $n=m-1$. I numeri perfetti dati da questa formola sono tutti pari; e la P·5 dice che i numeri perfetti pari sono tutti contenuti in questa formola.

Non si conosce alcun numero perfetto dispari.

·51 Ogni numero perfetto pari termina per 6 o per 28.

·52 Ogni numero perfetto pari, tranne il 6, è un multiplo di 9 più 1.

·53 Ogni numero perfetto pari, tranne il 28, è un multiplo di 7 più o meno 1.

·54 Ogni numero perfetto, maggiore di 6, che termini per 6, è un multiplo di 45 più 1.

·55 Ogni numero perfetto, maggiore dl 8, che termini per 8, è un multiplo di 30 meno 2.

·56 Se un numero perfetto termina per 8, il numero delle sue centinaia è divisibile per 9.

·57 Ogni numero perfetto pari, maggiore di 496. termina per 16, o per 28, o per 36, o per 56, o per 76.

·6 La somma degli inversi dei divisori d'un numero perfetto, è eguale 2.

§ 75. Chf

1·0 $\mathrm{Chf}\, N_1^2 = \iota 0 \cup \iota 1 \cup \iota 4 \cup \iota 5 \cup \iota 6 \cup \iota 9$

1·1 $\mathrm{Chf}\, N_1^4 = \iota 0 \cup \iota 1 \cup \iota 5 \cup \iota 6$

1·2 $\mathrm{Chf}\, N_1^5 = 0 \cdots 9$

1·3 $\mathrm{Chf}\, N_1 \upharpoonright (2N_1+1) = 0 \cdots 9$

1·4 $n \varepsilon N_1 \,.\supset.\, \mathrm{Chf}\, N_1^{n+4} = \mathrm{Chf}\, N_1^n$

$m \varepsilon N_1 \,.\supset:$

2·0 $\mathrm{Chf}\, m^2 = 6 \,.\supset.\, \mathrm{Chf}\, X^{-1} m^2 \varepsilon\, 2N_0+1$

2·1 » $= 6 \,.\supset.$ » » $\varepsilon\, 2N_0$

2·2 $\mathrm{Chf}\, X^{-1} 7^m \varepsilon\, (\iota 0 \cup \iota 4)$ {GELIN l. c. P2677}

2·3 $m \varepsilon\, 4N_1 \,.=.\, \mathrm{Chf}\, m \,\varepsilon\, 4N_0 \,.\, \mathrm{Chf}\, X^{-1} m \,\varepsilon\, 2N_0 \,.\cup.$

$\mathrm{Chf}\, m \,\varepsilon\, 2(2N_0+1) \,.\, \mathrm{Chf}\, X^{-1} m \,\varepsilon\, 2N_0+1$

{GELIN l. c. P2490}

2·4 $m \varepsilon\, 8N_1 \,.=.\, \mathrm{Chf}\, X^{-2} m \,\varepsilon\, 2N_0 \,.\, X^2 \beta X^{-2} m \,\varepsilon\, 8N_0 \,.\cup.$

$\mathrm{Chf}\, X^{-2} m \varepsilon\, 2N_0+1 \,.\, X^2 \beta X^{-2} m \,\varepsilon\, (4N_0) - (8N_0)$

{GELIN l. c. P2491}

Note.

2·0-1 La cifra delle decine di un quadrato (N_1^2) è dispari se il quadrato termina per 6; è pari se il quadrato non termina per 6.

2·2 La cifra delle decine d'una potenza intera positiva di 7 è o 0 o 4.

2·3 Un numero intero (N_1) è divisibile per 4 quando la cifra delle unità è zero, o divisibile per 4, e la cifra delle decine è pari; oppure quando la cifra delle unità è divisibile per 2 e non per 4, e la cifra delle decine è dispari.

2·4 Un numero intero (N_1) è divisibile per 8 quando la cifra delle centinaia è pari, ed il numero formato dalle ultime due cifre a destra è o zero, o divisibile per 8; oppure quando la cifra delle centinaia è dispari, ed il numero formato dalle ultime due cifre a destra è divisibile per 4 senza essere divisibile per 8.

***

Le proposizioni precedenti sono tolte in gran parte dal « *Recueil de Problèmes d'Arithmétique par l'Abbé E. Gelin prof. au Collège Saint-Quirin a Huy (Belge) — 1896 — Collège Saint-Quirin Editeur* » Questo *Recueil* contiene 3113 problemi [1] classificati come l'indica la *Table des Matières* che trascrivo integralmeute:

[1] Questi problemi sono in correlazione col « *Traité d'Arithmétique Élémentaire, del medesimo autore — Huy — Collège Saint Quirin, 1897* » opera nella quale ciascun Insegnante delle nostre scuole secondarie troverà molte cose utili all'insegnamento.

Nombres entiers. — Propriétés des nombres entiers. — Fractions ordinaires. — Nombres décimaux. — Mesures de longueur. — Mesures de surface. — Mesures agraires. — Mesures de volume. — Mesures pour le bois de chauffage. — Mesures de capacité. — Poids. — Poids spécifiques. — Monnaies. — Nombres complexes. — Puissances et racines. — Rapports et proportions. — Règle de trois. — Règle conjointe. — Partages proportionels. — Mélanges et alliages. — Du titre des matières d'or et d'argent. — Questions pour cents. — Intérêt simple. — Caisse d'épargne. — Escompte. — Rentes sur l'État. — Actions et obligations. — Change et arbitrages. — Problèmes du second degré. — Progressions. — Logarithmes. — Intérêt composé. — Annuités. — Questions d'arithmologie. — Polygones. — Cercle. — Polyèdres. — Cylindre. — Cône. — Sphère. — Formules arithmétiques. — Formules pour la mesure des surfaces et des volumes. — Table de nombres usuels.

Alcuni di questi problemi sono semplici esercizi di operazioni da eseguirsi; però l'Autore ha saputo dar loro un carattere di novità, e presentarli in modo da destare la curiosità e l'interesse dell'alunno.

Altri sono problemi numerici, varii, curiosi, interessanti, e quasi tutti riferentisi a questioni di vita pratica e di pratica utilità. Ciascuno di essi è seguito dalla risposta; e sono contradistinti con un asterisco quelli che si possono facilmente risolvere sia per mezzo dell'Algebra, sia col solo sussidio dell'Aritmetica.

Altri infine sono teoremi da dimostrare; e sono quasi tutti radunati nel capitolo « *Questions d'Arithmologie* », in numero di 450. La maggior parte di essi, o sono teoremi interamente nuovi, dovuti all'Autore, oppure sono di quelli che difficilmente si riscontrano nei libri scolastici. Molti di questi teoremi sono seguiti dal nome di chi pel primo li enunciò. Sarebbe desiderabile che in una ventura edizione, che auguriamo prossima, accanto al nome degli autori fosse indicata l'opera e l'anno, come si suole fare nel « *Formulaire de Mathématiques* ». Credo che l'egregio e dotto Prof. Gelin farebbe cosa gradita agli studiosi se a ciascun teorema facesse seguire un breve cenno sulla via da seguire nella dimostrazione.

I sigg. Professori troveranno in questo libro del Gelin una raccolta abbondantissima di quesiti d'Aritmetica classificati in modo che in breve tempo, e con tutta facilità, potranno scegliere per la scuola esercizi adattati all'intelligenza dei proprii alunni, esercizi curiosi, ed interessanti sì da rendere ameno lo studio, per se un po' arido, dell'Aritmetica.

Torino, Gennaio 1900. MARCO NASSÒ.

ALCUNE FORMULE DI LOGICA

$a,b,c,d,e,f \varepsilon \mathrm{Cls} \;.\supset\!\cdot$

1 $a \supset c \;.\supset:\; a \supset b \;.=.\; ac \supset b$ 5 $c \supset a \;.\supset:\; b \supset a \;.=.\; b \supset a \cup c$

2 » $a \supset b \;.=.\; ac \supset bc$ 6 » $b \supset a \;.=.\; b \cup c \supset a \cup c$

3 » $a \supset b \;.=.\; a \supset bc$ 7 » $b \supset a \;.=.\; b \cup c \supset a$

4 $a \supset b \;.\supset.\; a \supset b \cup c$

8 $ab \supset ef \;.\supset.\; abe \supset f$ 8′ $ab \supset ef \;.\; b \supset a \;.\supset.\; b \supset aef$

9 $e \cup f \supset a \cup b \;.\supset.\; f \supset a \cup b \cup e$ 9′ $e \cup f \supset a \cup b \;.\; a \supset b \;.\supset.\; a \cup e \cup f \supset b$

10 $a \supset b \;.=:\; ac \supset b \;.\; a \supset b \cup c$ 10′ $a \supset b \;.=:\; ac \supset bc \;.\; a \cup c \supset b \cup c$

10″ $a = b \;.=:\; ac = bc \;.\; a \cup c = b \cup c$

11 $ab = a \cup b \;.=.\; a = b$ 12 $a \supset b - b$

13 $a = (a \cup b)(a \cup - b)$ 14 $(a \cup b)(- a \cup - b) = a - b \cup b - a$

15 $a \cup b = ab \cup a - b \cup b - a$

16 $a \supset b \cup c \;.-\exists\, bc :\supset:\; ab = a - c \;.\; ac = a - b$

17 $ab = a - c \;.\; b \supset a :\supset:\; a \supset b \cup c \;.-\exists bc$

18 $a \supset b \cup c \;.-\exists\, ab - c :=:\; a \supset c$ 19 $ab \supset c \;.\; a - b \supset c :=:\; a \supset c$

20 $a \supset b \cup c \;.-\exists\, ab - c \;.-\exists ac - b :=:\; a \supset c \;.\; a \supset b$

21 » $.(\;$ » $\cup$ » $\;) :=:$ » $\cup$ »

22 $a \cup b \supset c \cup d \;.\; a = c \;.-\exists ab :\supset.\; b \supset d$

22′ » $=$ » . » . » $:\supset.$ »

22″ » . » $.-\exists cd :\supset.\; d \supset b$

23 $a \cup b \supset c \cup d \;.\; a = c \;.-\exists a - d :\supset.\; b \supset d$

24 $a = b \cup c \cup d \;.-\exists bc \;.-\exists bd :\supset:\; a - b = c \cup d \;.\; a - (c \cup d) = b$

24′ » . » . » $.-\exists cd :\supset:$

$a - b = c \cup d \;.\; a - c = b \cup d \;.\; a - d = b \cup c \;.\; a - b - c = d \;.$

$a - c - d = b \;.\; a - b - d = c$

25 $a = bc \;.-\exists(-b)(-c) :\supset:\; a \cup (-b) = c \;.\; a \cup (-c) = b$

25′ $a = bcd \;.-\exists - b - c \;.-\exists - b - d :\supset:\; a \cup - b = cd \;.\; a \cup - (cd) = b$

25″ » . » . » $.-\exists - c - d :\supset:$

$a \cup - b = cd \;.\; a \cup - c = bd \;.\; a \cup - d = bc \;.\; a \cup - b \cup - c = d$

$a \cup - c \cup - d = b \;.\; a \cup - b \cup - d = c$

Note.

P 1 La ⊃: comprende la F_2I—32 e la sua inversa la quale ha solamente luogo quando il *fattore* che si vuol togliere dalla *Hp contiene il fattore* che rimane nella stessa.

» 2 La ⊃: comprende la F_2I—33 e la sua inversa la quale ha solamente luogo quando il *fattore* comune che si vuol togliere dalla *Hp* e dalla *Ths contiene* il *fattore* che rimane nella *Hp*.

» 3 Non è altro che l'applicazione del principio export alla F_2I—53; così si può introdurre un *fattore* nella *Ths* solo quando questo *fattore* che si vuol introdurre *contenga* la *Hp*.

P 5 La ⊃: comprende la p4 e la sua inversa la quale ha solamente luogo quando l'*addendo* che si vuol togliere dalla *Ths* è *contenuto* nel *addendo* che rimane nella stessa.

» 6 La ⊃: comprende la F_2I—208 e la sua inversa la quale ha solamente luogo quando l'*addendo* comune che si vuol togliere dalla *Ths* e dalla *Hp* è *contenuto* nel *addendo* che rimane nella *Ths*.

» 7 Non è altro che l'applicazione del principio export alla F_2I—213; così si può introdurre un *addendo* nella *Hp* solo quando questo *addendo* che si vuol introdurre è *contenuto* nella *Ths*.

P 4 In linguaggio ordinario come la F_2I—32 si legge « ad una *Hp* si può sempre unire un *fattore* qualunque » così la p4 si legge « ad una *Ths* si può sempre unire un *addendo* qualunque.

» 8;8¹ Un *fattore* si può sempre trasportare dalla *Ths* alla *Hp* (s'intende mantenendo il segno e il nome di *fattore*) ma l'inverso si fa solamente quando il *fattore* che si trasporta nella *Ths contenga* la *Hp* rimanente.

» 9;9¹ Un *addendo* si può sempre trasportare dalla *Hp* alla *Ths* (s'intende mantenendo il segno e il nome di *addendo*) ma l'inverso si fa solamente quando l'*addendo* che si trasporta nella *Hp* sia *contenuto* nella *Ths* rimanente.

NB. — La regola determinata dalla coppia (P8;P8¹) serve per la formazione di teoremi inversi nel senso indicato in « El. di Geometria Sannia e D'Ovidio pag. 27 4a edizione n. 21 ».

La regola determinata dalla coppia (P9;P9¹) si potrebbe chiamare duale della precedente.

P 10 Comprende le F_2I—32, p4, F_2I—230

» 10¹ » » F_2I—33, F_2I—208, F_2I—223

» 10² » » F_2I—50; F_2I—210, F_2I—224

» 11 Differisce dalla F_2I—225 per la scambio di ⊃ in =; comprende tutta la F_2I—225 di più contiene le due forme « ab⊃a⊃a∪b, e Syll. ».

» 18 Si può intendere come un caso più generale della F_2I—344; da quest'ultima si passa alla p. 18 sostituendo alla condizione « -∃ab » la condizione « -∃ab-c » la quale è sempre vera tutte le volte che è vera la precedente, ma non inversamente. Per questo fatto si ha lo scambio fra i segni .⊃.; .=.

» 19 Comprende in sè la F_2I-120 ossia la F_2III §4 P2·4. Osservando poi le equivalenze indicate dalle F_2I-413 e F_2I-254 si vede che la p19 non è

altro che la p18 nella quale alle forme della 1a parte si sono sostituite forme equivalenti.

» 20; 21 Sono conseguenze dirette della p18. Si potrebbe a queste dare le forme della p19.

» 22′;22″ Derivano dalla p22. La loro coesistenza genera la F_2I-345 ossia F_2III §5 P5·5.

» 24;24′ Sono generalizzazioni della F_2I-352.

» 25′;25″ Sono generalizzazioni della p25.

NB. — Le F_2I-352; 24; 24′ e le 25; 25′; 25″ costituiscono la regola per trasportare una classe da un membro all'altro di una eguaglianza, nei casi possibili.

Varallo, Dicembre 1899.

PIETRO BUFFA.

ALCUNE IDENTITÀ

Il prof. Ferrari Francesco pubblica nel supplemento al Periodico di Matematica, anno III, fasc. I, interessanti identità fra tre numeri a, b, c. Alcune di queste formule, cioè le 1, 25, 34, 39 del Ferrari si trovano nel Formulario. Delle altre mi parrebbe conveniente di introdurre nel Formulario le seguenti, analoghe ad altre in esso già contenute.

§ P14:

$$(a+2b)(b+c-a)+(b+2c)(a-b+c)+(c+2a)(a+b-c)=(a+b+c)^2$$

$$(a+b)(b+c)(c-a)+(b+c)(c+a)(a-b)+(c+a)(a+b)(b-c)=$$
$$(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(a-b)^2(a+b-2c)+(b-c)^2(b+c-2a)+(c-a)^2(c+a-2b)=$$
$$3(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(a-b)(b+c-a)(a-b+c)+(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+(c-a)(a+b-c)$$
$$(b+c-a)=4(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$a(b+c)(b+c-a)+b(c+a)(c+a-b)+c(a+b)(a+b-c)=6abc$$

$$a(b-c)(b+c-a)+b(c-a)(c+a-b)+c(a-b)(a+b-c)=$$
$$2(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(a+b)^2(a-b)+(b+c)^2(b-c)+(c+a)^2(c-a)=-(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(a+b)(a-b)^3+(b+c)(b-c)^3+(c+a)c-a)^3=$$
$$2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)=-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$ab(a+b)^2+bc(b+c)^2+ca(c+a)^2=(a+b+c)[(a+b)(b+c)(c+a)-4abc]$$

$$a(b-c)(b+c-a)^2+b(c-a)(c+a-b)^2+c(a-b)(a+b-c)^2=0$$

$$(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5=$$
$$5(a-b)(b-c)(c-a)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

F. CASTELLANO

Additions au Formulaire
par G. VACCA

§r P11·0 { C. H. PRIOR a.1878; Cfr. Mm. a.1881 t.10 p.33 }
{ cont. §Π P8·1 }

§$\uparrow$

6·1 $2\uparrow(2\uparrow5)+1 \ \varepsilon \ N_1\times[2^7(2^3+1)+1]$ {EULER PetrC. a.1732 t.6 p.104}
$2\uparrow(2\uparrow6)+1 \ \varepsilon \ N_1\times[2^8(2^{10}+2^5+2^4-1)+1]$ { LANDRY }
$2\uparrow(2\uparrow12)+1 \ \varepsilon \ N_1\times[2^{14}(2^3-1)+1]$ { PERVOUCHINE PetrB. a.1878 }
$2\uparrow(2\uparrow23)+1 \ \varepsilon \ N_1\times[2^{25}(2^2+1)+1]$ { » » }
$2\uparrow(2\uparrow36)+1 \ \varepsilon \ N_1\times[2^{39}(2^2+1)+1]$ { SEELHOFF Zm. a.1886 t.31 p.173}
14·13 { GERGONNE Ann. de Math. a.1816-17 t.7 p.163 }

P15.

·91 $n\varepsilon\, 6N_1-1 \,.\, a,b\varepsilon N_1 \,.\supset.$
$(a+b)^n-a^n-b^n \ \varepsilon \ nab(a+b)(a^2+ab+b^2)\times N_1$

·92 $n\varepsilon\, 6N_1+1 \,.\, a,b\varepsilon N_1 \,.\supset.$
$(a+b)^n-a^n-b^n \ \varepsilon \ nab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2\times N_1$
{ CAUCHY a.1839, Œuvres s.1 t.4 p.501; *Ex.* a.1841 t.2 p.137 }

§> P7·5 { PAPPUS VII P8 p.691 }

§··· ✱ 2.

·1 $a\varepsilon N_1 \,.\supset.\, \exists N_1 \cap x\ni[x+0\cdots a \supset N_1=N_1\uparrow(1+N_1)]$

§Num

·9 $\mathrm{Num}(\mathrm{Cls}'N_0)=\mathrm{Num}(N_0FN_0)$

·91 $\mathrm{Num}[(N_0F\,0\cdots n)|n\,'N_0]=\mathrm{Num}\,N_0$

§Σ P1·73 $\Sigma\wedge=0$

✱ 14·1 $n\varepsilon N_1 \,.\supset.\, \Sigma[\,/,(n+1)\cdots 2n]=\Sigma[(-1)^r/r\,|r,1\cdots 2n]$
{ CATALAN JdM. a.1875 s.3 t.1 p.240 }

§Π 1·73 $\Pi\wedge=1$

P6.

·2 $n\varepsilon N_1+1 \,.\, a\varepsilon\,(rF1\cdots n)\mathrm{Sim} \,.\, b=\{\Pi[a_r-a,(1\cdots n)-r]\,|r,1\cdots n\} \,.\supset:$
$s\varepsilon\, 0\cdots(n-2) \,.\supset.\, \Sigma a^s/b=0 : \Sigma a^{n-1}/b=1$
{ EULER a.1762 CorrM. t.1 p.659; *PetrNC.* a.1775 t.20 p.78 }

·21 Hp P·2 $.\supset.\, \Sigma a^n/b=\Sigma a \,.\, \Sigma a^{-1}/b=(-1)^n/\Pi a \,.$
$\Sigma a^{-2}/b=(-1)^n\Sigma(/a)/\Pi a$ { GAUSS t.3 p.266 }

✱ $8{\cdot}1\ n\varepsilon 3+N_0 . a\varepsilon (rF1\cdots n)Sim : r\varepsilon 1\cdots(n-2) . \supset_r . \Sigma a^r=0 : \supset .$
$\Sigma\{(-1)^x a_x/\Pi[(a_r-a_s)\,|(r,s), 1\cdots n : 1\cdots n \cap (r,s)\ni(r,s=\varepsilon\iota x . r<s)]\,|x,1\cdots n\}$
$\times\Sigma\{(-1)^x/a_x)\times\Pi[\quad » \quad » \quad » \quad » \quad]\ » \ \}=n^2$
{ MAC MAHON Mm. a.1884 t.13 p.144 }

§! P1.
$\cdot 5\quad n\varepsilon N_1 . \supset . \Sigma\{n!n\,|n, 1\cdots n\}=(n+1)!-1$
$\cdot 6\quad \text{——} . \supset . \Sigma\{n/(n+1)!\,|n, 1\cdots n\}=/(n+1)!$

§ ! $3{\cdot}1n$
{ GERGONNE Ann. de Math. a.1816-17 t.7 p.165 }

§Dvr P2
$u,r\varepsilon$ Cls'R . $\exists u . \exists r . a\varepsilon R . n\varepsilon N_1 . \supset .$ $\cdot 2$ =P1·34 $\cdot 3$ $(Du)^n=D(u^n)$
$\cdot 4$ $D[a\restriction(0\cdots n)]=[D(1,a)]^n$ { BARRIEU NAnn. a.1895 t.14 p.214 }

§mlt P2
$u,r\varepsilon$ Cls'R . Num$u$, Num$r\ \varepsilon N_1 . a\varepsilon R . n\varepsilon N_1 . \supset .$
$\cdot 82\text{-}84$ = (m|D) §Dvr P2·2-·4 { BARRIEU NAnn. a.1895 t.14 p.214 }

§Cmb P3. $m,x\varepsilon N_1 . \supset .$
$\cdot 21\quad \Sigma\{C(m,r)\times\Sigma(1\cdots x)^r\,|r, 0\cdots m\}=\Sigma[2\cdots(x+1)]^m$
$[\ \Sigma\{\quad » \quad » \quad » \quad \}=\Sigma\{\Sigma[C(m,r)y^r\ |r,0\cdots m]\,|y, 1\cdots x\}=$
$\Sigma\{(1+y)^m\,|y,1\cdots x\}=\Sigma[2\cdots(x+1)]^m\ ]$
$\cdot 22\quad (m+1)\Sigma(1\cdots x)^m=$
$(x+1)^{m+1}-1-\Sigma\{C(m+1,r)\times\Sigma(1\cdots x)^r\,|r, 0\cdots(m-1)\}$

$[\ (m+1)\,|m$ P·21 $. \supset .$
$\Sigma\{C(m+1,r)\times\Sigma(1\cdots x)^r\,|r,0\cdots(m+1)\}=\Sigma[1\cdots(x+1)^{m+1}]-1 . \supset .$
$\Sigma\{\quad » \quad » \quad ,0\cdots m\}\quad =(x+1)^{m+1}-1 . \supset .$
$\Sigma\{\quad » \quad » \quad ,0\cdots(m-1)\}=(x+1)^{m+1}-1-(m+1)\Sigma(1\cdots x)^m\} . \supset .$ P]
{ ·21-22 PASCAL a.1655 t.3 p.301 }

§Cmb P3 au lieu de la P·5 lisez:
$\cdot 5\quad n\varepsilon N_1 . \supset . \Sigma\{(-1)^r[C(2n,r)]^3\,|r, 0\cdots 2n\}=(-1)^n(3n)!/(n!)^3$
$=(-1)^n C(3n,n)\times C(2n,n)$
{ DIXON London Mm. a.1890 t.20 p.79 }
$\cdot 51\quad a,n\varepsilon N_1 . \supset . \Sigma\{[C(n,r)]^{2a}\,|r, 0\cdots n\}\ \varepsilon\ (n+1)\times N_1$
{ VIVANTI Zm. a.1888 t.33 p.358 }

$\cdot 6\quad (1+x+x^2)^m=\Sigma\{(x^{m-r}+x^{m+r})\times\Sigma[C(m, r+2s)\times C(r+2s, s)\,|s, 0\cdots m]\,|r, 1\cdots m\}+x^m\times\Sigma\{C(m, 2s)\times C(2s, s)\,|s, 0\cdots m\}$
{ EULER a.1778. *PetrNA.* a.1794 t.12 p.47 }

§Cmb P4.

·4 $n\varepsilon N_1 . \supset . n! = \Sigma\{(-1)^r C(n,r)(n-r)^n \mid r, 0\cdots n\}$

{ EULER *Opera postuma* a. 1862 t.1 p.32 }

·5 $n\varepsilon N_1 . \supset . \Sigma/(1\cdots n) = \Sigma[(-1)^{r+1} C(n,r)/r \mid r, 1\cdots n]$

{ IdM. a.1900 p.121 }

§Np P1·3 $2(N_1+1) \supset Np+Np$

{ GOLDBACH a.1742 *CorrM.* t.2 p.135 ; Dem? }

§Np P4.

·6 $n\varepsilon N_1 . \supset . (2\uparrow)^n 1 + 1 \ \varepsilon \ Np$

{ GERGONNE a.1828 Ann. de Math. t.19 p.256; Dem? }

·7 $7\times 2^{50}+1 \ \varepsilon \ Np$ { SEELHOFF Zm. a.1886 t.31 p.380 }

§Np P9.

·2 $Num\ Np \frown (4N_1+3) \ \varepsilon \ infn$

·3 $Num\ Np \frown (4N_1+1) \ \varepsilon \ infn$ { cont P10·4 }

·4 $Num\ \{Np \frown [2\uparrow(2\uparrow N_1)+1]\} \ \varepsilon \ infn$

{ EISENSTEIN a.1843 JfM t.27 p.87; Dem? }

§mp

Il convient de généraliser la Df 1·0 en substituant à l'Hp de la P1 : $a,b \ \varepsilon \ N_1+1$, la suivante :

✱ 1. $a\varepsilon N_1 . b\varepsilon N_1+1 . \supset .$

On a alors :

·11 $mp(b,1) = 0$

On peut aussi donner des Df qui ne contiennent pas le symbole « max » :

·12 $mp(b,a) = \imath N_0 \frown x \ni [a\varepsilon (b^x \times N_1) - (b^{x+1} \times N_1)]$ Df ?

·13 ——————— $[0\cdots x = N_0 \frown y \ni (a\varepsilon\ b^y \times N_1)]$ Df ?

On peut aussi ajouter :

·41 $a\varepsilon Np . b,c\varepsilon N_1 . \supset . mp(a, bc) = mp(a,b)+mp(a,c)$

2·5 { WALLIS a.1658 t.2 p.814 :

« Si duorum pluriumve numerorum primorum potestates quaelibet invicem ducantur, factus partibus suis aliquotis auctus, aequatur facto ex componentibus partium suarum aliquotarum additione auctis ». }

§nt P0.

·91 $a\varepsilon R . \supset . nta = /Dvr(1,/a) . dta = /Dvr(1,a)$ Df ?

·92 ——————— $= /\ mlt(1,a)$ ——— $= /\ mlt(1,/a)$ Df ?

✱ 6.

·1 $a\varepsilon R \,.\, b\varepsilon N_1+1 \,.\supset.\, mp(b,a) = mp(b, nta) - mp(b, dta)$ Df

C'est-à-dire : $mp(b,a)$ est la plus grande puissance de b qui divise le numérateur réduit de a, ou la plus grande puissance, changée de signe, qui en divise le dénominateur réduit. Un de ces deux nombres est toujours nul car on a (§nt P0·11) : $Dvr(nta, dta) = 1$. Cette Df comprend celle donnée pour le cas où $a\varepsilon N_1$. Alors on a $dta = 1$, il s'ensuit que $mp(b,dta) = 0$, en tenant compte de la modification introduite au §mp.

·2 $a\varepsilon N_1+1 \,.\, b\varepsilon R \,.\supset.$ §mpP1·5

·3 $m\varepsilon N_1 \,.\supset\therefore\, a\varepsilon R^m \,.=:\, x\varepsilon Np \,.\supset_x.\, mp(x,a)\ \varepsilon\ n\times m$

·4·5 $a\varepsilon N_1+1 \,.\, b\varepsilon R \,.\supset.$ §mp P1·8·9 ·6 = §mp2·1

·7 $u\varepsilon Cls'R \,.\ \exists u \,.\supset.$ Ths §mp P2·3

·8 ——— . Num$u\ \varepsilon N_1 \,.\supset.$ ———— ·4

{ ·6·7·8 BARRIEU NAnn. a. 1895 t.14 :

·6 Tout nombre fractionnaire est un produit de facteurs premiers affectés d'exposants entiers, positifs, ou négatifs. (p. 96).

·7 Pour former le plus grand commun diviseur de n nombres, entiers ou fractionnaires, on fait le produit de tous les facteurs premiers qui entrent dans ces nombres, en affectant chacun de ces facteurs de son plus faible exposant. (p. 97).

·8 Il y a une loi de formation analogue pour former le plus petit commun multiple. (id.). }

Note. — Il convient de poser le §nt entre les §mlt, et §Cmb. Alors la P6 qu'on a ajoutée ici irait prendre sa place dans le §mp.

✱ 7. $p\varepsilon Np \,.\, p>3 \,.\, n\varepsilon 1\cdots(p-3)/2 \,.\, r\varepsilon N_1 \,.\supset.$

·1 $nt\Sigma/[1\cdots(p-1)]\ \varepsilon\ p^2\times N_1$ { OSBORN a.1892 Mm. t.22 p.51 }

·2 $nt\Sigma/[1\cdots(p-1)]^2\ \varepsilon\ N_1\times p$

·3 $nt\Sigma/[1\cdots(p-1)]^{2n-1}\ \varepsilon\ N_1\times p^2$

·31 » » $]^{2n}\ \varepsilon\ N_1\times p$

·4 $nt\Sigma/[1\cdots(p-1)]\restriction[r(p-1)+2n-1]\ \varepsilon\ N_1\times p^2$

·41 » » » $+\ 2n\ ]\ \varepsilon\ N_1\times p$

·42 » » » $+\ p-2]\ \varepsilon\ N_1\times p^2-(r+2)p/2$

·43 » » » $]\ \varepsilon\ N_1\times p-1$

{ ·2-·43 GLAISHER a.1900 QJ. t.31 p.337 }

§Q P34.

·31 $a\varepsilon N_1 \,.\supset.\, \Sigma a\restriction-(N_1!)\ \varepsilon\ Q\text{-}R$

·91 $a\varepsilon(N_1 f N_1)cres \,.\supset.\, \Sigma\{[/\Pi(a, 1\cdots n)]\,|n, N_1\}\ \varepsilon\ Q\text{-}R$

———— $.\supset.\, /a_1 + /(a_1a_2) + /(a_1a_2a_3) + \ldots\ \varepsilon\ Q\text{-}R$

{ STERN a.1848 JfM. p.95 }

{ ·31·91 LIOUVILLE JdM. a.1851 t.16 p.141 }

§q ✱ 44. f l′ q

·1 $f\varepsilon \mathrm{qfq} : y,z\varepsilon\mathrm{q} . \supset_{y,z} . f(y+z) = fy + fz : a,b,x\varepsilon\mathrm{q} . a<b .$
$\mathrm{l}'f`a^{\frown}b\ \varepsilon\mathrm{q} : \supset . fx = (f1)\times x$ { DARBOUX MA. a.1880 t.17 p.55 }

§E P3

·8 $a\varepsilon\mathrm{N}_1 . \supset . a! = \Pi\{\Pi[\Pi[\mathrm{Np} \cap 0\cdots\mathrm{E}(s^{-1}\times \sqrt[r]{a})]\ |s, \mathrm{N}_1]\ |r, \mathrm{N}_1\}$
{ TCHEBYCHEF a.1850, JdM. t.17 p.341 }

§λ

✱ 5. Int

$u,r\varepsilon$ Cls'q $. \supset .$ ·0 $\mathrm{Int}u = \mathrm{I}u = \mathrm{q}-\lambda(\mathrm{q}-u)$ Df

Note. Avec le symbole λ on peut exprimer simplement plusieurs autres classes introduites dans F1889, et ensuite par plusieurs A.

Notamment :

Int$u$ ou Iu	=	points intérieurs du domaine u
Eu = q − λu	=	» extérieurs »
Lu = λ(q − u) ∩ λu	=	» frontière »

·1 $\mathrm{I}u \supset u$ ·2 $\mathrm{II}u = \mathrm{I}u$ ·3 $\mathrm{I}(u \cap v) = \mathrm{I}u \cap \mathrm{I}v$

·31 $u \supset v . \supset . \mathrm{I}u \supset \mathrm{I}v$ ·32 $\mathrm{I}(u \cup v) \supset \mathrm{I}u \cup \mathrm{I}v$ ·33 $\mathrm{I}(\mathrm{I}u \cup \mathrm{I}v) = \mathrm{I}u \cup \mathrm{I}v$
[§λ P1·1-·33 .⊃. ·1-·33]

·4 $\lambda u = \mathrm{q}-\mathrm{I}(\mathrm{q}-u)$ Df?
{ Cfr . §▽ P3·2 }

§lim P6

·31 $a\varepsilon\theta . \supset . \lim(a\uparrow)^n 1\ |n\ \varepsilon\ \mathrm{Q}$

·32 ———————— $= \iota\ \mathrm{Q} \cap x\ni(a^x = x)$
{ EISENSTEIN JfM. a.1844 t.28 p.49 }

13·21 $u\varepsilon\ \mathrm{qf}\mathrm{N}_0 . \mathrm{Lm}\ \Sigma(u, 0\cdots n)\ |n \supset \mathrm{q} . a\varepsilon\ (\mathrm{Qf}\mathrm{N}_0)\mathrm{decr} . \lim a = 0 . \supset .$
$\Sigma(au, \mathrm{N}_0)\ \varepsilon\mathrm{q}$ { ABEL t.1 p.222 }

·4 $a\varepsilon\ \mathrm{Qf}\mathrm{N}_0\ \mathrm{decr}_0 . \Sigma(a,\mathrm{N}_0) = \infty . n\varepsilon\mathrm{N}_0 . h\varepsilon\ 0\cdots(n-1) . \supset .$
$\Sigma(a,\ n\times\mathrm{N}_0+h) = \infty$

18·4 { MANSION a.1887 *Rés. du cours d'Analyse inf.*, Paris p.281 }

18·6 $u\varepsilon\ \mathrm{qF}\mathrm{N}_0\mathrm{decr} . \lim u = 0 . \Sigma\mathrm{mod}u = \infty . \Sigma u\ \varepsilon\mathrm{q} . \supset .$
$\lim[\Sigma(\mathrm{sgn}u, 0\cdots n)/n]\ |n = 0$ { CESÀRO *Anal. Alg.* p164 }

§e

·8 { EULER Misc. Berol. a.1743 t.7 p.177:

« $\mathrm{e}^x = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ existente n numero infinito. »}

·25 $n\varepsilon\mathrm{N}_1 . x\varepsilon\ \mathrm{rf}\ 1\cdots n . \supset . \mathrm{e}^n + \Sigma(x_r \mathrm{e}^{n-r}|r, 1\cdots n) = = 0$
{ HERMITE a.1873 ParisCR. t.77 ; cfr. GORDAN a.1893 MA. t.43 }

§log P1.

·31 $m,n\varepsilon N_1 . m<n . \supset . \lim \Sigma/(mp\cdots np) \,|p = \log(m/n)$

{ Joh. BERNOULLI II a.1710⊣1790, a.1729 CorrM. t.2 p.300:

« Si l'on coupe la progression harmonique $1/x$ ... en deux parties ... soit la raison du nombre des termes dans la première et seconde partie comme m à n, la somme de tous les termes de cette seconde partie sera $= \log[(m+n)/n]$. »

·8 $a\varepsilon\ (e\sqrt{\ }-/e)^{-1}\ 1 . \supset .$

$\lim(a\sqrt{\ })^n 1 \,|n = \Sigma\{(n+1)^{n-1}(\log a)^n/n! \,|n, N_0\}$

{ EULER PetrA. a.1777 t.1 }

{ MURPHY *A treatise on Alg. Equations*, London a.1838 p.81 }

{ EISENSTEIN JfM. a1844 t.27 p.51 :

$$a^{a^{a^{\text{in inf.}}}} = 1+\log a+3\frac{(\log a)^2}{2!}+4^2\frac{(\log a)^3}{3!}+\text{etc.}$$

und dieses Resultat gilt

von $a=\frac{1}{e\sqrt{e}}=0{,}6922\ldots$ (excl.) *bis* $a=1$ (incl.) . }

§π P1.

·81 $\pi\ \varepsilon\ \sqrt{(1+\sqrt{6})}+\sqrt{(9-3\sqrt{6})}-\theta X^{-3}$ { MASCHERONI a.1798 p.248 }

·82 $\pi\ \varepsilon\ 9/5+3/\sqrt{5}-\theta X^{-4}$

·83 $\pi\ \varepsilon\ \sqrt{(40/3-2\sqrt{3})}+7\theta X^{-5}$ }

{ KOCHANSKI, *Acta eruditorum* a.1685 p.398 }

·84 $\pi\ \varepsilon\ (13\sqrt{146})/50+\theta X^{-6}$ { SPECHT JfM. a.1828 t.3 p.83 }

·85 $\pi\ \varepsilon\ (501+80\sqrt{10})/240-\theta X^{-7}$

{ GERGONNE Ann. de Math. a.1817 t.8 p.252 }

Note. — Les P·83 ·84 donnent des constructions géométriques assez simple pour π en observant que :

$\sqrt{(40/3-2\sqrt{3})} = \sqrt{[4+(3-\sqrt{3})^2]}$; $(13\sqrt{146})/50 = (13/10)\sqrt{[1+(11/5)^2]}$.

·9 $n\varepsilon N_1\ x\varepsilon\ \mathrm{rf}\ 1\cdots n . \supset . \pi^n+\Sigma(x_r\pi^{n-r}|r, 1\cdots n) = 0$

{ LINDEMANN a·1882 MA. t.20 p.213;

cfr. GORDAN a.1893 MA. t.43 p.222 }

✱ 5. $n\varepsilon N_1 . \sigma_n=\Sigma(N_1\sim n/N_1) . \supset .$

·1 $\lim\{(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n)/n^2\} \,|n = \pi^2/12$

·2 $\lim\{(\sigma_1/1+\sigma_2/2+\ldots+\sigma_n/n)/n\} \,|n = \pi^2/6$

·3 $\lim\{(\sigma_1/1+\sigma_2/4+\ldots+\sigma_n/n^2)/\log n\} \,|n = \pi^2/6$

·4 $\lim\{(\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_n)/n^2\} \,|n = 3/\pi^2$

·5 $\lim\{(\Phi_1/1+\Phi_2/2+\ldots+\Phi_n/n)/n\} \,|n = 6/\pi^2$

·6 $\lim\{(\Phi_1/1+\Phi_2/4+\ldots+\Phi_n/n^2)/\log n\} \,|n = \pi^2/6$

{ ·1-·6 CESÀRO a.1893 *NapoliA.* s.2 t.6 N°11 p.15 }

§sin

2·3 { EULER PetrNC. a.1760 t.5 p.204 }

4·5 $a\varepsilon\,(\mathrm{Qf}\,\mathrm{N}_0)\mathrm{decr}\,.\,\lim a = 0\,.\,x\varepsilon\,\mathrm{q}\text{-}2n\pi\,.\supset.\,\Sigma[(a_r\cos rx)|r,\mathrm{N}_1]\;\varepsilon\mathrm{q}$

·6 ———————————— $.\,x\varepsilon\mathrm{q}\,.\supset.\,[\Sigma(a_r\sin rx)|x,\mathrm{N}_0]\;\varepsilon\mathrm{q}$

{ BJÖRLING }

5·6 $x\varepsilon\,(-\pi/2)^-(\pi/2)\,.\supset.\,\log(\cos x + \mathrm{i}\sin x) = \mathrm{i}x$

{ COTES a.1714 London PhilTrans. t.29 p.32 :

« ... si quadrantis circuli quilibet arcus [x], radio CE [1] descriptus sinum habeat CX [$\sin x$], sinumque complementi ad quadrantem XE [$\cos x$]: sumendo radio CE pro Modulo, arcus erit rationis inter EX+XC$\sqrt{-1}$ et CE [$\cos x + \mathrm{i}\sin x$] mensura ducta in $\sqrt{-1}$. » }

§$\sin^{-1}$ P1n

Euler, *Misc. Berol.* a.1743 t.7 p.167 a adopté les notations: sinAx, Asin$x$, au lieu de: $\sin x$, $\sin^{-1}x$; où A est l'initiale de Arc.

§$\sin^{-1}$ P3.

·541 $(m,n,x,y)\ni[m,n\varepsilon\mathrm{n}\,.\,x,y\varepsilon\mathrm{N}_1\,.\,x<y\,.\,m\,\mathrm{tng}^{-1}x + n\,\mathrm{tng}^{-1}y = \pi/4]$
$= \iota(1,1,2,3) \cup \iota(2,-1,2,7) \cup \iota(2,1,3,7) \cup \iota(4,-1,5,239)$

{ STÖRMER BsF. a.1899 t.27 p.170 }

·57 $\pi = \Sigma\{\mathrm{tng}^{-1}/(2n^2)|n,\mathrm{N}_1\}$

§vct P8·44 { LAGNY Paris M. a.1706 p.319 :

Dans tout parallelogramme la somme des quarrez des deux diagonales est égale à la somme des quarrez des quatre côtez. }

35·2n { REGIOMONTANUS a.1533 p.95 :

In omni triangulo ... sinus laterum ad sinus angulorum eis oppositorum eandem habent proportionem.

§103 ∇

✱ 1. $k\varepsilon$ Cls'pnt . $k\supset\delta k$. $p\varepsilon k$. $u,v\varepsilon$ qf$k$.$\supset$.

·0 $\nabla(u,k,p) =$

·1 $\mathrm{vct}\cap v\ni\{\lim\{[(uq-up)-(q-p)\times v]/\mathrm{mod}(q-p)]\,|q,k,p\} = 0\}$ Df

Hamilton a introduit cet operateur ∇ dans ses *Lectures on Quaternions*, Dublin a.1853, p.610.

Lamé (JdM. a.1840 t.5 p.316) avait déjà étudié le mod$\nabla(u,k,p)$ en l'appellant « paramètre différentiel de premier ordre de la fonction u ».

·1 $\nabla(u+v,k,p) = \nabla(u,k,p) + \nabla(v,k,p)$

✱ 2. $u\varepsilon$ vct . $a,p\varepsilon$ pnt . $m\varepsilon\,2+\mathrm{N}_0$.$\supset$.

·1 $\nabla[u\times(p-a)\,|p,\mathrm{pnt},p] = u$ ·2 $\nabla[(p-a)^2\,|p,\mathrm{pnt},p] = 2(p-a)$

·3 $\nabla[\mathrm{mod}(p-a)\,|p,\mathrm{pnt}\text{-}\iota a,p] = \mathrm{U}(p-a)$

·4 $\nabla\{[\mathrm{mod}(p-a)]^m\,|p,\mathrm{pnt},p\} = m\,[\mathrm{mod}(p-a)]^{m-1}\mathrm{U}(p-a)$

✱ 3.

·1 Hp P1 . $up = \max u'k$. $\nabla(u,k,p)\ \varepsilon$ vct .⊃. $\nabla(u,k,p) = 0$

·2 Hp P1 . $l\varepsilon$ (Int$k$)FΘ . $t\varepsilon\Theta$. Dlt, $\nabla(u,k,lt)\ \varepsilon$ vct .⊃.
D$(ul, \Theta, t) = \nabla(u,k,lt) \times$ Dlt

·3 Hp P·2 . $ult = \max ul'\Theta$.⊃. $\nabla(u,k,lt) \times$ D$lt = 0$

Additions au Formulaire par M. Chini.

§E

$n\varepsilon N_1$. $x\varepsilon Q$.⊃. $E(\sqrt[n]{x}) = \imath N_0 \cap z\exists[z \leq x < (z+1)^n]$

» $E(\sqrt[n]{x}) = E(\sqrt[n]{Ex})$

§vct

10·91 $u,v,w\varepsilon$ vct . $x\varepsilon$q .⊃. $(u\times v)(xw) = (xu\times v)w$

$u,v,w\varepsilon$ vct−ι0 .⊃. $(u\times v)^2 = u^2v^2$.=. $u\varepsilon$ qv

$(u\times v)w = (u\times w)v$.=. $v\varepsilon$ qw

§D ycct U D

56. $u\varepsilon$ (vct−ι0)Fq . D$u\ \varepsilon$ vctFq .⊃. Dmod$u$ = U$u\times$Du

D Uu = [(cmp$\underline{|}u$)Du]/mod$u$

§102 rectaTang Norm curvatura

✱ 4. $p\varepsilon$ pntFq . $t\varepsilon$q . Dpt ε vct−ι0 . D$^2pt\ \varepsilon$ vct−qDpt .⊃.

Norm(p,t) = recta[pt, (cmp$\underline{|}$Dpt)(D^2pt)] Df

Norm(p,t) = recta[pt, D(UDpt)]

curvatura(p,t) = modD(UDpt)/modDpt Df

Additions au Formulaire par G. Eneström.

§— note. Ajoutez :

On rencontre les signes + et —, employés régulièrement avec la signification actuelle, chez Grammateus a.1521. (Voir M. Cantor, t.2 (éd.2) p.39.)

§π P1·5. Au lieu de P. Metius mettez A. Anthonisz. (Voir BM a.1888 p.36; 1889 p.84.)

§π P2·3 Remplacez la citation par :

{ Euler: a.1735(?) ; CPetrop. t.7 a.1740. (Voir BM a.1890 p.24.) }

Additions au Formulaire par G. PEANO.

§Σ P1

·8 $m,n\varepsilon N_1 . u\varepsilon N_0 f(1\cdots m : 1\cdots n) . \supset .$

$\Sigma\{\Sigma[u(r,s)|r, 1\cdots m]|s, 1\cdots n\} = \Sigma\{\Sigma[u(r,s)|s, 1\cdots n]|r, 1\cdots m\}$

§Σ P10

$n\varepsilon N_1 . a\varepsilon (0\cdots 9)f(0\cdots n) . m\varepsilon N_1 . \supset .$

·1 $\Sigma(a_r X^r|r, 0\cdots n)\ \varepsilon\ 2N_0 .=. a_0\ \varepsilon\ 2N_0$

·2 » $\varepsilon\ 3N_0 .=. \Sigma(a, 0\cdots n)\ \varepsilon\ 3N_0$

·3 » $\varepsilon\ 4N_0 .=. a_0+2a_1\ \varepsilon\ 4N_0$

·4 » $\varepsilon\ 5N_0 .=. a_0\ \varepsilon\ 5N_0$

·5 » $\varepsilon\ 9N_0 .=. \Sigma(a, 0\cdots n)\ \varepsilon\ 9N_0$

·6 » $\varepsilon\ 2^m N_0 .=. a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_{m-1}X^{m-1}\ \varepsilon\ 2^m N_0$

·7 » $\varepsilon\ 5^m N_0 .=.$ » » » » $\varepsilon\ 5^m N_0$

§Np 4·32 $Np = \iota 2 \cap (4N_1+1) \supset N_1^2+N_1^2$

$Np \cap [(8N_1+1) \cup (8N_1+3)] \supset N_1^2+2N_1^2$

$Np \cap [(8N_1+1) \cup (8N_1-1)] \supset N_1^2-2N_1^2$

Continuation : LEGENDRE a.VI tables 3 et 4.

5·23 $a\varepsilon N . 2a+1\ \varepsilon\ Np . b\varepsilon\ n = n(2a+1) . \supset .$

$(-b)^a-1\ \varepsilon\ n(2a+1) .=. b\varepsilon\ n^2 + (2a+1)n$

[LEGENDRE a.VI N.134]

Les nombres n^2+an s'appellent « résidus quadratiques de a ».

·24 $n\varepsilon N . x\varepsilon\ N\ F\ 1\cdots n . a\varepsilon\ Np . \supset . (\Sigma x)^a-\Sigma(x^a)\ \varepsilon\ N\times a$

·31 $2^2-1, 2^3-1, 2^5-1, 2^7-1\ \varepsilon\ Np$ { EUCLIDES IX P36 scolia }

·32 $2^{13}-1, 2^{17}-1, 2^{19}-1\ \varepsilon\ Np$

·33 $2^1+1, 2^2+1, 2^4+1, 2^8+1, 2^{16}+1\ \varepsilon\ Np$

12·34 $a\varepsilon\ (N_1+4) = Np . \supset . (a-1)!\ \varepsilon\ N_1\times a$

§mp 2·7 $n\varepsilon N . x\varepsilon\ N^n F\ 1\cdots n . a\varepsilon\ Np . \supset .$

$mp(a, \Pi x) = \Sigma[mp(a, x_r)|r, 1\cdots n]$

§Q

25·6 $x\varepsilon\ Q-N_1^2 . \supset . \sqrt{x} - [x-(E\sqrt{x})^2][(2E\sqrt{x}+1)\ \varepsilon\ \theta/[4(2E\sqrt{x}+1)]$

{DARBOUX, *Sur l'extraction de la racine carrée*, BD. a.1887 p.176}

§q44·1 $u,v\varepsilon$ Cls'q . $1_{,}\mathrm{mod}u = 1_{,}\mathrm{mod}v = 0 . \supset . 1_{,}\mathrm{mod}(u+v) = 0$

§ $\lambda\ \delta$

P2·1 Dem

§ ⊢P8.3 .⊃: $a\varepsilon\ \lambda u+\lambda v .=. \exists(b;c)\ni(b\varepsilon\lambda u . c\varepsilon\lambda v . b+c=a)$

Df λ .⊃: » .=. » $[1_{,}m(u-b)=0 . 1_{,}m(v-c)=0 . b+c=a]$

§q P44·1 .⊃: » .⊃. » $[1_{,}\mathrm{mod}(u+v-b-c)=0 . b+c=a]$

» .⊃. $1_{,}\mathrm{mod}(u+v-a)=0$. Df λ .⊃. $a\varepsilon\ \lambda(u+v)$

2·11 $u,v\varepsilon$ Cls'q . $a\varepsilon$q .⊃. $\lambda(a+u)=a+\lambda u$ ·31 $\lambda(au)=a\lambda u$
·12 l'mod u, l'mod v ε Q .⊃. $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$

§δ. M. Vivanti a continué la bibliographie de ces sujets dans: Lista bibliografica della teoria degli aggregati 1893-1899, BM. a.1900 p.160

4·41 $u\varepsilon$ Cls'q . Num$u$ ε infn . l'mod$u$ εQ .⊃.
l' q∩x ∋ {Num[u∩(x+Q)] ε infn} = max δu .
l, » » — » = min δu

§ Lm 1. $x\varepsilon$ qfN$_0$.⊃:
·01 Lmx ⊃ $\Lambda(x$'N$_0)$ ·02 $m\varepsilon$N$_0$.⊃. Lmx ⊃ Λ x'(m+N$_0$)
2·91 Lm $(-1)^n|n=\iota 1\cup\iota(-1)$

❋ 3.

·1 $m\varepsilon$N$_1$.⊃. Lm$\beta(n/m)|n=[0\cdots(m-1)]/m$
·2 $a\varepsilon$R .⊃. Lm $\beta(an)|n=[0\cdots(\mathrm{d}ta-1)]/\mathrm{d}ta$
·3 $a\varepsilon$ Q-R .⊃. Lm $\beta(an)|n=\Theta$ ·31 Lm $\beta\sqrt{}=\Theta$
·4 Lm $[n-(\mathrm{E}\sqrt{n})^2]|n=\mathrm{N}_0\cup\iota\infty$ ·41 Lm $[n-(\mathrm{E}\sqrt{n})^2]/\sqrt{n}\,|n=2\Theta$

§ lim P6·31 $a\varepsilon$Q .⊃. lim $\sqrt[n]{a}|n=1$

❋ 7.

1 $a\varepsilon$Q . $n\varepsilon$N$_1$.⊃. lim{[$\sqrt[n]{(a+x)}\,|x]^r$ 0}$|r=\iota$Q∩x∋$(x^n-x-a)=0$
{ Joh. Bernoulli t.4 p.13:
« universaliter $\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a}$ &c.)))) pro aequatione habebitur $x^n-x-a=0$ » }

9·1 $u\varepsilon$ qfN$_0$. lim$u$ εq .⊃. lim[$\Sigma(u,1\cdots n)/n]|n=$ lim u
11·5 $u,r\varepsilon$ QfN$_0$: $n\varepsilon$N$_0$.⊃$_n$. $u_n<v_n$: $\Sigma(r,\mathrm{N}_0)$ εQ .⊃. $\Sigma(u,\mathrm{N}_0)$ εQ
·6 $u\varepsilon$ Qf(N$_0$:N$_0$) .⊃. $\Sigma\{\Sigma[u(m,n)|n,\mathrm{N}_0]|m,\mathrm{N}_0\}=$
$\Sigma\{\Sigma[u(m,n)|m,\mathrm{N}_0]|n,\mathrm{N}_0\}$
15·4 $u,v\varepsilon$ QfN$_0$: $r\varepsilon$N$_0$.⊃$_r$. $u_{r+1}/u_r<v_{r+1}/v_r$: $\Sigma(u,\mathrm{N}_0)\varepsilon$Q :⊃.
$\Sigma(u,\mathrm{N}_0)\varepsilon$Q

§limP17

·2 $x\varepsilon\theta$.⊃. $\Sigma[x^n/(1-x^n)\,|n,\mathrm{N}_1]=\Sigma\{$Num(N$_1$∩$n$/N$_1$)×$x^n$ $|n,\mathrm{N}_1\}$
{ Lambert *Architechtonik* a.1771 t.2 p.507 }
·3 $x\varepsilon\theta$.⊃. $\Sigma[nx^n/(1-x^n)|n,\mathrm{N}_1]=\Sigma\{$Num[N$_1$∩$n$/(N$_1$+1)] x^n $|n,\mathrm{N}_1\}$
{ Euler PetrNC. t.5 a.1760 p.70 }
16·5 $n\varepsilon$ QfN$_0$. $h\varepsilon$Q . $\infty=\varepsilon$ Lm $n^{1+h}u_n$ $|n$.⊃. $\Sigma(u,\mathrm{N}_0)$ εQ
19·6 $u\varepsilon$ q f (N$_0$:N$_0$) . Σ[[l' mod $u(m,n)|m$ 'N$_0$)]$|n,\mathrm{N}_0]$ εQ :
$n\varepsilon$N$_1$.⊃n. lim $u(m,n)|m$ εq :⊃. lim $\Sigma[u(m,n)|n,\mathrm{N}_0]$ $|m$
$=\Sigma$[[lim $u(m,n)|m]|n,\mathrm{N}_0]$ [Comm(Σ, lim)]

22·4 $a\varepsilon\ 1+Q\ .\supset.\ /(a-1)=\Sigma\{n!/\Pi[(a+r)|r,1\cdots n]|n,N_1$
{ STIRLING a.1730 p. 11 }

23·2 $x\varepsilon r\ .\supset.\ \lim\ [\beta(n!x)+\beta(-n!x)]|n=\lim\ (\mathrm{sgn}\ \beta\ n!x)|n=0$

·21 $x\varepsilon\ q-r\ .\supset.$ » » » » » $=1$

31·0 $\lim\ [\mathrm{Num}(\mathrm{Np}\cap 1\cdots n)/n]|n=0$ [LEGENDRE a.VI p.464]

§e ·81 $\lim\ \sqrt[n]{[(2n)!/(n!n)]}\ |n=4/e$

§log 1·32 $\log 2=/2+/(2\times 2^3)+/(3\times 2^5)+\ldots$ [P·3 . $x=-/2\ .\supset.$ P]

·41 $\log 2=2[/3+/(5\times 3^5)+/(7\times 3^7)+\ldots$ [P·4 . $x=1\ .\supset:$ P]

·42 $\log[(a+b)/2=(\log a+\log b)/2+\{\Sigma[(a-b)/(a+b)]^n/n\ |n,N_1\}$

2·2 $n\varepsilon N_1\ .\supset.$
$\lim\{[\mathrm{Num}\ \mathrm{Np}\cap 1\cdots x]/x-\Sigma[r!/(\log x)^{r+1}\ |r,0\cdots n]\}(\log x)^{n+2}\ |x=(n+1)!$
{ TCHEBYCHEFF JdL t.17 p.384 }

§ Subst P5

·6 $n\varepsilon N_1\ .\ u\varepsilon\ qF(1\cdots n\ ;\ 1\cdots u)\ .\ \mathrm{Dtrm}\ u=0\ .\ y\varepsilon q_n\ .\supset:$
$x\varepsilon q_n\ .\ (\mathrm{Sb}u)x=y\ .=.\ x=(\mathrm{Sb}u)^{-1}y$

§sin 2·4 $\mathrm{Lm}(\sin,q,\infty)=(-1)^{\vdash 1}$
$\mathrm{Lm}(x\sin x\ |x,q,\infty)=q\cup\iota\infty\cup\iota(-\infty)$

§vct P9

·5 $a,b,c\varepsilon$ pnt . $\mathrm{mod}(a-b)=\mathrm{mod}(a-c)=\mathrm{mod}(b-c)=1\ .\supset.$
$\mathrm{mod}[(a+b)/2-c]=\sqrt{3}/2$.
$\mathrm{mod}[(a+b+c)/3-a]=/\sqrt{3}$ { EUCLIDES XIII P12:
« *Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ του τριγώνοα πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τȣ̃ κέντρȣ τȣ̃ κύκλȣ.* » }

·6 $a,b,c,d\varepsilon$ pnt . $\mathrm{mod}(a-b)=\mathrm{mod}(a-c)=\mathrm{mod}(a-d)=\mathrm{mod}(b-c)=\mathrm{mod}(b-d)=\mathrm{mod}(c-d)=1\ .\supset.$
$\mathrm{mod}[(a+b)/2-(c+d)/2]=\sqrt{(/2)}$.
$\mathrm{mod}[(a+b+c)/3-d]=\sqrt{(2/3)}$.
$\mathrm{mod}[(a+b+c+d)/4-a]=\sqrt{6}/4$ { EUCLIDES XIII P13:
« *ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.* » }

§ vct P13

·2 $a,b,c\varepsilon$ pnt . $m,n\varepsilon q\ .\supset.$
$[(m+n)a-(mb+nc)]^2=m(m+n)(a-b)^2+n(m+n)(a-c)^2-mn(b-c)^2$
STEWART Matthew, a. 1717 ⊢ 1785.
— *Propositiones geometricae more veterum demonstratae*, Edinburgh a.1763. § vct P13·2

·3 $a,b,c,d \varepsilon$ pnt . $m,n,p \varepsilon$ q .⊃.
$[(m+n+p)a-(mb+nc+pd)]^2 = (m+n+p)[m(a-b)^2+n(a-c)^2$
$+p(a-d)^2] - mn(b-c)^2 - mp(b-d)^2 - np(c-d)^2$

§vct P23

·2 $u,v \varepsilon$ vct f 1···4 .⊃. Dtrm$[u_r \times v_s \,|(r,s),\ 1\cdots4 : 1\cdots4] = 0$

§vct 34.

·3 $a,b,c \varepsilon$ pnt . mod$(a-b)$ = mod$(a-c)$ = mod$(b-c) = 1$.⊃.
cos$(b-a,\ c-a)$ = sin$[a-b, a-(b+c)/2] = /2$.
sin » = cos » » $= \sqrt{3}/2$

·4 $a,b,c,d \varepsilon$ pnt . mod$(a-b)$ = mod$(a-c)$ = mod$(a-d)$ = mod$(b-c)$ = mod$(b-d)$ = mod$(c-d) = 1$.⊃.
cos$[(a+b)/2-c,\ (a+b)/2-d] = /3$
sin » » » » $= 2\sqrt{2}/3$
cos$[(a+b)/2-c,\ (a+b)/2-(c+d)/2] = \sqrt{(2/3)}$
sin » » » » » $= \sqrt{/3}$

Additions au Formulaire par T. Boggio.

§sin 5·11 $m \varepsilon$ n . $x \varepsilon$ q .⊃.

$\sin[(4m+1)\pi/2+x] = +\cos x$	$\sin[(4m+2)\pi/2+x] = -\sin x$
» $-$ $= +$ »	» $-$ $= +$ »
$\sin[(4m+3)\pi/2+x] = -$ »	$\sin[(4m+4)\pi/2+x] = +$ »
» $-$ $= -$ »	» $-$ $= -$ »
12 $\cos[(4m+1)\pi/2+x] = -\sin x$	$\cos[(4m+2)\pi/2+x] = -\cos x$
» $-$ $= +$ »	» $-$ $= -$ »
$\cos[(4m+3)\pi/2+x] = +$ »	$\cos[(4m+4)\pi/2+x] = +$ »
» $-$ $= -$ »	» $-$ $= +$ »

·21 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 1 - 2(\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1$
$x \varepsilon\ 4n\pi + 2\Theta\pi$.⊃. $\sin x/2 = +\sqrt{[(1-\cos x)/2]}$
$x \varepsilon\ (4n+2)\pi + 2\Theta\pi$ » — »
$x \varepsilon$ q .⊃. $\sin x/2 = [(-1)^{E\{x/(2\pi)\}}]\sqrt{[(1-\cos x)/2]}$

·22 $x \varepsilon\ 2n\pi + \Theta\pi$.⊃. $\sin x = +\sqrt{[1-(\cos x)^2]}$
$x \varepsilon\ (2n+1)\pi + \Theta\pi$ » — »
$x \varepsilon$ q .⊃. $\sin x = [(-1)^{E(x/\pi)}]\sqrt{[1-(\cos x)^2]}$
$x \varepsilon\ (4n-1)\pi/2 + \Theta\pi$.⊃. $\cos x = +\sqrt{[1-(\sin x)^2]}$
$x \varepsilon\ (4n+1)\pi/2 + \Theta\pi$ » — »
$x \varepsilon$ q .⊃. $\cos x = [(-1)^{E(x/\pi+/2)}]\sqrt{[1-(\sin x)^2]}$

·23 $x\varepsilon(8n-1)\pi/2+\Theta\pi \,.\supset.\, 2\sin x/2 = +\sqrt{(1+\sin x)}-\sqrt{(1-\sin x)}$

» $2\cos x/2 = +$ » $+$ »

$x\varepsilon(8n+1)\pi/2+\Theta\pi \,.\supset.\, 2\sin x/2 = +$ » $+$ »

» $2\cos x/2 = +$ » $-$ »

$x\varepsilon(8n+3)\pi/2+\Theta\pi \,.\supset.\, 2\sin x/2 = -$ » $+$ »

» $2\cos x/2 = -$ » $-$ »

$x\varepsilon(8n+5)\pi/2+\Theta\pi \,.\supset.\, 2\sin x/2 = -$ » $-$ »

» $2\cos x/2 = -$ » $+$ »

$x\varepsilon q \,.\supset.$

$2\sin x/2 =$

$[(-1)^{E\{x/(2\pi)+/4\}}]\sqrt{(1+\sin x)}-[(-1)^{E(x/(2\pi)+3/4)}]\sqrt{(1-\sin x)}$

$2\cos x/2 =$ » $+$ »

$x,y\varepsilon q \,.\supset.$

·32 $2\sin x\cos y = \sin(x+y)+\sin(x-y)$

$2\sin x\sin y = \cos(x-y)-\cos(x+y)$

$2\cos x\cos y = \cos(x+y)+\cos(x-y)$

·33 $\sin x+\sin y = 2\sin(x+y)/2\ \cos(x-y)/2$

$\cos x+\cos y = 2\cos(x+y)/2\ \cos(x-y)/2$

$\cos x-\cos y = 2\sin(x+y)/2\ \sin(-x+y)/2$

·34 $x,y,m\varepsilon q \,.\supset.$

$\sin(x+my) = 2\cos y\sin[x+(m-1)y]-\sin[x+(m-2)y]$

$\cos(x+my) = 2\cos y\cos[x+(m-1)y]-\cos[x+(m-2)y]$

·35 $x,y\varepsilon q \,.\, y=\varepsilon\, 2n\pi \,.\, m\varepsilon N_0 \,.\supset.$

$\Sigma[\sin(x+2ry)|r,0\cdots m] = \sin(x+my)\sin(m+1)y\,/\,\sin y$

$\Sigma[\cos(x+2ry)|r,0\cdots m] = \cos(x+my)\sin(m+1)y\,/\,\sin y$

·36 $m\varepsilon N_1 \,.\, x\varepsilon q=n\pi \,.\supset.$

$2\Sigma[\sin rx)^2|r,1\cdots m] = m-\cos(m+1)x\sin mx\,/\,\sin x$

$2\Sigma[(\cos rx)^2|r,1\cdots m] = m-1+\cos mx\sin(m+1)x\,/\,\sin x$

$x,y,z\varepsilon q \,.\supset.$

·37 $[\sin(x+y)]^2+[\sin(x-y)]^2 = 1-\cos 2x\cos 2y$

» — » $= \sin 2x\sin 2y$

·38 $(\sin x)^2+(\sin y)^2-[\sin(x+y)]^2 = -2\sin x\sin y\cos(x+y)$

» » — $+$ » —

.39 $[\cos(x+y)]^2+[\cos(x-y)]^2 = 1+\cos 2x\cos 2y$

» — » $= -\sin 2x\sin 2y$

·40 $\sin(x+y+z) = \sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z +$
$\cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z$

$\cos(x+y+z) = \cos x \cos y \cos z - \sin x \sin y \cos z +$
$\sin x \cos y \sin z - \cos x \sin y \sin z$

·41 $\sin x+\sin y+\sin z =$
$\sin(x+y+z) + 4 \sin (x+y)/2 \sin (x+z/2 \sin(y+z) 2$

$\sin x+\sin y-\sin z =$
$-\sin(x+y+z) + 4 \sin (x+y)/2 \cos (x+z)/2 \cos(y+z)/2$

·42 $\cos x+\cos y+\cos z =$
$-\cos(a+y+z) + 4 \cos (x+y)/2 \cos (x+z)/2 \cos (y+z/2$

$\cos x+\cos y-\cos z =$
$\cos(x+y+z) + 4 \cos (x+y)/2 \sin (x+z)/2 \sin (y+z)/2$

·43 $\sin(x-y)+\sin(x-z)+\sin(y-z) =$
$4 \cos (x-y)/2 \sin (x-z)/2 \cos(y-z)/2$

$[\sin(x-y)]^2+[\sin(x-z)]^2+[\sin(y-z)^2] =$
$2[1-\cos(x-y)\cos(x-z\cos(y-z)]$

$\sin (x+z)/2 \cos (x-z)/2] + \sin(y-z)/2 \cos (y+z)/2] =$
$(\sin x+\sin y)/2$

·44 $\cos(x-y)+\cos(x-z)+\cos(y-z) =$
$-1 + 4 \cos (x-y)/2 \cos(y-z)/2 \cos(x-z)/2$

$\cos(x-y)^2+\cos(x-z)^2+\cos(y-z)^2 =$
$1 + 2 \cos(x-y) \cos(x-z) \cos(y-z)$

·45 $\sin(x+y-z)+\sin(x-y+z)+\sin(-x+y+z)-\sin(x+y+z) =$
$4\sin x\sin y\sin z$

$\cos(x+y-z)+\cos(x-y+z)+\cos(-x+y+z)+\cos(x+y+z) =$
$4\cos x\cos y\cos z$

·46 $1+\cos x+\cos y+\cos z+\cos x\cos y+\cos y\cos z+\cos z\cos x+$
$\cos x\cos y\cos z = 8[\cos(x/2)\cos(y/2)\cos(z/2)]^2$

$1-\cos x^2-\cos y^2-\cos z^2+2\cos x\cos y\cos z = 4 \sin (x+y+z)/2$
$\sin (y+z-x)/2 \sin (z+x-y)/2 \sin (x+y-z)/2$

$1-\cos x^2-\cos y^2-\cos z^2-\cos x\cos y\cos z = - 4 \cos (x+y+z)/2$
$\cos (y+z-x)/2 \cos (z+x-y)/2 \cos (x+y-z)/2$

·50 $x+y+z = \pi$.⊃.
$\sin x+\sin y+\sin z = 4 \cos x/2 \cos y/2 \cos z/2$
$\sin x+\sin y-\sin z = 4\sin x/2\sin y/2\cos z/2$
$\cos x+\cos y+\cos z = 1 + 4\sin x/2 \sin y/2 \sin z/2$

E. Pascal — *Repertorio di matematiche superiori.* II. *Geometria.* Milano, Hoepli, 1900, pag. XVIII+928. Lire 9,50.

— *Die Variations rechnung*, autorisirte deutsche Ausgabe von A. Schepp. Leipzig, Teubner, 1899, pag. VI+146.

E. Picard — *Sur le developpement depuis un siécle de quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique.* (Conférences). Extrait de la Revue Générale des sciences. Paris, A. Colin, 1900, pag. 92.

S. Pincherle — *Geometria metrica e trigonometria.* 5ª ediz. Milano, Hoepli, 1900, pag. 158. Lire 1,50.

P. Poretsky — *Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques.* Kazan, Tip. Univers., 1899, pag. 156+IV.

F. Porta — *I complementi di matematica* per l'ammissione all'Accademia Militare. Torino, Gallizio, pag. 220. Lire 4.

L. Predella — *Aritmetica* ad uso della 2ª e 3ª classe normale. Roma, Paravia, 1899, pag. 92. Lire 1,20.

— *Elementi di Algebra* ad uso della 1ª classe normale. Roma, Paravia, 1899, pag. IV+104. Lire 1,40.

G. Ricci — *Lezioni di Algebra complementare.* Verona, Drucker, 1900, pag. XVII+466. Lire 10.

E. Sadun e C. Soschino — *Lezioni di Aritmetica.* Seconda edizione, Roma, Paravia, 1900, pag. 176, Lire 2,25.

O. Stolz — *Grundzüge der Differential- und Integrelrechnung. Dritter Theil: Die Lehre von den Doppelintegralen.* Leipzig, Teubner, 1899, pag. VIII+296.

F. Virgilii e C. Garibaldi — *Introduzione alla economia matematica.* Milano, Hoepli, 1899, pag. XII+210. Lire 1,50.

Stampato coi tipi della « Rivista di Matematica »
dalla Tip. P. Gerbone - Torino.

Revue de Mathématiques publiée par G. Peano, t. 7, et **Formulaire de Mathématiques** t. 3.

Prix de l'abonnement 10 fr. pour l'Italie, 11 fr. pour l'Union postale.

Tomes 1 à 6 de la *Revue*, 1 et 2 du *Formulaire* fr. 64.

L'adresser aux librairies Frères Bocca, et Ch. Clausen à Turin, ou à l'editeur G. Peano, Via Barbaroux, 6, Torino.

Le Formulaire de Mathématiques publie toutes les propositions mathématiques exprimées entièrement par les symboles idéographiques. La Revue publie les travaux ayant pour but le perfectionnement du Formulaire.

HARVARD COLLEGE LIBRARY
AUG 3 1901
CAMBRIDGE, MASS.
Sci. 895.50

REVUE DE MATHÉMATIQUES

(RIVISTA DI MATEMATICA)

PUBLIÉE PAR

G. PEANO

Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin

TOME VII - N° 2

SOMMAIRE

A. Padoa — *Numeri interi relativi* . . . . . p. 73
International Association for Quaternions . . . . . » 84
Additions et corrections au Formulaire a. 1901, par E. Cantoni, C. Ciamberlini, G. Eneström, A. Padoa, G. Peano, A. Ramorino, O. Stolz, G. Vacca . . . . . » 85
Albino Nagy, Necrologia . . . . . » 111
Recensione — O. Stolz und I. A. Gmeiner, Theoretische Arithmetik (Peano) . . . . . » 112
B. Russel — *Sur la logique des relations* . . . . . » 115

TURIN
BOCCA FRÈRES
LIBRAIRES
—
1901

HARVARD COLLEGE LIBRARY
AUG 3 1901
CAMBRIDGE, MASS.

NUMERI INTERI RELATIVI

per A. PADOA a Roma.

Presento ai lettori della RdM. la trascrizione ideografica di un mio saggio d'una teoria dei *numeri interi relativi* (positivi o negativi), in cui non è presupposta alcuna conoscenza dei *numeri interi assoluti* (positivi) (1).

Le 97 proposizioni sono enunciate e (tranne le proposizioni primitive e le definizioni) dimostrate mediante 9 *simboli logici* (, ε Cls ⊃ = ∃ ∩ ∋ ι) e 9 *simboli algebrici* (n suc sym prec 0 1 + × —) (2); di questi ultimi, i primi 3 sono assunti quali *primitivi* (vedi P 1-7), gli altri 6 sono *definiti* (vedi P 15, 26, 30, 37-39, 58-60, 75) (3).

I simboli « 0 » ed « 1 » conservano qui il loro significato ordinario.

Il simbolo « n » rappresenta qui, come nel *Formulaire*, la classe dei numeri interi relativi; poichè in questo scritto non si considerano altre classi di numeri, può esser letto brevemente « *numero* » (4).

Nell'algebra ordinaria il segno « — » ha due significati diversi, secondochè *precede un numero* ovvero *sta fra due numeri*. Per eliminare tale ambiguità, al segno « — » ho sostituito nel *primo* caso il simbolo « sym » (che si può leggere « *il simmetrico di* »), facendo uso del segno « — » soltanto nel *secondo* caso (5). Il diverso significato dei simboli « sym »

(1) *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque.* Congresso internazionale di Filosofia, Parigi, 3 agosto 1900.

(2) Oltre alle *lettere*, all'*interpunzione logica* ed alle consuete *abbreviazioni* (P Pp Hp Ts Df). Ho trascritto i simboli logici ed algebrici nell'ordine in cui ne ho fatto uso.

(3) Conservo la numerazione delle P, per facilitare un eventuale raffronto con l'originale. (Vedi *Bibl. du Congrès int. de phil.*, t. III, p.309-365, Armand Colin, Paris).

(4) Nell'originale questa idea è invece rappresentata dal simbolo « ent » (*entier*).

(5) Mentre ho assunto vantaggiosamente quale primitivo il simbolo « sym », non sarebbe stato certo opportuno assumere quale primitivo l'ordinario « — »; ciò dimostra l'utilità espositiva della distinzione enunciata.

e « — » è chiarito dalle P 85 e 75, le quali mostrano che tali simboli equivalgono rispettivamente alle scritture « 0 — » e « + sym ».

Nell'algebra ordinaria anche il segno « + » ha due significati diversi, analoghi a quelli ora commentati dell'ordinario segno « — ». Qui è fatto uso del segno « + » soltanto nel *secondo* caso [1].

In attesa d'aver definiti i simboli « + » e « — », ho fatto uso dei simboli « suc » e « prec » (che si possono leggere « *il successivo di* » ed « *il precedente di* »), attribuendo loro tale significato per cui « $a \varepsilon \mathrm{n} . \supset . \mathrm{suc}\, a = a + 1 . \mathrm{prec}\, a = a - 1$ » (Vedi P41 ed 86).

Il simbolo « × » conserva qui il significato ordinario; esso però non è mai sottinteso [2].

*
* *

È chiaro anzitutto che l'*interpretazione* enunciata del *sistema di idee primitive* (n suc sym) verifica il seguente *sistema di proposizioni primitive.*

$a, b, c, d \varepsilon \mathrm{n} . u \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset .\therefore$ [3]

1.	$\mathrm{suc}\, a\ \varepsilon\ \mathrm{n}$	Pp
2.	$\mathrm{sym}\, a\ \varepsilon\ \mathrm{n}$	Pp
3.	$\mathrm{sym}(\mathrm{sym}\, a) = a$	Pp
4.	$\mathrm{sym}\{\mathrm{suc}[\mathrm{sym}(\mathrm{suc}\, a)]\} = a$	Pp
5.	$\exists \mathrm{n} \frown x \ni (\mathrm{sym}\, x = x)$	Pp
6.	$\mathrm{sym}\, a = a . \mathrm{sym}\, b = b . \supset . a = b$	Pp
7.	$\exists \mathrm{n} \frown u : x \varepsilon\ \mathrm{n} \frown u . \supset x . \mathrm{suc}\, x\ \varepsilon u : y \varepsilon \mathrm{n} . \mathrm{suc}\, y\ \varepsilon u . \supset y . y \varepsilon u : \supset . \mathrm{n} \supset u$	Pp

*
* *

Il sistema di proposizioni primitive è irriducibile; in altri termini, le enunciate Pp sono assolutamente indipendenti; il

---

(1) Conseguentemente, qui non avrebbe senso la P « $a \varepsilon \mathrm{n} . \supset . a = +a$ », di cui è fatto uso esplicito o tacito nei comuni trattati.

(2) La convenzione comunemente espressa dalla P « $a, b \varepsilon \mathrm{n} . \supset . ab = a \times b$ », non mi sembra logicamente accettabile, perchè in disaccordo con la convenzione relativa alla rappresentazione dei numeri con cifre; invero, ad esempio, poichè « $2, 3 \varepsilon \mathrm{n}$ », dovrebb'essere « $23 = 2 \times 3$ ».

Nell'originale invece del simbolo « × » ho usato il simbolo « . », che qui abbandono per poter adoperare senza ambiguità l'interpunzione logica.

(3) Questa Hp si riferisce a tutte le P enunciate in questo scritto.

che significa: non è possibile dedurne alcuna dalle altre (precedenti o seguenti).

È noto che per dimostrare l'irriducibilità di un sistema di proposizioni primitive è necessario e sufficiente trovare, per ciascuna Pp, una interpretazione del sistema di idee primitive la quale verifichi tutte le Pp tranne quella considerata [1].

Ciascuna delle seguenti interpretazioni verifica tutte le Pp, tranne quella il cui numero d'ordine è eguale a quello dell'interpretazione stessa [2].

$b\varepsilon - \iota a \,.\, c\varepsilon - (\iota a \smile \iota b) \,.\, d\varepsilon - (\iota a \smile \iota b \smile \iota c) \,.\, e\varepsilon - (\iota a \smile \iota b \smile \iota c \smile \iota d) \,.\supset.$ [3]

1) $\mathrm{n} = \iota a$
$\mathrm{suc}\,a = b \,.\, \mathrm{suc}\,b = a$
$\mathrm{sym}\,a = a \,.\, \mathrm{sym}\,b = b$

2) $\mathrm{n} =$ « numero intero assoluto, 0 incluso »
$x\varepsilon\mathrm{n} \,.\supset_x.\, \mathrm{suc}\,x = x+1$
$\mathrm{sym}\,x = -x$

3) $\mathrm{n} = \iota a \smile \iota b \smile \iota c \smile \iota d$
$\mathrm{suc}\,a = b \,.\, \mathrm{suc}\,b = c \,.\, \mathrm{suc}\,c = d \,.\, \mathrm{suc}\,d = a$
$\mathrm{sym}\,a = a \,.\, \mathrm{sym}\,b = d \,.\, \mathrm{sym}\,c = b \,.\, \mathrm{sym}\,d = c$

4) $\mathrm{n} = \iota a \smile \iota b \smile \iota c \smile \iota d \smile \iota e$
$\mathrm{suc}\,a = b \,.\, \mathrm{suc}\,b = c \,.\, \mathrm{suc}\,c = d \,.\, \mathrm{suc}\,d = e \,.\, \mathrm{suc}\,e = a$
$\mathrm{sym}\,a = a \,.\, \mathrm{sym}\,b = d \,.\, \mathrm{sym}\,c = e \,.\, \mathrm{sym}\,d = b \,.\, \mathrm{sym}\,e = c$

5) $\mathrm{n} = \iota a \smile \iota b$
$\mathrm{suc}\,a = b \,.\, \mathrm{suc}\,b = a$
$\mathrm{sym}\,a = b \,.\, \mathrm{sym}\,b = a$

6) $\mathrm{n} = \iota a \smile \iota b$
$\mathrm{suc}\,a = b \,.\, \mathrm{suc}\,b = a$
$\mathrm{sym}\,a = a \,.\, \mathrm{sym}\,b = b$

7) $\mathrm{n} = \iota a \smile \iota b \smile \iota c$
$\mathrm{suc}\,a = a \,.\, \mathrm{suc}\,b = c \,.\, \mathrm{suc}\,c = b$
$\mathrm{sym}\,a = a \,.\, \mathrm{sym}\,b = c \,.\, \mathrm{sym}\,c = b$

*
* *

Il sistema di idee primitive è irriducibile, rispetto al sistema di proposizioni primitive; il che significa: non è possibile de-

(1) Vedi nell'originale il § 17.

(2) Vedi nell'originale il § 58.

(3) Cioè: « se a, b, c, d, e sono oggetti qualunque, purchè a due a due distinti (non eguali, logicamente) ».

durre dalle Pp alcuna P che definisca nominalmente una delle idee primitive mediante le altre.

Per dimostrare l'irriducibilità di un sistema di idee primitive, rispetto ad un sistema di Pp, è necessario e sufficiente trovare, per ciascuna idea primitiva, una interpretazione del sistema di idee primitive la quale verifichi tutte le Pp, e continui a verificarle tutte, cambiando opportunamente il significato della sola idea primitiva considerata [1].

L'interpretazione

$b\varepsilon \backsimeq \iota a \,.\, c\varepsilon \backsimeq (\iota a \cup \iota b) \,.\, e\varepsilon \backsimeq \iota d \,.\, f\varepsilon \backsimeq (\iota d \cup \iota e) \,.\supset.$

$\mathrm{n} = \iota a \cup \iota b \cup \iota c$

$\mathrm{suc}a = b \,.\, \mathrm{suc}b = c \,.\, \mathrm{suc}c = a \,.\, \mathrm{suc}d = e \,.\, \mathrm{suc}e = f \,.\, \mathrm{suc}f = d$

$\mathrm{sym}a = a \,.\, \mathrm{sym}b = c \,.\, \mathrm{sym}c = b \,.\, \mathrm{sym}d = d \,.\, \mathrm{sym}e = f \,.\, \mathrm{sym}f = e$

verifica tutte le Pp e continua a verificarle tutte se, invece,

$\mathrm{n} = \iota d \cup \iota e \cup \iota f$

ed anche se, invece,

$\mathrm{suc}a = c \,.\, \mathrm{suc}b = a \,.\, \mathrm{suc}c = b$

ed anche se, invece,

$\mathrm{sym}a = b \,.\, \mathrm{sym}b = a \,.\, \mathrm{sym}c = c$ [2].

*
* *

Dalle Pp 1-7 si deduce

8. $\mathrm{sym}a = \mathrm{sym}b \,.\supset.\, a = b$

[Hp $.\supset.$ $\mathrm{sym}(\mathrm{sym}a) = \mathrm{sym}(\mathrm{sym}b)$. P3 $.\supset.$ Ts]

9. $\mathrm{sym}a = x \,.\supset.\, a = \mathrm{sym}x$

[Hp $.\supset.$ $\mathrm{sym}(\mathrm{sym}a) = \mathrm{sym}x$. P3 $.\supset.$ Ts]

10. $\mathrm{suc}[\mathrm{sym}(\mathrm{suc}a)] = \mathrm{sym}a$

[P1.2 $.\supset.$ $\mathrm{suc}[\mathrm{sym}(\mathrm{suc}a)]\ \varepsilon\,\mathrm{n}$ .P4.9 $.\supset.$ P]

11. $\mathrm{suc}\{\mathrm{sym}[\mathrm{suc}(\mathrm{sym}a)]\} = a$

[P2 . $(\mathrm{sym}a|a)$P10 . P3 $.\supset.$ P]

12. $\mathrm{suc}a = \mathrm{suc}b \,.\supset.\, a = b$

[Hp $.\supset.$ $\mathrm{sym}\{\mathrm{suc}[\mathrm{sym}(\mathrm{suc}a)]\} = \mathrm{sym}\{\mathrm{suc}[\mathrm{sym}(\mathrm{suc}b)]\}$. P4 $.\supset.$ Ts]

13. $\exists\mathrm{n} \cap x \ni (\mathrm{suc}x = a)$

[$x = \mathrm{sym}[\mathrm{suc}(\mathrm{sym}a)]$ $.\supset:$ (1)-(3)

P1.2 $.\supset.$ $x\varepsilon\mathrm{n}$ (1)

$\mathrm{suc}x = \mathrm{suc}\{\mathrm{sym}[\mathrm{suc}(\mathrm{sym}a)]\}$ (2)

(2). P11 $.\supset.$ $\mathrm{suc}x = a$ (3)

(1) . (3) $.\supset.$ P]

14. $\mathrm{suc}b = a \,.\, \mathrm{suc}c = a \,.\supset.\, b = c$

[Hp $.\supset.$ $\mathrm{suc}b = \mathrm{suc}c$. P12 $.\supset.$ Ts]

---

[1] Vedi nell'originale il § 16.

[2] Vedi nell'originale il § 57.

*
* *

Poichè, qualunque sia il numero a, esiste uno ed un solo numero il cui successivo è eguale ad a (vedi P13 e 14), si può convenire di rappresentare questo numero con una speciale notazione, ad es. « prec$a$ »; in altri termini, le P13 e 14 giustificano la Df

15. prec$a$ $=\iota$ [n $\cap$ $x\ni$(suc$x$ $=a$)] Df

Da quanto precede si deduce:

16. prec$a$ εn [P15 .$\supset$. P]
17. x=prec$a$.$\supset$. suc$x$=a [»]
18. suc$b$=a .$\supset$. b=prec$a$ [»]
19. suc(prec$a$) =a [(prec$a$ | x) P17 .$\supset$. P]
20. prec(suc$a$) =a [P1 . (suc$a$,a) | (a,b) P18 .$\supset$. P]
21. prec$a$=prec$b$.$\supset$. a=b
[Hp .$\supset$. suc(prec$a$) = suc(prec$b$) . P19 .$\supset$. P]
22. sym(suc$a$) = prec(sym$a$)
[x=sym$a$. y= sym(suc$a$) . P1.2.10 .$\supset$. x,$y\varepsilon$n . suc$y$ =x . P18 .$\supset$. y= prec$x$.$\supset$. P]
23. sym(prec$a$) = suc(sym$a$)
[P16 . (prec$a$|a) P10 . P19 .$\supset$. P]
24. sym[suc(sym$a$)] = prec$a$
[x= sym[suc(sym$a$)] . P1.2.11 .$\supset$. $x\varepsilon$n . suc$x$ =a . P18 .$\supset$. x= prec$a$.$\supset$. P].
25. sym[prec(sym$a$)] = suc$a$
[P2 . (sym$a$|a) P23 . P3 .$\supset$. P]

*
* *

Poichè esiste uno ed un solo numero eguale al proprio simmetrico (vedi P5 e 6), si può convenire di rappresentare questo numero con un simbolo speciale, ad es. « 0 »; in altri termini, le P5 e 6 giustificano la Df

26. 0= ι [n $\cap$ $x\ni$(sym$x$=x)] Df

dalla quale si deduce:

27. 0εn [P26 .$\supset$. P]
28. sym0 = 0 [»]
29. sym$a$ =a .$\supset$. a=0 [»]

Definito così il simbolo « 0 », si può definire il simbolo « 1 »:

30. 1= suc0 Df

ed analogamente si potrebbero definire successivamente i simboli 2, 3, ...

Da quanto precede si deduce:

31. $1 \varepsilon n$ [P27 . 1 .⊃. suc0εn . P30 .⊃. P]

32. sym1=prec0

[P30 .⊃. sym1 = sym(suc0) . P27.22 .⊃. sym1=prec(sym0) . P28 .⊃. P]

33. sym1 εn [P31.2 .⊃. P]

*
* *

Da quanto precede si deducono le P34, 35, 36, le quali esprimono *tre forme della legge di induzione, estesa al campo dei numeri interi relativi.*

34. $0 \varepsilon u : x \varepsilon n \cap u .\supset_x . \mathrm{suc}x, \mathrm{prec}x\ \varepsilon u :\supset . n \supset u$

[Hp . P27 .⊃. $0 \varepsilon n \cap u$.⊃. $\exists$ $n \cap u$ (1)

Hp .⊃; $x \varepsilon n \cap u .\supset_x . \mathrm{suc}x \varepsilon u$ (2)

$y \varepsilon n . \mathrm{suc}y \varepsilon u$. P1 $.\supset_y . \mathrm{suc}y \varepsilon n \cap u$. Hp $.\supset_y . \mathrm{prec}(\mathrm{suc}y) \varepsilon u$. P20 $.\supset_y . y \varepsilon u$ (3)

Hp . (1).(2).(3) . P7 .⊃. Ts]

35. $0 \varepsilon u : x \varepsilon n \cap u .\supset_x . \mathrm{suc}x, \mathrm{sym}x \varepsilon u :\supset . n \supset u$

[$x \varepsilon n \cap u$. P2 . Hp $.\supset_x . \mathrm{sym}x \varepsilon n \cap u$. P1 . Hp $.\supset_x . \mathrm{suc}(\mathrm{sym}x) \varepsilon n \cap u$. Hp $.\supset_x .$
$\mathrm{sym}[\mathrm{suc}(\mathrm{sym}x)] \varepsilon u$. P24 $.\supset_x . \mathrm{prec}x \varepsilon u$ (1)

Hp . (1) . P34 .⊃. Ts]

36. $0 \varepsilon u : x \varepsilon n \cap u .\supset_x . \mathrm{prec}x, \mathrm{sym}x \varepsilon u :\supset . n \supset u$

[$x \varepsilon n \cap u$. P2.Hp $.\supset_x . \mathrm{sym}x \varepsilon n \cap u$. P1.6Hp $.\supset_x .$
$\mathrm{prec}(\mathrm{sym}x)\ \varepsilon n \cap u$. Hp $.\supset_x . \mathrm{sym}[\mathrm{prec}(\mathrm{sym}x)] \varepsilon u$. P25 $.\supset_x . \mathrm{suc}x \varepsilon u$ (1)

[Hp.(1) . P34 .⊃. Ts]

*
* *

Ed ora, mediante le P

37. $a+0 = a$
38. $a+ \mathrm{suc}b = \mathrm{suc}(a+b)$ } Df
39. $a+\mathrm{prec}b = \mathrm{prec}(a+b)$

si può definire la notazione « $a + x$ », dove anche x è un « n » qualunque; e precisamente: con la P37, nel caso in cui $x=0$; con la P38, in virtù della P37, nel caso in cui $x>0$; con la P39, in virtù della P37, nel caso in cui $x<0$.

Da quanto precede si deduce:

40. $(a+b)\ \varepsilon n$

[$x, (a+x)\ \varepsilon n$. P1 . 16 $.\supset_x . x, \mathrm{suc}(a+x), \mathrm{prec}(a+x)\ \varepsilon n$. P38.39. $\supset_x .$
$(a+\mathrm{suc}x), (a+\mathrm{prec}x)\ \varepsilon n$ (1)

$u = x \ni [(a+x\ \varepsilon n]$.⊃: (2)-(4)

P37 .⊃. $0 \varepsilon u$ (2)

$x \varepsilon n \cap u$. (1) $.\supset_x . \mathrm{suc}x, \mathrm{prec}\ x\ \varepsilon u$ (3)

(2) . (3) . P34 .⊃. $n \supset u$ (4)

Hp .⊃. $b \varepsilon n$. (4) .⊃. P]

41. $a+1 = \mathrm{suc}a$

[P30 .⊃. $a+1 = a+ \mathrm{suc}0$. P27.38 .⊃. $a+1 = \mathrm{suc}(a+0)$. P37 .⊃. P]

42. $a+\mathrm{sym1} = \mathrm{prec}a$

[P32 .ɔ. $a+\mathrm{sym1} = a+\mathrm{prec}0$. P27 . 39 .ɔ. $a+\mathrm{sym1} = \mathrm{prec}(a+0)$. P37 .ɔ. P]

43. $a+c = b+c \,.\supset.\, a=b$

[$x\varepsilon\mathrm{n}$. P40 $.\supset_x.$ $(a+x), (b+x)\ \varepsilon\mathrm{n}$ (1)

$x\varepsilon\mathrm{n}$. $a+\mathrm{suc}x = b+\mathrm{suc}x$. P38 $.\supset_x.$

$\mathrm{suc}(a+x) = \mathrm{suc}(b+x)$. (1) . P12 $.\supset_x. a+x = b+x$ (2)

$x\varepsilon\mathrm{n}$. $a+\mathrm{prec}x = b+\mathrm{prec}x$. P39 $.\supset_x.$

$\mathrm{prec}(a+x) = \mathrm{prec}(b+x)$. (1) . P21 $.\supset_x$. $a+x = b+x$ (3)

$u = x\ni(a+x = b+x \,.\supset_x.\, a=b) \,.\supset:$ (4)-(6)

P37 $.\supset.$ $0\varepsilon u$ (4)

$x\varepsilon\ \mathrm{n}\frown u$. (2) . (3) $.\supset_x.$ $\mathrm{suc}x, \mathrm{prec}x\ \varepsilon u$ (5)

(4) . (5) . P34 $.\supset.$ $\mathrm{n}\supset u$ (6)

Hp $.\supset.$ $c\varepsilon\mathrm{n}$. (6) $.\supset.$ P]

44. $c=d \,.\, a+c = b+d \,.\supset.\, a=b$

[Hp $.\supset.$ $d=c \,.\supset.\, a+d = a+c$. Hp $.\supset.$ $a+d = b+d$. P43 $.\supset.$ Ts]

45. $(a+b)+c = a+(b+c)$

[P40 . P37 $.\supset.$ $(a+b)+0 = a+b$ (1)

P37 $.\supset.$ $b+0=b \,.\supset.\, a+(b+0) = a+b$ (2)

$x\varepsilon\mathrm{n}$. P38 . 39 . 40 $.\supset_x.$ (3)-(6)

$(a+b) + \mathrm{suc}x = \mathrm{suc}\,[(a+b)+x\ ]$ (3)

$\mathrm{suc}\,[a+(b+x)] = a+\mathrm{suc}\,(b+x) = a+(b+\mathrm{suc}x)$ (4)

$(a+b)+\mathrm{prec}x = \mathrm{prec}\,[\,(a+b)+x\,]$ (5)

$\mathrm{prec}\,[a+(b+x)] = a+\mathrm{prec}\,(a+x) = a+\,(b+\mathrm{prec}x)$ (6)

$u=x\ni[(a+b)+x = a+(b+x)] \,.\supset:$ (7)-(10)

(1) . (2) $.\supset.$ $0\varepsilon u$ (7)

$x\varepsilon\ \mathrm{n}\frown u$. (3) . (4) $.\supset_x.$ $\mathrm{s}\ \mathrm{uc}x\varepsilon u$ (8)

$x\varepsilon\ \mathrm{n}\frown u$. (5) . (6) . $\supset_x.$ $\mathrm{prec}x\ \varepsilon u$ (9)

(7) . (8) . (9) . P34 $.\supset.$ $\mathrm{n}\supset u$ (10)

Hp $.\supset.$ $c\varepsilon\mathrm{n}$. (10) $.\supset.$ P]

46. $1+a = \mathrm{suc}a$

[$u = x\ni(1+x = \mathrm{suc}x) \,.\supset:$ (1)-(4)

P31 . 37 $.\supset.$ $1+0 = 1$. P30 $.\supset.$ $0\varepsilon u$ (1)

$x\varepsilon\ \mathrm{n}\frown u$. P31 . 38 $.\supset_x.$ $1+\mathrm{suc}x = \mathrm{suc}(1+x) = \mathrm{suc}(\mathrm{suc}x) \,.\supset_x.$ $\mathrm{suc}x\ \varepsilon u$ (2)

$x\varepsilon\ \mathrm{n}\frown u$. P31 . 39 $.\supset_x.$ $1+\mathrm{prec}x = \mathrm{prec}(1+x) = \mathrm{prec}(\mathrm{suc}x)$. P20 . 19 $.\supset_x.$

$1+\mathrm{prec}x = \mathrm{suc}(\mathrm{prec}x) \,.\supset_x.$ $\mathrm{prec}x\ \varepsilon u$ (3)

(1) . (2) . (3) . P34 $.\supset.$ $\mathrm{n}\supset u$ (4)

Hp $.\supset.$ $a\varepsilon\mathrm{n}$. (4) $.\supset.$ P]

47. $(\mathrm{suc}a)+b = \mathrm{suc}(a+b)$

[P41 . P31 . 45 . 46 . 38 $.\supset.$

$(\mathrm{suc}a)+b = (a+1)+b = a+\,(1+b) = a+\mathrm{suc}b = \mathrm{suc}(a+b)$]

48. $(\mathrm{prec}a)+b = \mathrm{prec}(a+b)$

[P16 . $(\mathrm{prec}a\ |a)$ P47 . P19 $.\supset.$ $a+b = \mathrm{suc}\,[(\mathrm{prec}a)+b]$ (1)

$x = a+b$. $y = (\mathrm{prec}a)+b$. P40 . 16 . (1) $.\supset.$

$x,y\varepsilon\mathrm{n}$. $\mathrm{suc}y = x$. P18 $.\supset.$ $y = \mathrm{prec}x$ $.\supset.$ P]

49. $0+a=a$

[P27 . 31 . 30 . 18 .⊃. $0=\text{prec}1$.⊃. $0+a=(\text{prec}1)+a$. P31 . 48 .⊃.
$0+a=\text{prec}(1+a)$. P46 .⊃. $0+a=\text{prec}(\text{suc}a)$. P20 .⊃. P]

50. $a+b=b+a$

[$u=x\varepsilon(a+x=x+a)$.⊃:
P37 . 49 .⊃. $0\varepsilon u$ (1)
$x\varepsilon\, \text{n}\sim u$.⊃$_x$. $\text{suc}(a+x)=\text{suc}(x+a)$. P38 . 47 .⊃$_x$.
$a+\text{suc}x=(\text{suc}x)+a$.⊃$_x$. $\text{suc}x\ \varepsilon u$ (2)
$x\varepsilon\, \text{n}\sim u$.⊃$_x$. $\text{prec}(a+x)=\text{prec}(x+a)$. P39 . 48 .⊃$_x$.
$a+\text{prec}x=(\text{prec}x)+a$.⊃$_x$. $\text{prec}x\ \varepsilon u$ (3)
(1) . (2) . (3) . P34 .⊃. n⊃u (4)
Hp .⊃. $b\varepsilon$n . (4) .⊃. P]

51. $a+\text{sym}b=\text{sym}\,[(\text{sym}a)+b]$

[P28 . 37 .⊃. $a+\text{sym}0=a+0=a$ (1)
P2 . 37 .⊃. $\text{sym}a=(\text{sym}a)+0$. P9 .⊃. $a=\text{sym}\,[(\text{sym}a)+0]$ (2)
$u=x\varepsilon\ \{a+\text{sym}x=\text{sym}\,[(\text{sim}a)+x]\}$.⊃:
(1) . (2) .⊃. $0\varepsilon u$ (3)
$x\varepsilon\, \text{n}\sim u$.⊃$_x$. $\text{prec}(a+\text{sym}x)=\text{prec}\,\{\text{sym}[(\text{sym}a)+x]\}$. P2 . 39 .⊃$_x$.
$a+\text{prec}\,(\text{sym}x)=$ . . . . . P2 . 40 . 22 .⊃$_x$.
$a+\text{sym}\,(\text{suc}x)=\text{sym}\,\{\text{suc}\,[(\text{sym}a)+x]\}$. P2 . 38 .⊃$_x$.
. . . . . $=\text{sym}\,[(\text{sym}a)+(\text{suc}x)]$.⊃$_x$. $\text{suc}\ x\ \varepsilon u$ (4)
$x\varepsilon\, \text{n}\sim u$. [(prec suc, P38 . 23 . 39)|(suc, prec, P39 . 22 . 38)] (4) . ⊃$_x$. $\text{prec}x\ \varepsilon u$ (5)
(3) . (4) . (5) . P34 .⊃. n⊃u (6)
Hp .⊃. $b\varepsilon$n. (6) .⊃. P]

52. $\text{sym}a+\text{sym}b=\text{sym}(a+b)$

[P2 . ($\text{sym}a|a$) P51 . P3 .⊃. P]

53. $a+\text{sym}a=0$

[$x=a+\text{sym}a$. P2 . 40 .⊃. $x\varepsilon$n . P 51 .⊃. $x=\text{sym}\,[(\text{sym}a)+a]$. P2 . 50
⊃. $x=\text{sym}x$. P29 .⊃. $x=0$:⊃. P]

54. $(\text{sym}a)+a=0$

[P2 . 40 . 53 .⊃. P]

55. $a+b=0$.⊃. $b=\text{sym}a$

[P50 .⊃. $b+a=0$. P54 .⊃. $b+a=(\text{sym}a)+a$. P2 . 43 .⊃. Ts]

56. $(a+b)+c=(a+c)+b$

[P45 . 50 .⊃. $(a+b)+c=a+(b+c)=a+(c+b)=(a+c)+b$]

57. $(a+b)+(c+d)=(a+c)+(b+d)$

[P40 . 45 . 56 .⊃. $(a+b)+(c+d)=[(a+b)+c]+d=$
$[(a+c)+b]+d=(a+c)+(b+d)$]

*
* *

Ora mediante le P

58. $a\times 0=0$
59. $a\times\text{suc}b=a\times b+a$ | Df
60. $a\times\text{prec}b=a\times b+\text{sym}a$

si può definire la notazione « $a \times x$ », dove anche x è un « n » qualunque; e precisamente: con la P58, nel caso in cui $x=0$; con la P59, in virtù della P58, nel caso in cui $x>0$; e con la P60, in virtù della P58, nel caso in cui $x<0$.

Da quanto precede si deduce:

61. $(a \times b)\ \varepsilon \mathrm{n}$

[$u = x \varepsilon [(a \times x) \varepsilon \mathrm{n}] .\supset: (1)\text{-}(4)$

P27 . 58 $.\supset.\ 0 \varepsilon u$ (1)

$x \varepsilon \mathrm{n} \frown u$. P40 $.\supset_x.\ (a \times x + a)\ \varepsilon \mathrm{n}$. P59 $.\supset_x.\ \mathrm{suc}x\ \varepsilon u$ (2)

. . . . P2 . 40 $.\supset_x.\ (a \times x + \mathrm{sym}a)\ \varepsilon \mathrm{n}$. P60 $.\supset_x.\ \mathrm{prec}x\ \varepsilon u$ (3)

(1) . (2) . (3) . P34 $.\supset.\ \mathrm{n} \supset u$ (4)

Hp $.\supset.\ b \varepsilon \mathrm{n}$. (4) $.\supset.$ P]

62. $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

[P40 . 58 $.\supset.\ (a+b) \times 0 = 0$ (1)

P58 . 27 . 37 $.\supset.\ a \times 0 + b \times 0 = 0 + 0 = 0$ (2)

$x \varepsilon \mathrm{n}$. P40 . 59 $.\supset_x.\ (a+b) \times \mathrm{suc}x = (a+b) \times x + (a+b)$ (3)

$x \varepsilon \mathrm{n}$. P61 . 57 . 59 $.\supset_x.\ (a \times x + b \times x) + (a+b) =$
$(a \times x + a) + (b \times x + b) = a \times \mathrm{suc}x + b \times \mathrm{suc}x$ (4)

$x \varepsilon \mathrm{n}$. P40 . 60 . 52 $.\supset_x.\ (a+b) \times \mathrm{prec}x = (a+b) \times x + \mathrm{sym}\ (a+b) =$
$(a+b) \times x + (\mathrm{sym}a + \mathrm{sym}b)$ (5)

$x \varepsilon \mathrm{n}$. P61 . 2 . 57 . 60 $.\supset_x.\ (a \times x + b \times x) + (\mathrm{sym}a + \mathrm{sym}b) =$
$(a \times x + \mathrm{sym}a) + (b \times x + \mathrm{sym}b) = a \times \mathrm{prec}x + b \times \mathrm{prec}x$ (6)

$u = x \varepsilon [(a+b) \times x = a \times x + b \times x] .\supset: (7)\text{-}10$

(1) . (2) $.\supset.\ 0 \varepsilon u$ (7)

(3) . (4) $.\supset.\ \mathrm{suc}x\ \varepsilon u$ (8)

(5) . (6) $.\supset.\ \mathrm{prec}x\ \varepsilon u$ (9)

(7) . (8) . (9) . P34 $.\supset.\ \mathrm{n} \supset u$ (10)

Hp $.\supset.\ c \varepsilon \mathrm{n}$. (10) $.\supset.$ P]

63. $0 \times a = 0$

[$x \varepsilon \mathrm{n}$. P27 . 62 . 49 $.\supset_x.\ 0 \times a + x \times a = (0+x) \times a = x \times a$ (1)

$x \varepsilon \mathrm{n}$. P61 . 49 $.\supset_x.\ 0 + x \times a = x \times a$ (2)

$x \varepsilon \mathrm{n}$. (1) . (2) $.\supset_x.\ 0 \times a + x \times a = 0 + x \times a$ (3)

P27 . 61 . 43 $.\supset.$ P]

64. $a \times 1 = a$

[P30 . 27 . 59 . 58 . 49 $.\supset.\ a \times 1 = a \times \mathrm{suc}0 = a \times 0 + a = 0 + a = a$]

65. $1 \times a = a$

[$u = x \varepsilon (1 \times x = x) .\supset: (1)\text{-}(4)$

P31 . 58 $.\supset.\ 0 \varepsilon u$ (1)

$x \varepsilon \mathrm{n} \frown u$. P31 . 59 . 41 $.\supset_x.\ 1 \times \mathrm{suc}x = 1 \times x + 1 = x + 1 = \mathrm{suc}x .\supset_x.$
$\mathrm{suc}x\ \varepsilon u$ (2)

$x \varepsilon \mathrm{n} \frown u$. P31 . 60 . 42 $.\supset_x.\ 1 \times \mathrm{prec}x = 1 \times x + \mathrm{sym}1 = x + \mathrm{sym}1 =$
$\mathrm{prec}x .\supset_x. \mathrm{prec}x\ \varepsilon u$ (3)

(1) . (2) . (3) . P34 $.\supset.\ \mathrm{n} \supset u$ (4)

Hp $.\supset.\ a \varepsilon \mathrm{n}$. (4) $.\supset.$ P]

66. $(\mathrm{sym}a)\times b = \mathrm{sym}(a\times b)$

[P2 . 62 . 53 . 63 .⊃. $a\times b+(\mathrm{sym}a)\times b = (a+\mathrm{sym}a)\times b = 0\times b = 0$ (1)
P2 . 61 . (1) . P55 .⊃. P]

67. $a\times\mathrm{sym}1 = \mathrm{sym}a$

[P32 . 27 . 60 . 58 . 2 . 49 .⊃. $a\times\mathrm{sym}1 =$
$a\times\mathrm{prec}0 = a\times 0+\mathrm{sym}a = 0+\mathrm{sym}a = \mathrm{sym}a$]

68. $(\mathrm{sym}1)\times a = \mathrm{sym}a$

[P31 . 66 . 65 .⊃. $(\mathrm{sym}1)\times a = \mathrm{sym}\,(1+a) = \mathrm{sym}a$]

69. $a\times b = b\times a$

[$u = x\varepsilon\,(a\times x = x\times a)$.⊃: (1)-(5)
P58 . 63 .⊃. $0\varepsilon u$ (1)
$x\varepsilon$ n∩u . P59 . 65 . 31 . 62 . 41 . .⊃$_x$.
$a\times\mathrm{suc}x = a\times x+a = x\times a+a = x\times a+1\times a = (x+1)\times a = (\mathrm{suc}x)\times a$ (2)
$x\varepsilon$ n∩u . P60 . 68 . 33 . 62 . 42 .⊃$_x$.
$a\times\mathrm{prec}x = a\times x+\mathrm{sym}a = x\times a+\mathrm{sym}a = x\times a+(\mathrm{sym}1)\times a =$
$(x+\mathrm{sym}1)\times a = (\mathrm{prec}x)\times a$ (3)
$x\varepsilon$ n∩u . (2) . (3) .⊃$_x$. $\mathrm{suc}x$, $\mathrm{prec}x\ \varepsilon u$ (4)
(1) . (4) . P34 ⊃. n⊃u (5)
Hp .⊃. $b\varepsilon$n . (5) .⊃. P]

70. $a\times\mathrm{sym}b = \mathrm{sym}(a\times b)$

[P2 . 69 . 66 . 69 .⊃. $a\times\mathrm{sym}b = (\mathrm{sym}b)\times a = \mathrm{sym}\,(b\times a) = \mathrm{sym}\,(a\times b)$]

71. $(\mathrm{sym}a)\times(\mathrm{sym}a) = a\times b$

[P2. $(\mathrm{sym}b|b)$ P66 . P70 . 61 . 3 .⊃.
$(\mathrm{sym}a)\times(\mathrm{sym}b) = \mathrm{sym}(a\times\mathrm{sym}b) = \mathrm{sym}\,[\mathrm{sym}(a\times b)] = a\times b$]

72. $c\times(a+b) = c\times a+c\times b$

[P40 . 69 . 62 . 69.⊃. P]

73. $(a+b)\times(c+d) = (a\times c+a\times d)+(b\times c+b\times d)$

[P40 . 62 . 72 .⊃. P]

74. $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$

[$u = x\varepsilon\,[(a\times b)\times x = a\times(b\times x)]$.⊃: (1)-(4)
P61 . 58 .⊃. $(a\times b)\times 0 = 0$. $a\times(b\times 0) = a\times 0 = 0$.⊃. $0\varepsilon u$ (1)
$x\varepsilon$ n∩u . P61 . 59 . 72 . 59.⊃$_x$. $(a\times b)\times\mathrm{suc}x = (a\times b)\times x + a\times b =$
$a\times(b\times x) + a\times b = a\times\,[b\times x+b] = a\times(b\times\mathrm{suc}x)$.⊃$_x$. $\mathrm{suc}x\ \varepsilon u$ (2)
$x\varepsilon$ n∩u . P61 · 70 .⊃$_x$. $(a\times b)\times\mathrm{sym}x = \mathrm{sym}\,[(a\times b)\times x] =$
$\mathrm{sym}\,[a\times(b\times x)] = a\times\mathrm{sym}\,(b\times x) = a\times\,(b\times\mathrm{sym}x)$.⊃$_x$. $\mathrm{sym}x\ \varepsilon u$ (3)
(1) . (2) . (3) . P35 .⊃. n⊃u (4)
Hp .⊃. $c\varepsilon$n . (4) .⊃. P]

***

Per ultimo, assumiamo quale Df della notazione « $a-b$ » la P

75. $a-b = a+\mathrm{sym}b$ Df

Da quanto precede si deduce:

76. $(a-b)\ \varepsilon\ \mathrm{n}$

[P2 . 40 . 75 .⊃. P]

77. $(a+b)-b=a$

[P40 . 75 . 2 . 45 . 53 . 37 .⊃.
$(a+b)-b=(a+b)+\mathrm{sym}b=a+(b+\mathrm{sym}b)=a+0=a$]

78. $(a-b)+b=a$

[P75 . 2 . 45 . 54 . 37 .⊃.
$(a-b)+b=(a+\mathrm{sym}b)+b=a+(\mathrm{sym}b+b)=a+0=a$]

79. $a-b=\mathrm{sym}(b-a)$

[P75 . 51 . 2 . 50 . 75 .⊃.
$a-b=a+\mathrm{sym}b=\mathrm{sym}[(\mathrm{sym}a)+b]=\mathrm{sym}(b+\mathrm{sym}a)=\mathrm{sym}(b-a)$]

80. $a-(a-b)=b$

[P76 . 75 . 79 . 76 . 50 . 78 .⊃.
$a-(a-b)=a+\mathrm{sym}(a-b)=a+(b-a)=(b-a)+a=b$]

81. $a+b=c\ .\supset.\ c-b=a$

[Hp .⊃. $c-b=(a+b)-b$. P77 .⊃. Ts]

82. $c-b=a\ .\supset.\ a+b=c$

[Hp .⊃. $a+b=(c-b)+b$. P78 .⊃. Ts]

83. $a-a=0$

[P75 . 53 .⊃. $a-a=a+\mathrm{sym}a=0$]
∪ [P27 . 49 . 81 .⊃. P]

84. $a-0=a$

[P27 . 75 . 28 . 37 .⊃. $a-0=a+\mathrm{sym}0=a+0=a$]
∪ [P27 . 37 . 81 .⊃. P]

85. $0-a=\mathrm{sym}a$

[P27 . 79 . 84 .⊃. $0-a=\mathrm{sym}(a-0)=\mathrm{sym}a$]
∪ [P27 . 2 . 54 . 81 .⊃. P]

86. $a-1=\mathrm{prec}a$

[P31 . 75 . 42 .⊃. $a-1=a+\mathrm{sym}1=\mathrm{prec}a$]

87. $a-\mathrm{sym}b=a+b$

[P2 . 75 . 3 .⊃. P]

88. $a-(b+c)=(a-b)-c$

[P40 . 75 . 52 . 2 . 45 . 75 . 76 . 75 .⊃.
$a-(b+c)=a+\mathrm{sym}(b+c)=a+(\mathrm{sym}b+\mathrm{sym}c)=(a+\mathrm{sym}b)+\mathrm{sym}c=$
$(a-b)+\mathrm{sym}c=(a-b)-c$]

89. $a+(b-c)=(a+b)-c$

[P75 . 2 . 45 . 40 . 75 .⊃.
$a+(b-c)=a+(b+\mathrm{sym}c)=(a+b)+\mathrm{sym}c=(a+b)-c$]

90. $a-(b-c)=(a-b)+c$

[P2 . (symc|c) P88 . P75 . 76 . 87 .⊃. P]

91. $(a+c)-(b+c)=a-b$

[P50 . 40 . 88 . 77 .⊃. $(a+c)-(b+c)=(a+c)-(c+b)=$
$[(a+c)-c]-b=a-b$]

92. $(a-c)-(b-c)=a-b$

[P2 . (symc|c) P91 . P75 .⊃. P]

93. $(a-b)\times c = a\times c - b\times c$

[P75 . 2 . 62 . 66 . 61 . 75 .⊃.

$(a-b)\times c = (a+\text{sym}b)\times c = a\times c+(\text{sym}b)\times c = a\times c+\text{sym}(b\times c) = a\times c-b\times c$]

94. $c\times(a-b) = c\times a - c\times b$

[P76 . 69 . 93 . 69 .⊃. P]

95. $(a+b)\times(c-d) = (a\times c + b\times c) - (a\times d + b\times d)$

[P40 . 94 .⊃. $(a+b)\times(c-d) = (a+b)\times c - (a+b)\times d$. P62 .⊃. P]

96. $(a-b)\times(c+d) = (a\times c + a\times d) - (b\times c + b\times d)$

[P40 . 93 .⊃. $(a-b)\times(c+d) = a\times(c+d) - b\times(c+d)$. P72.⊃.P]

97. $(a-b)\times(c-d) = (a\times c + b\times d) - (b\times c + a\times d)$

[P76 . 93 . 94 .⊃. $(a-b)\times(c-d) = a\times(c-d) - b\times(c-d) = (a\times c - a\times d) - (b\times c - b\times d)$ (1)

(1) . P61 . 91 .⊃. . . $= [(a\times c + b\times d) - (a\times d + b\times d)] - [(b\times c + a\times d) - (b\times d + a\times d)]$ (2)

(2) . P61 . 40 . 50 . 92 .⊃. P]

Roma, 20 aprile 1901.

International Association for promoting the Study of Quaternions and Allied Systems of Mathematics.

RULES AND REGULATIONS.

Name and Object.

The name of the association shall be « International Association for Promoting the Study of Quaternions and Allied Systems of Mathematics. »

Its objects shall be to further in every way possible the study of the calculus of vectors and related quantities.

. . . . . .

Membership and Fees.

Any one may become a member on his own application, accompanied by fees of the current year to the National Secretary, or to the General Secretary when there is no National Secretary in his country.

A member may resign his membership by letter to the National Secretary or to the General Secretary.

The annual fees of a member shall be twelve francs or its equivalent.

Any one of special merit to the object of the association, may be elected as an Honorary Member or as an Honorary Officer.

. . . . . .

National Secretary, Italy : Giuseppe Peano, Professore nella R. Università di Torino. (Voir RdM t. 5 a. 1895 p.168).

ADDITIONS ET CORRECTIONS AU FORMULAIRE a.1901

par

E. Cantoni
C. Ciamberlini, abrégé en (c
G. Eneström
A. Padoa » (pd
G. Peano » (p
A. Ramorino
O. Stolz
G. Vacca » (v

add. indique cette série d'additions.

LOGIQUE

§⊃ p.13 ligne 10. Au lieu de Oper x_3 lisez Oper x_2. (p

P5·1 note.

Le mot «distributif» a été introduit par Servois Ann. t.5 a.1815 p.98, vaec la signification expliquée dans §lin P1·0 note. Sa valeur est ici généralisée. (p

P6·2 (p.14).

Le mot «commutatif» a été introduit par Servois a.1815, dans la signification expliquée dans §– P1·5. (p

7·13 $a,b,c\varepsilon\mathrm{Cls} \,.\, a\supset b \,.\supset:\, c\supset a \,.\supset.\, c\supset b$ [= Syll]
Ex. §Lm P4·6 add. Dem. (p

p.16 P8·1 note ligne 4. Au lieu de x_2 lisez x_3. (p

§∧ p.23 P2·6. Après Hauber au lieu de 1829 lisez 1825. (Stolz

§– P1·5 (p.25) note.

Servois a.1815 Ann.t.5 p.98:

«Soit $ffz = fz$. Les fonctions qui comme f et f seront appelées *commutatives entre elles.*» (p

§sim p.37 ligne 9. Au lieu de $\S\pi$ lisez $\S\Pi$. (p

§15 p.38.

On rencontre cette notation u^{-1} dans Servois a.1815 Ann. t.5 p.93.

(p

ARITHMÉTIQUE

§+ p.39. Portez les P4·0·1·2 en avant des P2.

En effet dans la P2 on considère le successif de 0, 1,... dont l'existence est donnée par les P4·0·1·2. (c

p.40. Après ✱ lisez 3 (dans quelques copies). (c

§+ 4·3. Le principe d'induction, quoique non énoncé d'une manière générale, avait déjà été employé explicitement par *Maurolycus* a.1556, dans son ouvrage : *Arithmeticorum libri duo*, Venetiis, a.1575.

En effet dans plusieurs démonstrations cet auteur (p. 7, 17, 30, ...) après avoir démontré que l'énoncé, étant vérifié pour un nombre, est aussi verifié pour le suivant, l'ayant verifié pour les premiers nombres, il en conclut : « et eodem syllogismo pro quovis alio assignato loco utemur ad roborationem propositi. » (pag.30). Ou plus clairement : (pag.7) « ... et sic deinceps in infinitum semper (propositione) repetita propositum demonstratur ». (v

8·41 $s\varepsilon \mathrm{Cls} : x\varepsilon \mathrm{N}_0 .\supset_x . x\varepsilon s . \cup . x = 0 :\supset: a\varepsilon \mathrm{N}_0 .\supset. a+\varepsilon s$ [= P.4]

Cette forme, plus compliquée, de la P·4 a l'avantage de ne plus contenir le symbole - de la négation : elle se rapproche beaucoup du principe d'induction (§+ P4·3) qui dit :

$$s\varepsilon \mathrm{Cls} . 0\varepsilon s : x\varepsilon s .\supset_x . x+\varepsilon s :\supset: a\varepsilon \mathrm{N}_0 .\supset. a\varepsilon s$$ (v

§+ 10·9 note (p.46).

On rencontre aussi les puissances des fonctions dans Servois Ann. t.5 p.93 a.1815 (présentée a.1812). (p

§× (p.51) P1·3 Dem, ligne 2. Au lieu de $a(b+1)$ lisez $a(b+c)$ (p
» » P1·31 Dem, ligne 2. » $a(+b)$ » $(a+b)$ (p

8·2 (p.53) Dem $[(a-d, b-d, c-d) \mid (a,b,c)$ P8·1 $.\supset.$ P] (c
8·3 (p.53) Au lieu de = lisez = — (c
8·4 (p.53) Dem $[[3a-b-c, 3b-c-a, 3c-a-b) \mid (a,b,c)$ P8·3 $.\supset.$ P] (c
8·4 (p.53) Au lieu de = lisez = — (c

§/ (p.54) note ligne 11. Après « Oughtred » lisez a.1631. (p

(p.55) *Note sur les fractions.*

La P4·1 $a,b,c,d\varepsilon \mathrm{N}_1 .\supset: a/b = c/d .=. ad = bc$
a été prise pour définition par MM. :

Stolz : *Vorlesungen über allg. Arithmetik*, a.1855 p.43 ;

J. Tannery : *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, a.1886 p. VIII, et plus explicitement :

— *Leçons d'Arithmétique*, a.1894 p.148 ;

L. Couturat : *De l'infini mathématique*, a.1896 p.1.

Alors la fraction a/b est introduite « par abstraction » ; on ne pose pas

(a/b) = (expression composée par les idées précédentes),

mais on définit seulement par les idées précédentes l'égalité $a/b = c/d$.

Nous préférons considérer a/b comme représentant la double opération $\times a\ /b$, c'est-à-dire « multiplier par a et diviser par b ». Les deux opérateurs a/b et c/d sont égaux, lorsque, appliqués à un même nombre qui rende possibles les deux opérations, ils donnent des résultats égaux. (P3·2).

Nous avons donné cette Df P3·2 dans F1889 p.13; voir RdM. t.1 p.262.

Cette façon de considérer les fractions comme des opérations, se trouve aussi dans les : *Leçons sur l'analyse infinitésimale*, a.1894 p.2, par M. Méray, qui l'avait déjà publiée dans les AnnN. a.1889 p.421.

Il dit : « On convient de représenter le résultat de l'opération composée « consistant à multiplier un entier donné E par un second nombre n, puis « à diviser le produit par un troisième d, par le signe $E \times \frac{n}{d}$,... en lui lais- « sant le nom de produit du nombre E par le facteur fictif $\frac{n}{d}$. Ces facteurs « fictifs, dont les combinaisons sont soumises à un ensemble de règles que « nous allons exposer rapidement, sont précisément les nombres fraction- « naires ou fractions.

« Si la comparaison des produits des deux fractions $\frac{n'}{d'}$, $\frac{n''}{d''}$ par un seul « entier E non $= 0$ donne lieu à l'une des relations $E\frac{n'}{d'} \gtreqless E\frac{n'}{d'}$ la même « relation aura lieu entre les produits des mêmes fractions par tout autre « entier..., pourvu que ces multiplications fictives soient toutes exécutables.

« On exprime cette corrélation constante en disant que la valeur de la première est supérieure, égale ou inférieure à celle de la seconde. »

Cette idée est la plus naturelle. Dans le papyrus Rhind, du calculateur égyptien Ahmès (a.—2000 environ), on trouve (colonne 12) :

« $1-(2/3+/15) = /5+/15$

En effet, en opérant sur 15 on a :

$15-10-1 = 3+1$ ».

En suivant l'A. nous n'avons pas écrit le numérateur lorsqu'il est l'unité, mais nous avons remplacé les chiffres égyptiens par les actuels. (p

§ /P7·0 note.

On rencontre la fonction $/a$ sous la forme $\mathfrak{y}a$ dans Hamilton IrishT. t.17. (v

§ (p.60) *Note sur les puissances.*

Puissance = potentia, est la version de δύναμις (Diophantus), qui signifiait « carré ». (p

§ 4·3 (p.62) On peut lire N_1 à la place de N_0. (c

§ 6·0 — La première démonstration connue de ce théorème est due à Euler PetrNC. t.8 a.1760-61 p.105. Cette démonstration est tout à fait rigoureuse. Au contraire la démonstration, qu'on cite habituellement de, ses *Elém. d'Algébre* (a.1770) est incomplète. (v

§ 6·1 *Note* — Kummer, a.1857, BerlinAbh. p.41, a étendu sa démonstration à d'autres classes de nombres premiers. Il resulte de son analyse la dém. du théorème de Fermat lorsque $n \varepsilon 1 \cdots 100$. (v

§ P6·0-·4. On peut écrire plus simplement ces P ainsi :

$$\cdot 0 \quad N_1^3+N_1^3 \supset N_1=N_1^3 \qquad \cdot 1 \quad n \varepsilon N_0+3 \,.\supset.\, N_1^n+N_1^n \supset N_1=N_1^n \ldots$$

Les avantages de cette substitution sont indiqués dans la § 3·8*n*. (v

§ P9·03 (p.64) Dem. au lieu de P·04 lisez P·01. (c

9·07 (p.64). Dem $[\ 3(a^4+a^2b^2+b^4)-(a^2+ab+b^2)^2 = 2(a-b)^2(a^2+ab+b^2)>0\ ]$ (c

9·08 (p.64). Dem $[\ 2(a^4+a^2b^2+b^4)-3ab(a^2+b^2) = (a-b)^2(2a^2+ab+2b^2)>0\ ]$ (c

§ 9·09 il faut lire cette P ainsi :

$$4(a^2+ab+b^2)^3 > 27(a^2b+ab^2)^2$$

La démonstration suivante est due à Lagrange, Œuvres t.4 p.346, a.1777 :

$$[\ 4(a^2+ab+b^2)^3 - 27(a^2b+ab^2)^2 = (a-b)^2[2(a^2+ab+b^2)+3ab]^2\ ] \qquad (v$$

9·091 $\quad 27(a^3+a^2b+ab^2+b^3)^4 > 256a^3b^3(a^2+ab+b^2)^3$ (v

9·11 (p.64). Au lieu de $\leqq$ lisez $>$. (c

9·13 (p.64). Cette P subsiste dans l'Hp plus générale $a \leqq b \leqq c \,.\, a+b>c$. (c

9·20 Dem 2.

$$[2(a^3+b^3+c^3-3abc) = (a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\ ] \qquad (v$$

9·24 Dem 2. $\quad [\ 2(a+b+c)^3-27abc = (a-b)^2(a+b+7c)+(b-c)^2(7a+b+c)+(c-a)^2(a+7b+c)\ ]$ (v

9·30 (p.64). Dem $[\ (bc,ca,ab) \mid (a,b,c)\,\mathrm{P}\cdot 12 \,.\supset.\, \mathrm{P}\ ]$ (c

9·31 (p.64). Dem $[\ (a^2,b^2,c^2) \mid (a,b,c)\mathrm{P}\cdot 11 \,.\supset.\, a^4+b^4+c^4 > a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$ (1)

$(ab,ac,bc) \mid (a,b,c)\mathrm{P}\cdot 11 \,.\supset.\, a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 > abc(a+b+c)$ (2)

$(1).(2) \,.\supset.\, \mathrm{P}\ ]$ (c

9·32 (p.65). Au lieu de $\leqq$ lisez $>$. (c

9·32 (p.65). Dem $[\ (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)-(a^2+b^2+c^2)^2 = ab(a-b)^2+ac(a-c)^2+bc(b-c)^2 > 0\ ]$ (c

9·42 (p·65). Dem $[\ \mathrm{P}9\cdot 41 \,.\supset.\, \mathrm{P}\ ]$ (c

9·43 (p.65). Dem $[\ \mathrm{P}9\cdot 42 \,.\supset.\, \mathrm{P}\ ]$ (c

9·51 (p.65). Dem $[\ \mathrm{P}14\cdot 41 \,.\supset.\, \mathrm{P}\ ]$ (c

9·30·42·43 { MacLaurin a.1726 LondonT. t.34 p.109, 104, 112 {

$$\cdot 44 \quad a,b,c,d \varepsilon N_1 \,.\, -(ad=bc) \,.\supset.\, (a^3d^3+b^3c^3)(c+d)^2 > (a+b)^3c^3d^3$$

(v

14·03 — Cette P, sous la forme : $ab = (a+b)^2/4 - (a-b)^2/4$, réduit toute multiplication à deux additions et une subtraction, si l'on a une table des quarts des carrés. Cette méthode est plus commode que celle des logarithmes lorsque on n'a que deux nombres à multiplier, et lorsque

on désire avoir tous les chiffres du produit. Une table des quarts des carrés des nombres 1···200 000 donne tous les produits de deux nombres de 5 chiffres (Voir J. Blater, Table des quarts de carrés de tous les nombres entiers jusqu'à 200 000, etc. Paris, a.1888). Lorsque $a+b$ surpasse la limite de la table on peut encore utiliser parfois la formule: $ab = [a^2+b^2-(a-b)^2]/2$.

On peut aussi utiliser les formules:

$$ab = (a+b)(a+b+1)/2 - a(a+1)/2 - b(b+1)/2$$
$$ab = a(a+1)/2 + b(b-1)/2 - (a-b)(a-b+1)/2$$

qui exigent l'emploi d'une table des nombres triangulaires $n(n+1)/2$. (Arnaudeau, Table des triangulaires de 1 à 100 000, etc. Paris a.1896).

(v

§14·04 (p.65). Dem [$(b-c, c-a, a-b) \mid (a,b,c)$ P3·1 .⊃. P] (c

14·07 (p.65). Dem [$(2b+2c-a,\ 2c+2a-b,\ 2a+2b-c) \mid (a,b,c)$ P14·05 .⊃. P] (c

14·121 (p.66). Cette P n'est pas exacte. (c

14·122 (p·66). Dem [$(b+c,\ c+a,\ a+b) \mid (a,b,c)$ P·11 .⊃. P] (c

14·13 (p.66). Dem [$(b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c) \mid (a,b,c)$ P3·3 .⊃. P] (c

14·14 (p·66). Dem [P3·3 .⊃. P] (c

14·17 (p.66). Dem [$(b-c,\ c-a,\ a-b) \mid (a,b,c)$ P3·3 .⊃. P] (c

14·35 (p.66). Dem [P·33 .⊃. P] (c

14·36 (p.66). Dem [$(b+c,\ c+a,\ a+b) \mid (a,b,c)$ P·31 .⊃. P] (c

14·38 $(a+b+c)^4 + (-a+b+c)^4 + (a-b-c)^4 + (a+b-c)^4 =$
$4(a^4+b^4+c^4) + 24(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$ (v

14·7 (p·67). Dem [$(bc,\ ca,\ ab) \mid (a,b,c)$ P·37 .⊃. P] (c

14·72 (p.67). Dem [$(b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c) \mid (a,b,c)$ P3·9 .⊃. P] (c

14·73 (p.67). Au lieu de $(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5$ il faut lire:
$2[(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5]$ (c

14·73 (p.67). Dem [$(b-c,\ c-a,\ a-b) \mid (a,b,c)$ P·72 .⊃. P] (c

14·91 (p.68). Dem [P·9 .⊃. P] (c

15·5 (p.68). Au lieu de $3^{3n-3}+7^n \times 2^{3n-1} \varepsilon\ 29N_1$ il faut lire:
$3^{3n}+7^{n+1} \times 2^{3n+2} \varepsilon\ 29N_1$. (c

Au lieu de $992N_1$ il faut lire $992N_0$. (c

§··· ·01 $a \varepsilon n\ .\ b \varepsilon\ a+N_0\ .\supset.\ a\cdots b = (b-N_0)-(a-N_1)$ Dfp
$= (a+N_0)\frown(b-N_0)$ Dfp

·02 » $.\supset.\ -(a\cdots b) = (-b)\cdots(-a)$

·21 $a,b \varepsilon n\ .\ c \varepsilon\ a+N_0\ .\ d \varepsilon\ b+N_0\ .\supset.\ (a\cdots c)-(b\cdots d) =$
$(a-d)\cdots(c-b)$ [P2·02 .⊃. P]

·4 $a \gtrless b\ .=.\ a \varepsilon\ 0\cdots b$ Dfp (pd

§···

Il y a peut-être avantage à porter ce § avant le §≤.

Entre autres, j'observe qu'on fait ainsi disparaître les symboles de logique (∃,=) des P qui suivent; voici comment on peut exécuter ce déplacement:

§···

$\cdot 0 \quad 0\cdots 0 = \iota 0$

$\cdot 01 \quad a \varepsilon N_0 . \supset . 0\cdots(a+1) = (0\cdots a) \cup \iota(a+1)$] Df

$\cdot 1 \quad \text{——} . \supset . 0\cdots a = \iota 0 .=. a = 0$

$\cdot 2 \quad a,b \varepsilon N_0 . \supset : 0\cdots a = 0\cdots b .=. a = b$

§≤

$a,b,c \varepsilon N_0 . \supset :$

$\cdot 0 \quad a \leq b .=. 0\cdots a \supset 0\cdots b$ Df

$\cdot 1 \quad 0 \leq a . a \leq a$

$\cdot 2 \quad a \leq b . b \leq a . \supset . a = b$ [Df ≤ . §1 6·0 .⊃. P]

$\cdot 3 \quad a \leq b . b \leq c . \supset . a \leq c$ [Df ≤ . Syll .⊃. P]

(v

§Num

$\cdot 25 \quad \text{Num}(\iota x) = 1$

$\cdot 26 \quad a \varepsilon \text{Cls} . \supset :: \text{Num}\, a \varepsilon N_0 .=:. \exists a . \cup : x \varepsilon a . \supset x .$
$\text{Num}(a - \iota x) = \text{Num}\, a$ (pd

$\cdot 49 \quad a \varepsilon \text{Cls} . \text{Num}\, a\, \varepsilon N_0 . \supset . (aFa)\text{sim} = (aFa)\text{rcp}$ (p

$\cdot 57 \quad a \varepsilon \text{Cls} . \supset : \text{Num}\, a\, \varepsilon \text{ infn} .=. 1 + \text{Num}\, a = \text{Num}\, a$ Dfp (v

$\cdot 82$ { JONES a.1706 *Synopsis palmar. mathescos* Londini p.217 :
« Generally N^n is the composition of n quantities in N ». } (v

§Σ P1·0 (p.73). Au lieu de $1\cdots(m+1)$ lisez $0\cdots(m+1)$. (p

§Σ 2·5 $n \varepsilon N_1 . f,g \varepsilon \text{ rf}\, 0\cdots n . \supset . \Sigma[gx \times \Sigma(f, 0\cdots x) \mid x, 0\cdots n] +$
$\Sigma[fx \times \Sigma(g, 0\cdots x) \mid x, 0\cdots n] = \Sigma(f, 0\cdots n) \times \Sigma(g, 0\cdots n)$ (v

§Σ 3·3 Dem

$[\text{ Hp} . \supset . 3\Sigma[r(r+1) \mid r, 1\cdots n] = 3\Sigma[(r+1)(r+2) \mid r, 0\cdots(n-1)]$
$= \Sigma\{[(r+1)(r+2)(r+3) - r(r+1)(r+2)] \mid r, 0\cdots(n-1)\}$
$= n(n+1)(n+2) . \supset . \text{P}]$ (v

4·12 Dem.

$[\, s_2 = \Sigma(r^2 \mid r, 1\cdots n) = \Sigma[r(r+1) - r \mid r, 1\cdots n]$
$= \Sigma[r(r+1) \mid r, 1\cdots n] - \Sigma(\text{idem}, 1\cdots n)$ (1)

(1) . P3·3 . P3·1 .⊃. $s_2 = n(n+1)(n+2)/3 - n(n+1)/2$
$= n(n+1)(2n+1)/6 . \supset . \text{P}$]

4·13 Dem. [$r \varepsilon N_1 . \supset . r^3 = (r-1)r(r+1) + r$. P3·1·4 .⊃. P] (v

§Σ4·1 (p.74) Dans la formule de s_3 supprimez la citation de Nicomachus. Le passage cité de Nikomachos ne contient *rien* sur la sommation des cubes, mais seulement une décomposition des nombres cubiques, d'où l'on *peut* déduire aisément s_3 *si* l'on connaît la *formule générale* de la décomposition de n^3, qui manque chez Nikomachos. G. Eneström.

4·2. Au lieu de s lisez s_1. (c

4·2 $9s_2^2 = s_1^2(8s_1+1) \qquad 3s_5 = s_1^2(4s_1-1) \qquad s_5 = 4s_1^3-3s_2^2$

$7s_6 = s_2(12s_1^2-6s_1-1) \qquad 3s_7 = s_1^2(6s_1^2-4s_1+1)$

$s_7 = 2s_1^3(s_1-2)+3s_2^2 \qquad 3s_8 = 8s_1^2s_2(s_1-1)+3s_4$

$5s_9 = 16s_6^4(s_1-1)+12s_5 = 4s_1^2[4s_1^2(s_1-1)+4s_1-1]$

$11s_{10} = 4s_1^2s_2(12s_1^2-20s_1+17)-25s_4 = s_2(48s_1^4-80s_1^3+68s_1^2-30s_1+5)$

$33s_{10} = 4s_1^2s_2(36s_1^2-10s_1+1)-75s_8$

$3s_{11} = 16s_1^6-32s_1^5+34s_1^4-15s_5 = s_1^2(16s_1^4-32s_1^3+34s_1^2-20s_1+5)$

$12s_{11} = 8s_1^4(8s_1^2-6s_1+7)-25s_9$ (pd

5·1 (p.75). Au lieu de $(2m+3)$ lisez: $(2m+3)/3$. (c

6·1 (p.75). À l'Hp ajoutez $a-=b$. (c

10. On donne ici la Df symbolique de notre système de numération; mais dans les P précédentes (p.60, etc.), on trouve plusieurs fois des nombres écrits dans le système décimal. (c

10. *Note.* — (p.77). Au lieu des lignes 11-14 lisez:

Colson (LondonT. a.1726 t.34 p.161-174), suivi par Cauchy (Œuvres s.1 t.5 p.434-455), sans changer la base du système de numération, par l'introduction des chiffres négatifs a reduit de moitié le nombre des chiffres.

Dans ce système: $6=1\bar{4}$, $87 = 1\bar{1}\bar{3}$, $1901 = 2\bar{1}01$ etc.

On adopte aujourd'hui la notation des chiffres négatifs pour indiquer la caractéristique négative des logarithmes. (v

(p.78) ligne 5, ajoutez:

On peut adopter les bandes de papier proposées par Colson a.1726, pour la multiplication abrégée, dans son système de numération.

C'est-à-dire, pour multiplier 123 par 456 on écrit ce dernier nombre sur une bande de papier, en renversant l'ordre des chiffres 654; on porte le 6 au dessous du 3, et on les multiplie; on a des unités. Puis on porte le 6 au dessous du 2, et en conséquence le 5 au dessous du 3, et on multiplie les chiffres correspondants: la somme de ces produits représente des dizaines. On donne à la bande un mouvement d'une place à gauche; on multiplie les chiffres correspondants; la somme de ces produits représente des centaines; et ainsi de suite. (v

20·6 $(n-1)(\Sigma x^3) \geqq 2\Sigma[x_r x_s \,|(r,s),(1\cdots n;1\cdots n)\frown(r,s)\ni(r<s)]$

·7 $(n-1)(\Sigma x)^2 \geqq 2n\Sigma[$ » » » » $]$

{ ·6·7 MacLaurin a.1726 LondonT. t.34 p.112 } (v

$\S\Pi$ 4·3 $n\varepsilon N_1 . a,b\varepsilon \mathrm{r}\,\mathrm{F}\,1\cdots n \supset . \Pi[(a_r+b_r)|r, 1\cdots n] =$
$\Sigma[\Pi(a,u)\times\Pi(b, 1\cdots n-u)\,|u, \mathrm{Cls}'\,1\cdots n]$ (p

·4 $\Pi[(x+a_r)|r, 1\cdots n] = \Sigma\{x^r\Sigma[\Pi(a,u)\,|u, \mathrm{Cls}'\,1\cdots n \cap u\ni(\mathrm{Num}\,u$
$=r]\,|r, 0\cdots n\}$ (p

·5 $m,n\varepsilon N_1 . a\varepsilon \mathrm{Rf}(1\cdots m : 1\cdots n) \supset .$
$\Pi\{\Sigma[a(r,s)|s, 1\cdots n]\,|r, 1\cdots m\} = \Sigma\{\Pi[a(r, u_r)|r, 1\cdots m]\,|n, 1\cdots n\,\mathrm{F}\,1\cdots m\}$
(p

$\S!$ 1·2 $n\varepsilon N_1 . \supset . (n!)^2 \geqq n^n . n! \leqq [(n+1)/2]^n$ [$\S\Pi$ 10·1 $\supset$. P] (v

·21 $n\varepsilon N_1 . a\varepsilon N_0 F 1\cdots n \supset . (\Sigma a)! \,\varepsilon\, N_1\times\Pi(a!)$ (p

4·3 $n\varepsilon N_1 . m\varepsilon n+N_0 \supset . \mathrm{Num}(1\cdots m\,\mathrm{F}\,1\cdots n)\mathrm{sim} = m!/(m-n)!$ (v

Les objets dont on prend ici le nombre, s'appellent *arrangements* de m objets pris n à n. (v

5·4 $r,m,n\varepsilon N_1 . \supset . n^{r+1}\Pi[m+(0\cdots r)n] / (r+1)! \,\varepsilon\, N_1$ (v

6·3 (p.82) Au lieu de Ths ·3 lisez Ths ·2. Ajoutez :

{ VANDERMONDE ParisM. a.1772 } (p

6·6 $a\varepsilon \mathrm{r} . n\varepsilon N_1 . \supset . \Sigma\{(-1)^r C(a,r)\,|r, 0\cdots n\} = (-1)^n C(a-1,n-1)$

7·4 Dem [P6·2 . $m=n=k$ $\supset$. P] (p

7. Au lieu de la ·5 lisez :

7·5 $\Sigma\{(-1)^r[C(2n,r)]^2\,|r, 0\cdots 2n\} = (-1)^n C(2n,n)$
{CESÀRO a.1884 Mathesis t.4 p.231} (v

7·71 $a,b\varepsilon \mathrm{r} . m,n\varepsilon N_1 . m<n \supset . \Sigma\{(-1)^r C(n,r)(a+rb)^m\,|r, 0\cdots n\} = 0$
{ EULER a.1743 CorrM. t.1 p.264 } (v

7·9 $n\varepsilon N_1 . \supset . \Sigma\{(-1)^{r+1} C(n,r)/(n+r)\,|r, 1\cdots n\} = / [(2n+1)\,C(2n,n)]$
{WALLIS a.1655 p.425 :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2.3},\ \frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1.2}{3.4.5},\ \frac{1}{4}-\frac{3}{5}+\frac{3}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1.2.3}{4.5.6.7}$$

... et sic deinceps ... } (v

7·91 $m,n\varepsilon N_1 . \supset . \Sigma[(-1)^r C(n,r)/(m+r)\,|r, 0\cdots n] = n!/\Pi(m+0\cdots n)$
(p

8. Ajoutez: { JONES a.1706 p.172 } (v

$\S$max p. 85.

On suppose implicitement ici qu'en posant, par définition, $x=\imath u$, on puisse déduire $\imath x=u$. Cette convention est contraire à $\S\imath$ P·8. Il convient donc de remplacer $\exists\imath$ max u par max $u\,\varepsilon\, N_0$. (p

$\S$max ·01 $\max u = \imath\, u \cap x \ni (u \supset 0\cdots x)$ Dfp

» » » » $(u \supset x-N_0)$ Dfp

» » » » $(=\exists\, u \cap N_1+x)$ Dfp (pd

§quot rest (p.87). Ajoutez:

·91 $a \geqq b \;.\supset.\; \mathrm{quot}[a,\mathrm{quot}(a,b)] = b + \mathrm{quot}[\mathrm{rest}(a,b), \mathrm{quot}(a,b)]$
——— $\mathrm{rest}[a, \mathrm{quot}(a,b)] = \mathrm{rest}\,[\mathrm{rest}(a,b), \mathrm{quot}(a,b)]$ (c

§E (p.88) P2·4, P3·7. Changez l'Hp en $a \varepsilon N_0 \,.\, b \varepsilon N_1$. (c

§Chf (p.89) P·2. On peut lire N_0 au lieu de N_1. (c

§Dvr 2·11 Dem. Au lieu de P2 lisez P3 (p

2·12 (p.91). Au lieu de P·41 lisez P·11. (c
2·46·47·49. (p.91) Au lieu de $/N_1$ lisez $/(N_1+1)$, deux fois. (c
2·7 (p.92) Au lieu de N_0 lisez N_1. (c

2·51 $a,b,n \varepsilon N_1 \,.\, D(a,b) = 1 \;.\supset.$
$\Sigma\,[1 \cdots (ab)]^n / (ab) - \Sigma\,(1 \cdots a)^n / a - \Sigma\,(1 \cdots b)^n / b \;\varepsilon\; N_1$
{ STAUDT JfM. a.1840 t.21 p.372 } (p

·52 $n \varepsilon N_1 \,.\, a \varepsilon N_0 F 1 \cdots n \;.\supset.\; (\Sigma a - 1)! \times Da \;\varepsilon\; N_1 \times \Pi(a!)$
{ CAUCHY a.1841, OEuvres s.1 t.6 p.109 } (p

§ mlt (p.92)

·03 $m(a,b) = \imath N_1 \cap x \ni [\, N_1 \times x = N_1 \times a \cap N_1 \times b \,]$ Dfp (pd

$a \varepsilon \mathrm{Cls'R} \,.\, \mathrm{Num}a \;\varepsilon\; N_1 \;.\supset.$

2·31 $m/a = /Da$ [P·3 .⊃. P]
·32 $ma = /D/a$ [(/a|a)P.31 .⊃. P] Dfp
·33 $/ma = D/a$ [P·32 .⊃. P]
·34 $Da = /m/a$ [P·31 .⊃. P] Dfp (pd

§nt dt P1·8 (p.94). Au lieu de (dta) lisez $(dta)^m$ (c

·52 $a \times b \varepsilon N_1 \;.\supset.\; nta \;\varepsilon\; N_1 \times dtb \,.\, ntb \;\varepsilon\; N_1 \times dta$ (c

§Np 1·4. *Note* — R. Haussner a vérifié que $2 \times 2 \cdots 5000 \supset Np + Np$ (Jahres-Versammlung der Deutschen Math. Verein. a.1900 p.7) (v

3·3. (p.96) Au lieu de N_0 on peut lire N_1. (c
3·91 (p.97). Ajoutez [$a \varepsilon N_1 + 3$ §P15·7·71 .⊃. P] (c
5·4. (p.97) Simplifiez l'Hp en $p \varepsilon Np$. (c
5·9 (p.97). Au lieu de $a \varepsilon N$ lisez $a \varepsilon N_1$. (c

(p.97) ligne 3 en remontant, après « continuation », lisez P12·6. (c
8·1·2 (p.98). Dans l'Hp, au lieu de $q \varepsilon 1 \cdots (p-1)$, il me semble qu'on doit lire $q \varepsilon 1 \cdots (p-2)$. (c

8·4 $m \varepsilon Np \,.\, n \varepsilon N_1 \,.\, m > n+1 \;.\supset.\; \Sigma\,(1 \cdots m)^n \;\varepsilon\; N_1 \times m$
{ LIONNET ; voir Catalan BelgioquM. t.46 a.1886 p.14 }(p

11·1 (p.99). Cette P contient le signe $\sqrt{}$ qui n'est pas encore défini. (c

11·1. On peut éliminer le symbole $\sqrt{}$ qui y figure en l'écrivant :

$$a\varepsilon N_1 . \supset . a! = \Pi \{\Pi [\Pi [Np \frown x\ni(s^r . x^r \leqq a)] \,|s, N_1] \,|r, N_1\}$$ (v

12·4 (p.99). Changez l'Hp en $a\varepsilon N_1+1$ ou bien en $a^n+b^n \varepsilon Np-\iota 2$. (c

12·6. Autre Dem :

{ MERTENS WienA. a.1899; WarszawaP. t.11 p.194 } (p

§mp 2·01 $p\varepsilon Np . b\varepsilon 0\cdots(p-1) F 0\cdots n . a = \Sigma(b_r p^r \,|r, 0\cdots n) . \supset .$
$mp(p,a!) = (a-\Sigma b)/(p-1)$

{ KUMMER a.1852 JfM. t.44 p.115 } (v

§ Nprf (p.103).

$Nprf \frown (2N_1+1) \supset Np \times [(2N_1+1)\times(2N_1+1)]^2$

{ DESCARTES a.1638 t.2 p.429 :

« [Il n'y a] point de nombres parfaits impairs, si ce n'est qu'ils soient composés d'un seul nombre premier, multiplié par un carré dont la racine soit composée de plusieurs autres nombres premiers ». }

$Nprf \frown (2N_1+1) \supset (4N_0+1)\times N_1^2$ (v

{ FRENICLE a.1657; voir Huygens Oeuvres t.2 p.32 :

« Pour les nombres parfaits ... impairs, s'il y en a aucun, il doit estre multiple d'un quarré par un nombre pairement pair plus 1 » . } (v

$a\varepsilon Nprf \frown (2N_1+1) . \supset . Num(Np \frown a/N_1) \geqq 6$

{ SYLVESTER a.1888 *Mathesis* t.8 p.57 } (v

§l' pag. 105 ligne 13 d'en bas. Au lieu de δv, lisez : ϑv (v

§Q 18·7 (p.108). Au lieu de $u+v$ lisez $u \smile v$ (p

53. Ajoutez :

·01 $a\varepsilon q . m\varepsilon 2N_1+1 . \supset . \sqrt[m]{a} = \iota\, q \frown x\ni(x^m = a)$ Df

Cette Df est appliquée dans les P55·7, 58·2·3. (c

55·3 (p.111) Au lieu de $a>b$ lisez $a<b$. (c

§Log p.115. *Note sur les logarithmes.*

Neper reconnut plus tard les avantages de tables donnant les logarithmes en base « dix »; Briggs a commencé ce calcul, et publia a.1624, les logarithmes des nombres 1···20 000 et 90 000 ⊢ 100 000 à moins de 10^{-10}.

Wlacq a.1628 publia la table des log 1···100 000 à dix décimales.

On a publié beaucoup d'éditions des tables de logarithmes. Dans les applications pratiques des astronomes et des ingénieurs sont commodes les tables à 5 décimales.

Dans les applications plus communes, les ingénieurs adoptent la « règle logarithmique ». La multiplication est obtenue en faisant glisser l'une des parties de la règle sur l'autre, et on lit immédiatement le produit.

Si l'on adopte la numération binaire, les tables correspondantes des logarithmes sont 5 fois plus courtes; la longueur de la règle logarithmique est aussi réduite dans le même rapport. (p

§Q 41·4

H. Padé, dans l'« Enseignement Mathématique » mars a.1901 vient d'analyser les démonstrations de cette prop.

§λ 1·5 (p.118). Au lieu de (N_1 lisez ($/N_1$ (p

§λ 3·1 $u\varepsilon \mathrm{Cls'q} . \supset . \Lambda u = \lambda u \cup \iota \mathrm{l}'u \cup \iota \mathrm{l}_1 u$ Dfp (v

FONCTIONS ANALYTIQUES

§ cres ·911 $f\varepsilon(\mathrm{qf}u)\mathrm{decr}_0 . x\varepsilon u . \supset . \mathrm{l}'f'u = \mathrm{l}'f[u\frown(x-\mathrm{Q}_0)]$

·912 » » l_1 » l_1 » + »

Ex. §Lm 1·4 Dem. (Ramorino

§Lm P1. $x\varepsilon \mathrm{qf}\,\mathrm{N}_0 . \supset .$

·03 $(\mathrm{Lm}x)\frown(x`\mathrm{N}_0) = (\Lambda x`\mathrm{N}_0)\frown(x`\mathrm{N}_0)$ (v

·04 $(\mathrm{Lm}x)\frown(x`\mathrm{N}_0) = a\ni[m\varepsilon\mathrm{N}_0 . \supset_m . a\varepsilon x`(m+\mathrm{N}_0)]$ (v

§ Lm 1·2 Dem.

[Hp . P·0 $.\supset.\therefore. +\infty\,\varepsilon\,\mathrm{Lm}x .=: m\varepsilon\mathrm{N}_0 .\supset_m. +\infty\,\varepsilon\,\Lambda x`(m+\mathrm{N}_0)$ (1)

(1) . §λ P3·0 $.\supset.\therefore. +\infty\,\varepsilon\,\mathrm{Lm}x .=: m\varepsilon\mathrm{N}_0 .\supset_m. \mathrm{l}'x`(m+\mathrm{N}_0) = \infty$ (2)

Hp . $m\varepsilon\mathrm{N}_0$. §' P1·2 $.\supset.$ $x`(m+\mathrm{N}_0) \supset x`\mathrm{N}_0$ (3)

Hp . (3) . §Q P18·5 $.\supset. \mathrm{l}'x`(m+\mathrm{N}_0) \leqq \mathrm{l}'u\mathrm{N}_0$ (4)

(2) . (4) $.\supset.$ Ths]

1·3 Dem

[Hp . P·0 $.\supset.\therefore. -\infty\,\varepsilon\,\mathrm{Lm}x .=: m\varepsilon\mathrm{N}_0 .\supset_m. -\infty\,\varepsilon\,\Lambda x`(m+\mathrm{N}_0)$ (1)

(1) . §λ P3·0 $.\supset.\therefore. -\infty\,\varepsilon\,\mathrm{Lm}x .=: m\varepsilon\mathrm{N}_0 .\supset_m. \mathrm{l}_1x`(m+\mathrm{N}_0) = -\infty$ (2)

Hp . $m\varepsilon\mathrm{N}_0$. §' P1·2 $.\supset.$ $x`(m+\mathrm{N}_0) \supset x`\mathrm{N}_0$ (3)

Hp . (3) . §Q P18·5 $.\supset. \mathrm{l}_1x`(m+\mathrm{N}_0) \geqq \mathrm{l}_1x`\mathrm{N}_0$ (4)

(2) . (4) $.\supset.$ Ths]

1·6 Dem

[Hp .§ λ P1·1 $.\supset.$ $\mathrm{q}\frown\mathrm{Lm}x \supset \lambda(\mathrm{q}\frown\mathrm{Lm}x)$ (1)

Hp . $m\varepsilon\mathrm{N}_0$. $y\varepsilon\lambda$ $(\mathrm{q}\frown\mathrm{Lm}x)$. P1·0 . §λ P3·2 $.\supset.$ $y\varepsilon\,\lambda\lambda\,x`(m+\mathrm{N}_0)$ (2)

» » . (2) . §λ P1·2 $.\supset.$ $y\varepsilon\ \lambda\,x`(m+\mathrm{N}_0)$ (3)

» (3) . Export $.\supset: m\varepsilon\mathrm{N}_0 .\supset_m. y\varepsilon\,\lambda x`(m+\mathrm{N}_0)$ (4)

Hp . $y\varepsilon\,\lambda(\mathrm{q}\frown\mathrm{Lm}x)$. (4) . P1·0 $.\supset.$ $y\varepsilon\,\mathrm{q}\frown\mathrm{Lm}x$ (5)

(1) . (5) $.\supset.$ Ths] (Ramorino

§Lm P4·6 (p.124) Dem.

$u\varepsilon\mathrm{Cls}'q\ .\ f\varepsilon q f u\ .\ v\varepsilon\mathrm{Cls}'u\ .\ x\varepsilon\delta v\ .\supset::$

$h\varepsilon\mathrm{Q}\ .\ \mathrm{Oper}\,\iota\ .\supset.\quad v-\iota x\cup y\ni[\mathrm{mod}(y-x)<h]\supset\quad u-\iota x\cup y\ni[\mathrm{mod}(y-x)<h]$

» . §'P1·2 .⊃. $f'\iota$ » » » ⊃ $f'\iota$ » » » ⊃

» . §λ3·31 .⊃. Λ » » » » ⊃ Λ » » » »

» . Oper $a\varepsilon$.⊃: $a\varepsilon\Lambda$ » » » » .⊃. $a\varepsilon\Lambda$ » » » »

§⊃P7·13 .⊃:. $h\varepsilon\mathrm{Q}.\supset_h .a\varepsilon\Lambda$ » » :⊃: $h\varepsilon\mathrm{Q}.\supset_h a\varepsilon\Lambda$ » » »

Oper $a\ni$.⊃: $a\ni[$ » » » »]⊃ $a\ni[$ » » » »

Df Lm .⊃. P (p

§Lm

J. Hadamard — *La série de Taylor et son prolongement analytique*, Paris, Mai 1901.

Ici p.14-15, l'A. vient de rencontrer la classe que nons avons indiquée par Lmx, et «en s'écartant de la terminologie usuelle» l'appelle « l'ensemble dérivé de x ».

§lim 2·12: { O. Bonnet BD. a.1871 t.2 p.215:

« Étant donnée une fontion réelle .... bien déterminée, $\varphi(u)$ d'une variable réelle ... u, on dit: 1° que cette fonction tend vers une limite finie et déterminée A, à mesure que u tend vers une valeur particuliére u' (nous supposons u' fini...), lorsqu' après avoir fixé arbitrairement un nombre réel et positif ε aussi petit que l'on veut, il est possible de trouver un autre nombre réel et positif h, tel que, pour toute valeur de u, dont la différence avec u' a un module différent de zéro, mais inférieur à h, la valeur correspondante de $\varphi(u)$ ait avec A une différence dont le module soit compris entre zéro et ε; 2° que $\varphi(u)$ tend vers l'infini a mesure que u tend vers u', lorsque après avoir fixé un nombre réel et positif λ aussi grand qu'on le veut, il est possible de trouver un autre nombre réel et positif h, tel que, pour toute valeur de u dont la différence avec u' a un module différent de zéro, mais inferieur à h, la valeur correspondante de $\varphi(u)$ ait un module toujours supérieur à λ. » } (v

§lim 8·9 $\lim(x^x|\,x,\mathrm{Q},0)=1$ (p

9·11 $m\varepsilon\mathrm{N}_1\ .\supset.\ \lim\Sigma(1\cdots n)^m/n^{m+1}\,|n=/(m+1)$ (p

10·4 . Ajoutez à l'Hp. : $r\varepsilon 1\cdots m\ .\supset_r\ \Sigma[u(r,s)\,|s,\mathrm{N}_0]\ \varepsilon q$ (p

13·401 $u\varepsilon(\mathrm{Q}\,f\,\mathrm{N}_0)\mathrm{decr}\ .\ \Sigma(u,\mathrm{N}_0)\ \varepsilon\mathrm{Q}\ .\supset.\ 0=\lim(nu_n)\,|n$

{ Catalan, ParisCR. a.1886 } (p

14·1 $[\ n\varepsilon\mathrm{N}_1\ .\supset.\ \Sigma/[1\cdots(2^n)]>1+n/2\ :\supset.\ \mathrm{P}\ ]$ (p

15·31 $u\varepsilon\ \mathrm{Q}\,f\,\mathrm{N}_0\ .\ \Sigma(u,\mathrm{N}_0)=\infty\ .\supset.\ \Sigma[u_n/\Sigma(u,0\cdots n)\,|n,\mathrm{N}_0]=\infty$

{ Dini, *Annali delle Università toscane*, a.1867 p.43 } (p

§lim 16·2 (p.131) Lisez $n(n+1)/2x^n$ au lieu de $n(n+1)/2x^2$. (c

§lim 18. Substituez à la ·6 la suivante:

·6 $u\varepsilon\ \mathrm{Q}f\mathrm{N}_0\ .\ a\varepsilon\ (\iota 1\cup\iota-1)f\mathrm{N}_0\ .\ \Sigma(u,\mathrm{N}_0)=\infty\ .\ \Sigma(au,\mathrm{N}_0)\ \varepsilon q\ .\supset.$

$\lim[\Sigma(a,0\cdots n)/n]\,|n=0$ { Cesàro *Anal. Alg.* p.164 } (v

19. La Ths P·3 subsiste aussi dans d'autres Hp.
Voir Pringsheim, Encyklopädie I A 3 p.96.

§ lim 24·1.
Cauchy s.1 t.11 p.90 indique par Ix la fonction $(1+\mathrm{sgn}x)/2$, et l'appelle « limitateur ». (p

§cont 3·11 $f\varepsilon\,\mathrm{qfq} : y,z\varepsilon\,\mathrm{q} \,.\supset_{y,z}.\, f(y+z)=fy+fz : a,b\varepsilon\,\mathrm{q} \,.\, a<b \,.$
$\mathrm{l}'f'a \vdash b\,\varepsilon\mathrm{q} :\supset.\, f\varepsilon\,(\mathrm{qfq})\,\mathrm{cont}$ { Darboux MA. a.1880 t.17 p.55 }
On peut donc substituer dans la 3·1 à la condition $f\varepsilon$ (qfq)cont, l'hypothèse de cette P. (v

§D 4·4. La Démostration, très simple, donnée ici est attribuée par Serret (a.1868, Calc. Diff. 3. éd. Paris a.1886 p.19) à Ossian Bonnet. La même démostration à été donnée par Grassmann a.1862, Werke, t.1, Leipzig a.1896 p.323. (v

§D P8 p.144. Sur la formule de Taylor.
Si dans la formule reproduite de Bernoulli, on pose $n=f'(a+z)$, et si l'on effectue l'intégration indiquée entre les limites 0 et $b-a$, elle se transforme en :

$$fb-fa=(b-a)f'b-(b-a)^2f''b/2+(b-a)^3/3!\,f'''b-\ldots$$

d'où la formule 8 par la substitution $(x,x+h)$ au lieu de b et a.
L'identité des formules de Bernoulli et de Taylor, qui résulte évidemment par la transformation précédente, vient d'être mise en doute par M. A. Pringsheim BM. a.1900 p.433. (p
Cauchy a.1829 s.2 t.4 p.394 donne la fonction e^{-1/x^2} dont toutes les dérivées sont nulles, et dont la série de Taylor ne donne pas la valeur.
H. Poincaré AM. t.8 a.1886 p.295 (Méth. nouvelles de la mécanique céleste, Paris a.1893 p.2) dit que cette série est un développement asymptotique. (p

§D 10·4 $a,b\varepsilon\mathrm{q} \,.\, a<b \,.\, f\varepsilon\,\mathrm{qF}a \vdash b \,.\, x\varepsilon\, a\frown b \,.\, \mathrm{D}fx=0 \,.\, \mathrm{D}^2fx>0 \,.\supset.$
$\exists\,(c,d)\ni[c\varepsilon\, a\frown x \,.\, d\varepsilon\, x\frown b \,.\, fx=\min f(c \vdash d)]$
[Hp $.\supset.\, \lim[(f(x+h)-fx)/\,h^2\,|h,\, a\frown b-x,0]=\mathrm{D}^2fx\,/2 \,.\supset.$
$\exists\,(c,d)\ni[c\varepsilon\, a\frown x \,.\, d\varepsilon\, x\frown b : h\varepsilon\, c\frown d-x \,.\supset_h.\, f(x+h)>fx \,.\supset.$ Ths] (p

§S 3·8 $f,g\varepsilon\,\mathrm{qf}\Theta \,.\, \mathrm{l}'f'\Theta,\mathrm{l}f'\Theta,\mathrm{l}'g'\Theta,\mathrm{l}g'\Theta\,\varepsilon\mathrm{q} \,.\, \mathrm{S}(f,\Theta),\mathrm{S}(g,\Theta)\,\varepsilon\mathrm{q} \,.\supset.$
$\mathrm{S}[gx\,\mathrm{S}(f,0\vdash x)\,|x,\,\Theta]+\mathrm{S}[fx\,\mathrm{S}(g,0\vdash x)\,|x,\,\Theta]=\mathrm{S}(f,\Theta)\times\mathrm{S}(g,\Theta)$ (v
{ Hardy G. H. Mm. a.1901 t.30 p.185 } (v
Cette formule, qui coïncide au fond avec l'intégration par parties (§S 20·3) est donnée ici avec une hypothèse moins restrictive. Pour la Dem. voir §Σ 2·5 add. (v

4·1·2, 12·11. Au lieu de $|u$ lisez $/n\,|n$. (p

5·7 (p.150). Ajoutez
{ Wallis a.1655 p.428-433 } Continuation : §sin 12·2. (p

§S 10·9 $S(/, 1+Q)=\infty \quad . \quad n\varepsilon 1+Q . \supset . S(x^{-n} | x, 1+Q) = /(n-1)$
{ WALLIS a.1655 t.1 p.409 } (p

11·4 $m,n\varepsilon Q . \supset . S[x^m(1-x)^n | x, \Theta] = S[x^m/(1+x)^{m+n+2} | x, Q]$ (p

§e 1·62. Remplacez par:

·62 $\lim \sqrt[n]{\Pi(n+1\cdots n)}\,/n \,|n = 4/e$

[§lim P8·6 .⊃. $\lim \{\sqrt[n]{\Pi(n+1\ldots n)}\}/n \,|n$
$= \lim \{\Pi[n+1\cdots(n+1)]/(n+1)^{n+1}\} / \{\Pi(n+1\cdots n)/n^n\} \,|n$
$= \lim (2n+1)(2n+2)\,(n+2)^2 / (1+/n)^n \,|n = 4/e$]

Tiré du journal « Le matematiche pure ed applicate » a.1901 p.115

§e 1·7 $\min(x^x | x \text{ ‘}Q) = e\sqrt{(-/e)}$

·71 $\max[(x\sqrt{/x}) | x \text{ ‘}Q] = e\sqrt{/e}$

2·3 Dem [P·2 . $n\varepsilon N_1 . \supset . e = \Sigma(/r! | r, 0\cdots n) + \Sigma(/r! | r, n+N_1)$ (1)

$\Sigma(/r! | r, n+N_1) = /(n+1)!\,\{1+/(n+2)+/[(n+2)(n+3)]+\ldots\}$
$< /(n+1)!\,[1+/(n+1)+/(n+1)^2+/(n+1)^3+\ldots]$
$= /(n+1)!\,(n+1)/n = /(n!n)$ (2)

(1) . (2) .⊃. P]

2·5 (p.155)

$n\varepsilon N_1 . x\varepsilon q\text{-}\iota 0 . \supset . (e^{nx}-1)/(e^x-1) = \Sigma\{x^r \Sigma[s^r | s, 0\cdots(n-1)]/r! \,| r, N_0\}$

§e 5·21 L'intégrale considérée dans la 5·21 est dite « intégral eulérienne de seconde espèce », et s'indique par $\Gamma(n+1)$ (Legendre *Exer.* t.2 p.4).

5·31 $n\varepsilon Q . x\varepsilon Q . \supset . e^x S(e^{-z} z^n | z, \Theta x) = \Sigma[x^{n+r}/\Pi(n+1\cdots r) \,| r, N_1]$

5·4 { LAGUERRE Fdm. BsF. a.1879 t.7 p.72 }

Cette intégrale est dite « logarithme-integrale » ; (Soldner a.1809), « hyperlogarithme » (Mascheroni), « Logologarithmus (Caluso) ».

On l'indique par $\mathrm{li}\, e^{-x}$ (p

§log 2·4 remplacez par:

·4 $a,b\varepsilon Q . \supset .$

$\log[(a+b)/2] = (\log a+\log b)/2+\Sigma\{(-1)^{n-1}[(a-b)^2/(4ab)]^n/(2n) \,| n, N_1\}$

[$(a+b)/2 = \sqrt{ab}\,\sqrt{[1+(a-b)^2/(4ab)]}$. P2·1 .⊃. P]

·41 $\log[(a+b)/2] = (\log a+\log b)/2+\Sigma\{[(a-b)/(a+b)]^{2n}/(2n) \,| n, N_1\}$

[$(a+b)/2 = \sqrt{(ab)}\,\sqrt{\{1-[(a-b)/(a+b)]^2\}}$. P2·1 .⊃. P] (p

Koralek a.1851, a remarqué, que en supposant connus les logarithmes des nombres 2, 3, 7, 11, 13, cette formule, où la série est reduite à son premier terme, donne le logarithme d'un nombre quelconque avec une erreur inferieure à la moitié d'une unité décimale du septième ordre (Cauchy s.1 t.11 p383).

§log 2·9 $x\varepsilon Q . \supset .$

$\log x = [(x - x^{-1})/2] \,/\, \Pi\, [(x\upharpoonleft 2^{-r} + x\upharpoonleft -2^{-r})/2 \,|r, N_1]$ Dfp

$\log x = [(x-1)/\Pi\, [(1+x\upharpoonleft 2^{-r})/2 \,|r, N_1] =$

$(1-x^{-1})/\Pi\, [(1+x\upharpoonleft -2^{-r})/2 \,|r, N_1]$

{ SEIDEL JfM. a.1871 t.73 p.276, 278 } (v

§log 4·4 Au lieu de $1-\Sigma$ lisez· $\log x - \Sigma$. (p

§C ·6 $C = -S(e^{-x}\log x \,|x, Q)$ (p

Ajoutez: §Fc = (fraction continue)

✱ 1. $a\varepsilon\, qfN_1 . n\varepsilon N_1 . \supset .$ ·0 $Fc(a, 1\cdots 1) = /a$ Df

·01 $Fc[a, 1\cdots(n+1)] = /[a_1 + Fc(a_{1+r}|r, 1\cdots n)]$ Df

·02 $Fc(a, N_1) \doteq \lim Fc(a, 1\cdots n)\,|n$ Df

$a\varepsilon\, N_1 fN_1 . n\varepsilon N_1 . \supset .$

·1 $Fc(a, 1\cdots n)\ \varepsilon\ R\sim(1-R_0)$

·2 $Fc(a, N_1)\ \varepsilon\ \theta\text{-}R$

Soit a une suite de quantités, et n un nombre. $Fc(a, 1\cdots n)$ indique la fraction continue formée avec les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

On l'appelle aussi « réduite d'ordre n », selon plusieurs Auteurs (Baltzer ...) d'autres commencent la fraction continue par un entier a_0, et alors la réduite considérée est d'ordre $n+1$.

La notation $\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$ est incommode.

Cataldi, *Trattato del modo brevissimo di trouare la Radice quadra...* a.1613 p.70:

« Notisi, che non si potendo comodamente nella stampa formare i rotti, & rotti di rotti come andariano,... noi da qui inanzi gli formaremo tutti à questa similitudine

Di 18. la R sia $4.\ \&\ \frac{2}{8.}\ \&\ \frac{2}{8.}\ \&\ \frac{2}{8.}\ \&\ \frac{2}{8.}$

facendo vn punto all'8 denominatore di ciascun rotto, à significare, che il seguente rotto è rotto d'esso denominatore. »

J. Müller *Allg. Arithm* :a.1838 l'a remplacée par $\frac{1}{a_1} \cdot + \frac{1}{a_2} \cdot + \cdots + \frac{1}{a_n}$, modifiée en $\frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\ldots$ par d'autres.

La notation, que nous adoptons, est très commode, et elle est d'accord avec toutes les notations du Formulaire.

$a \varepsilon N_1 f N_1 . n \varepsilon N_1 . \supset .$

·3 $\mathrm{nt}\,\mathrm{Fc}[a, 1\cdots(n+2)] = a_{n+2} \times \mathrm{nt}\,\mathrm{Fc}[a, 1\cdots(n+1)] + \mathrm{nt}\,\mathrm{Fc}(a, 1\cdots n)$

·31 dt » » » dt » » dt »

·32 $\mathrm{Fc}[a, 1\cdots(n+1)] - \mathrm{Fc}[a, 1\cdots n] =$
$(-1)^n / \{\mathrm{dt}\,\mathrm{Fc}(a, 1\cdots n) \times \mathrm{dt}\,\mathrm{Fc}[a, 1\cdots(n+1)]\}$

La règle ici expliquée se rencontre dans Schwenter Daniel, ***Deliciae Physico-mathematicae***, Nürnberg a.1636 p.111. Voir Favaro BBonc. t.7 p.57.

·4 $\mathrm{Fc}(a, N_1) - \mathrm{Fc}(a, 1\cdots n)\ \varepsilon\ \theta(-1)^n / \{[\mathrm{dt}\,\mathrm{Fc}(a, 1\cdots n)]^2$

·5 $\mathrm{dt}\,\mathrm{Fc}(a, 1\cdots n) = \mathrm{dt}\,\mathrm{Fc}[a(n-r+1)|r, 1\cdots n]$
{ CAYLEY, Phil. Magaz. a.1853 }

$\mathrm{ntFc}(a, 1\cdots n)$ s'appelle « continuant d'ordre n de la suite a » (Sylvester AJ. a.1878 t.1 p.344).

·6 $x \varepsilon R . \supset . \exists N_1 \cap n \ni \{\exists N_1 f 1\cdots n \cap a \ni [x = Ex + \mathrm{Fc}(a, 1\cdots n)]\}$
[=§Q 84·1]

·7 $x \varepsilon\ \theta\text{-}R . \supset . x = \mathrm{Fc}(E'(\beta/)^n x\ |n, N_1)$

·8 $(\sqrt{5}-1)/2 = \mathrm{Fc}\,(1, 1, 1, \ldots) = \mathrm{Fc}\ \eta(\iota 1\ F\ N_1)$

Les nt de cette fraction continue forment la « suite de Fibonacci ».

·81 $a \varepsilon N_1 . \supset . \sqrt{(a^2+1)} = a + \mathrm{Fc}\,(2a, 2a, 2a, \ldots)$

·9 $e = 2 + \mathrm{Fc}(1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots)$ [= §e 3·1

·91 $\pi = 3 + \mathrm{Fc}\,[7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1, \ldots]$ { WALLIS t.2 p.51 }

✱ 2·1 $a \varepsilon\ QfN_1 . \supset : \mathrm{Fc}(a, N_1)\ \varepsilon Q . =. \Pi[(1+a_r)|r, N_1] = \infty$
{ OPPERMANN, *Zeuthen T.* a.1884 p.163 } (p

Ajoutez: § Δ = (différence)

Δ est l'initiale de « différence ». La formule Δfx doit être décomposée en $(\Delta f)x$, et non en $\Delta(fx)$, qui n'a pas de signification; cette remarque est analogue à celle pour le signe de dérivation D.

L'application exacte des notations du Formulaire empêche toute ambiguïté. P. ex. la notation $\Delta 0^n$, qu' on rencontre dans plusieurs A., et qui ne signifie $\Delta(0^n)$, ni $(\Delta 0)^n$, sera ici remplacée par $\Delta(x^n\ |x)0$.

$+ -$ ·0 $f \varepsilon\ \mathrm{qf}N_0 . x \varepsilon N_0 . \supset .$
$(\Delta f)x = \Delta fx = f(x+1) - fx$ DfΔ

·1 $\mathrm{Hp}\cdot 0 . g \varepsilon\ \mathrm{qf}N_0 . \supset . \Delta[(fx+gx)|x]x = \Delta fx + \Delta gx$

$\times$ ·2 $\mathrm{Hp}\cdot 0 . a \varepsilon q . \supset . \Delta[(a \times fx)|x]x = a \times \Delta fx$

/ ·23 $n\varepsilon N_1 . \supset . \Delta^n/x = (-1)^n n! / \Pi(x+0\cdots n)$

⅊ ·3 $a\varepsilon q . x\varepsilon N_0 . \supset . \Delta(a^x|x)x = a^x(a-1)$

·31 $n\varepsilon N_1 . \supset . \Delta^n (x^n|x)0 = n!$

Σ ·4 Hp·0 $. \supset . \Delta[\Sigma(f, 0\cdots x) |x]x = f(x+1)$

·41 $x,y\varepsilon N_1 . \supset . \Delta[\Pi(x+0\cdots y) |y]y = \Pi(x+1\cdots y)$

·42 » » $\Delta / \Pi[(x+0\cdots y) |y]y = -(y+1)/ \Pi[x+0\cdots(y+1)]$

Cmb ·5 Hp·0 $. n\varepsilon N_1 . \supset . f(x+n) = \Sigma[\mathrm{Cmb}(n,r)\Delta^r fx |r, 0\cdots n]$

·6 Hp ·5 $. \supset . \Delta^n fx = \Sigma[(-1)^r \mathrm{Cmb}(n,r) f(x+n-r) |r, 0\cdots n]$

} ·5-·6 MERCATOR a.1668 p.12 {

Ajoutez: § prob = (Probabilité)

$a,b,s\varepsilon$ Cls . Nums $\varepsilon N_0 . \supset .$

·0 $\mathrm{prob}(a,s) = \mathrm{Num}(a\frown s) / \mathrm{Nums}$ Df

·01 $a \supset s . \supset . \mathrm{prob}(a,s) = \mathrm{Num}a / \mathrm{Nums}$ Dfp

·1 $\mathrm{prob}(\wedge,s) = 0$ ·11 $\mathrm{prob}(s,s) = 1$

·2 $\mathrm{prob}(-a, s) = 1 - \mathrm{prob}(a,s)$

·3 $a\frown b = \wedge . \supset . \mathrm{prob}(a\smile b, s) = \mathrm{prob}(a,s) + \mathrm{prob}(b,s)$

·31 $\mathrm{prob}(a\smile b, s) + \mathrm{prob}(a\frown b, s) = \mathrm{prob}(a,s) + \mathrm{prob}(b,s)$

NOMBRES COMPLEXES

§Dtrm (p.165) 1·2. Lisez ·2 au commencement. (p

$m\varepsilon N_1 . a\varepsilon \mathrm{qF}(1\cdots m \,\vdots\, 1\cdots m) . \supset :$

✱ 1·12 $r,s\varepsilon 1\cdots m . r<s . \supset_{r,s} . a(r,s) = 0 : \supset .$
$\mathrm{Dtrm}a = \Pi[a(r,r) |r, 1\cdots m]$

·13 $r,s\varepsilon 1\cdots m . r+s > m+1 . \supset_{r,s} . a(r,s) = 0 : \supset .$
$\mathrm{Dtrm}a = (-1)^{[m(m-1)/2]}\Pi[a(r, m+1-r) |r, 1\cdots m]$

·14 $r\varepsilon 1\cdots m : s\varepsilon 1\cdots m . \supset_s . a(r,s) = 0 : \supset . \mathrm{Dtrm}a = 0$

·21 $h,l\varepsilon 1\cdots m . h \neq l : r\varepsilon 1\cdots m . \supset_r . a(r,h) = a(r,l) : \supset . \mathrm{Dtrm}a = 0$

·22 $m\varepsilon N_1 . a,b\varepsilon \mathrm{qF}(1\cdots m \,\vdots\, 1\cdots m) . k\varepsilon q . h\varepsilon 1\cdots m : r\varepsilon 1\cdots m . \supset_r .$
$a(r,h) = kb(r,h) : l\varepsilon 1\cdots m \neq h . r\varepsilon 1\cdots m . \supset_{r,l} . a(r,l) = b(r,l) : \supset .$
$\mathrm{Dtrm}a = k\mathrm{Dtrm}b$

·23 $m\varepsilon N_1 . a,b\varepsilon \mathrm{qF}(1\cdots m \,\vdots\, 1\cdots m) . k\varepsilon q : r,s\varepsilon 1\cdots m . \supset_{r,s} .$
$b(r,s) = k^{r-s}a(r,s) : \supset . \mathrm{Dtrm}a = \mathrm{Dtrm}b$

·24 $m\varepsilon N_1 . a,b\varepsilon \mathrm{qF}(1\cdots m \,\vdots\, 1\cdots m) . k\varepsilon q . h,l\varepsilon 1\cdots m . h \neq l :$
$r\varepsilon 1\cdots m . \supset_r . b(r,h) = a(r,h) + ka(r,l) : p\varepsilon 1\cdots m \neq h . r\varepsilon 1\cdots m . \supset_{r,p} .$
$b(r,p) = a(r,p) : \supset . \mathrm{Dtrm}a = \mathrm{Dtrm}b$ (Cantoni

§ lin ✱ 16·0 $m,n\varepsilon N_1 . u\varepsilon \mathrm{Clsq}_n . f\varepsilon q_m fu . x\varepsilon u\smile\delta u . \supset .$
$D(f,u,x) = \imath (q_m f q_n)\mathrm{lin} \frown g\ni[\mathrm{lim}\{[fy-fx-g(y-x)]/\mathrm{mod}(y-x)$
$|y, u, x\} = 0]$ Df

Définition de la dérivée d'un nombre complexe fonction d'un autre nombre complexe. Elle est une tranformation linéaire, representée par une matrice dont les éléments sont les « derivées partielles des m coordonnées de f par rapport aux n variables. Ex. §vct 61·0

Cette dérivée est la « déformation infiniment petite d'un corps », considérée dans la physique mathématique.

·1 $m,n,p\varepsilon N_1 . k\varepsilon \mathrm{Cls'q}_m . k\supset\delta k . f\varepsilon q_n f k . g\varepsilon q_p f k . x\varepsilon k .$
$D(f,k,x)\ \varepsilon\ (q_n f q_m)\mathrm{lin} . D(g, f'k, fx)\ \varepsilon\ (q_p f q_n)\mathrm{lin} . \supset .$
$D(gf, k, x) = D(g, f'k, fx)\ D(f,k,x)$

·2 $m,n\varepsilon N_1 . u\varepsilon \mathrm{Cls'q}_n . \mathrm{l'mod}u\ \varepsilon q_n .$
$g\varepsilon (q_n fu)\mathrm{sim} . Dg\ \varepsilon\ (\mathrm{Subst}\ q_n)fu . \mathrm{Dtrm}\ Dg\ \varepsilon\ Qfu .$
$f\varepsilon q_m f(g'u) . S(f, g'u)\ \varepsilon\ q_m . \supset .$
$S(f, g'u) = S(fg\times \mathrm{Dtrm}\ Dg, u)$

{ LAGRANGE BerlinM. a.1733, pour $n=3$; CAUCHY a.1845 s.1 t.9 p.271 }

Dtrm Dg est dit « déterminant jacobien »

§q′ 21·2 $w+xi+yk+zik = \mathrm{Sb}[w+y, -x+z, x+z, w-y]$
$\mathrm{Sb}[(p, q), (r, s)] = [(p+s) + (r-q)i+(p-s)k + (q+r)ik]/2$ (p

§q′ P3·5 (p. 172). Ajoutez l'Hp $a-=0$. (c

§π (p.175):

P1·1. Au lieu de $2\theta X^{-2}$ lisez θX^{-2}. (c
P1·4. Au lieu de θX^{-4} lisez θX^{-5}. (c
P1·5. Au lieu de θX^{-5} lisez θX^{-6}. (c
P1·85. Au lieu de $-\theta X^{-7}$ lisez $+\theta X^{-6}$. (c

§π 3·2. On peut aussi écrire la formule de Wallis sous la forme suivante, qui donne l'expression du facteur général:

$\pi = 2\Pi\{2E[(n+1)/2] / [2E(n/2)+1]\ |n, N_1\}$
·21 $\pi/2 > (2 . 4 . 6 \ldots 2n)^2 / \{[1 . 3 . 5 \ldots (2n-1)]^2(2n+1)\}$
$\pi/2 < (2 . 4 . 6 \ldots 2n)^2(2n+2) / [1 . 3 . 5 \ldots (2n+1)]^2$
{ WALLIS t.1 p.467 } (p

10·6 $S[\sqrt{(1-x^2)}|x, \Theta] = \pi/4$ { WALLIS a.1655 p.417 :

« Circulus ad Quadratum Diametri, (vel etiam Ellipsis quælibet ad Parallelogrammum sibi circumscriptum,) eam habet rationem, quam habent

Radices Quadraticæ universales Residuorum seriei infinitæ Æqualium serie Secundanorum mulctatæ, ad seriem illam Æqualium. » } (p

11·21 $a\varepsilon Q \supset S[e^{-(x^2+a^2/x^2)}|x, Q] = \sqrt{\pi}\, e^{-a}/2$
} LAPLACE (ParisM. a.1810, publ. a.1811) Oeuvres t.12 p.368 } (v

11·1 } EULER PetrC. a.1730 (publ. a.1738) t.5 p.44 } (v

§sin 1·6 Cette même proposition, avec la 2·4 add., a été employée (mais non demontrée, ni même énoncée en général) par Aristarchus = *Ἀριστάρχος, Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης* a.. —310 ⊢ —250), Paris a.1810 p.40. (v

§sin 2·4 $x,y\varepsilon\ \theta\pi/2\ .\ x>y \supset tx/x > ty/y$
} ARISTARCHUS p.36; voir §sin 1·6 add. } (v

4·1. $sx-sy = 2s[(x-y)/2]\, c[(x+y)/2]$ (c

4·1. *Note.* — La formule $\sin a \sin b = [\cos(a-b)-\cos(a+b)]/2$ permet de reduire la multiplication à l'addition au moyen d'une table des sinus. C'était la méthode, appellée *προσθαφαίρεσις*, suivie par les astronomes avant la découverte des logarithmes. Cette méthode attribuée à Joh. Werner (a.1488 ⊢ 1528) par plusieurs A., (voir M. Cantor t.2 p.454), a été abandonnée étant d'usage moins commode que la méthode des logarithmes. (v

5·3 Substituez aux citations d'Euler et de Gauss les suivantes:
·32 } EULER a.1737 PetrC. t.9 p.231 } (v
·33 » » » » » (v
·35 } MACHIN; voir JONES a.1706 p.263 } (v

·43 $\pi = 16\, t^{-1}/5 - 4\, t^{-1}/70 + 4\, t^{-1}/99$
} EULER a.1737 PetrC. t.9 p.232 } (v

6·3 (p.185) . Au lieu de $y-\varepsilon\ 2n\pi$ lisez: $y-\varepsilon\ n\pi$. (c

8·21 } EULER *Calc. Int.* a.1794 t.4 p.235 (PetrNC. a.1774 t.19) }
8·23 } EULER, *Calc. Diff.*, Pars II, Art. 57-93 } (v
·24 $x\varepsilon\ \theta\pi/2\ \supset \Pi\{\cos(x/2^n)\ |n, N_1\} = \sin x/x$ (v
} EULER a.1737 PetrC. t.9 p.235 } (v

8·3. Au lieu de /4 lisez: /2. (Ramorino

8·8 } PEACOCK a.1820 *Examples of the diff. Calculus*, Cambridge p.67 } (v

·81 $\pi = 4\Sigma\{t^{-1}/(2^n-1)\ |n, N_1+1\} = 4(t^{-1}/3 + t^{-1}/7 + t^{-1}/15+...)$
} PEACOCK a.1820 p.68 } (v

·82 $\pi = 4\Sigma\{t^{-1}/(n^2+n+1)\ |n, N_1\}$ } EULER PetrNC. a.1764 t.9 }(v

§sin 8·83 $a\varepsilon\ \theta\pi/2\ .\supset .\ /a = /ta + \Sigma\{2^{-r}t(2^{-r}a)\ |r,\ N_1\}$
{ EULER a.1746 CorrM. t.1 p.371 } (v

9·1. Au lieu de n lisez : n. (v

12·0 $S(\sin,\ \Theta\pi/2) = S(\cos,\ \Theta\pi/2) = 1$ {WALLIS a.1670 p.707 :
« figura sinuum rectorum totius quadrantis quadrato radii æqualis est ». } (p

12·8 Remplacez par :

·8 $z\varepsilon\ \theta\pi\ .\supset .\ S[/(1-2x\cos z+x^2)\ |x,\ \Theta] = (\pi-z)/(2\sin z)$
{ EULER *Calc. Integr.* a.1794 t.4 p.288 (PetrNC a.1774 t.19) } (v

12·9 { EULER BerolMisc. a.1743 t.7 p.151 } (v

12·901 $m,n\varepsilon N_1\ .\ m<n\ .\supset .$
$S[(x^{m-1}+x^{n-m-1})/(1+x^n)\ |x,\ \Theta] = \pi/[n\sin(m\pi/n)]$
{ EULER BerolMisc. a.1743 t.7 p.181 } (v

12·92 $S[(\cos x + x\sin x)/(1+x^2)\ |x,\ Q] = \pi/e$ (v
{ LAPLACE (ParisM. a.1782, publ. a.1785) Oeuvres t.10 p.264 } (v

13·1·2 { EULER *Calc. Integr.* a.1794 t.4 p.339-343 (presenté MS. à l'Acad. de St.Petersbourg a.1781) } (v

Ces P sont attribuées ordinairement à Fresnel. Euler qui les a données ici pour la première fois, n'a pu pourtant demontrer la 13·1. (v

13·31 $S\{x\sin x\ /\ [1+(\sin x)^2]\ |x,\ \Theta\pi\} = \pi[\log(\sqrt{2}+1)]/\sqrt{2}$
(Ramorino

13·5 { EULER PetrA. a.1777 t.2 p.7 } (v

17·1 $g\varepsilon\ [q\ f\ 2\Theta\pi]cres_0\ .\ h\varepsilon\ [q\ f\ 2\Theta\pi]decr_0\ .\ f=g-h\ .\ x\varepsilon\ 2\Theta\pi\ .\supset .$
$fx = S(f,\ 2\Theta\pi)\ /\ (2\pi) + \Sigma\{\cos(nx)\ S[fz\cos(nz)\ |z,\ 2\Theta\pi]\ |n,\ N_1\}\ /\pi$
$+ \Sigma\{\sin(nx)\ S[fz\sin(nz)\ |z,\ 2\Theta\pi]\ |n,\ N_1\}\ /\pi$
{ FOURIER, ParisM. a.1807 ; a.1822 p.212 :

« Ces théoremes conviennent à toutes les fontions possibles, soit que l'on en puisse exprimer la nature par les moyens connus de l'analyse, soit qu'elles correspondent à des courbes tracées arbitrairement ».

Les fonctions de la forme $g-h$, où g est croissante, h décroissante, sont dites « à variation bornée » (Jordan). (p

§B 1·01 $a\varepsilon\ qfN_0\ .\ a_0=1 : n\varepsilon N_1\ .\supset n\ .$
$\Sigma[a_r/(n-r)!\ |r,0\cdots(n-1)]=0\ :\supset:\ a_1=-/2 : n\varepsilon N_1\ .\supset n\ .$
$a_{2n} = (-1)^{n-1}B_n/(2n)!\ .\ a_{(2n+1)}=0$ (p

§B (p.190). *Note.* — La notation du Formulaire a été employée par Binet, JP. a.1839 t.16 cah.27 p.240. (v

1·20 $a\varepsilon N_1 . \supset . (a+1)(2a+1)\Sigma\{(-1)^{r-1}C(2a,2r-2)\, B_r /r\, |r,1\cdots a\} = 1$

[$(2a+1,1) \mid (m,n)P\cdot 2 . \supset .$

$1 = /(2a+2) + /2 + \Sigma\{(-1)^{r-1}\, C(2a+1,2r-1)\, B_r /2r\, |r,\, 1\cdots a\}$ (1)

$(2a,1) \mid (m,n)P\cdot 2 . \supset .$

$1 = /(2a+1) + /2 + \Sigma\{\ldots\ldots\ldots C(2a,2r-1)\ldots\ldots\ldots\}$ (2)

(1).(2) $. \supset .$

$0 = /(2a+2) - /(2a+1) + \Sigma\{\ldots\ldots\ldots C(2a,2r-2)\ldots\ldots\ldots\}$ (3)

(3) $. \supset . /2(a+1)(2a+1) = \Sigma\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ (4)

(4) $. \supset . 1 = (a+1)(2a+1)\, \Sigma\{\ldots\ldots\ldots\ldots /r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$] (pd

§ B P1·23 (p.191). Au lieu de $Np\text{-}(N_1+3)$ lisez : $Np\sim(N_1+3)$. (c

§B 2·11 $r\varepsilon N_1 . \supset . B_r = (-1)^{r+1}\, D^{2r}\, [x/(e^x-1)\, |x,\, q,\, 0]$ Dfp (p

VECTEURS

§vct 8·6. Au lieu de $(a-b)\times(a-c) = 0$ lisez : $(a-c)\times(b-c) = 0$. (c

§vct 14·2. Ce théorème est contenu dans l'écrit suivant de Stewart: *Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics.* Edinburgh a.1746. (v

34·1 La démostration qui accompagne cette P est la traduction de celle donnée par Cauchy (s.1 t.9 p.264), par la méthode des projections. En remplaçant les projections par les produits $\times$, les deux pages de Cauchy sont réduites à deux lignes. (p

§vct 45·33. Lisez le second membre ainsi ... = Transl$[(1-e^{-it})(q-p)]$ (v

§vct ❋ 53.

$o\varepsilon$ pnt . $a,b\varepsilon$ vct . mod$a$ = mod$b$ = 1 . $a\times b = 0$. $i = b/a$ $. \supset .$

·1 $\mathrm{Arc}[(o+e^{it}\, a)\, |t,\ 2\Theta\pi] = 2\pi$

Le point considéré décrit une « circonférence ».

·2 $x\varepsilon Q . \supset . \mathrm{Arc}[(o+xa+x^2 ia/2)\, |x,\ \Theta x] = S[\sqrt{(1+x^2)}\, |x,\ \Theta x]$
$= x/2\, \sqrt{(1+x^2)} + /2 \log[x+\sqrt{(1+x^2)}]$

Le point décrit une « parabole ordinaire ».

·3 $p,q\varepsilon Q . \supset . \mathrm{Arc}[(o + p\cos t\, a + q\sin t\, ia)\, |t,\ 2\Theta\pi] =$
$4S\{\sqrt{[(p\sin t)^2+(q\cos t)^2]}\, |t,\ \Theta\pi/2\}$

Le point décrit l' « ellipse de démi axes p et q ». Voir §sin 14·1·2.

·4 $x\varepsilon Q . \supset . \mathrm{Arc}\{(o+ ax + ia(e^x+e^{-x})/2]\, |x,\ \Theta x\} = (e^x-e^{-x})/2$

La courbe considérée est dite « catenaria », « chaînette ». (p

Ajoutez: coord ✱ 62.

$i\varepsilon \text{ vct} \cdot \iota 0 \,.\, j\varepsilon \text{ vct} \cdot \text{q}i \,.\, k\varepsilon \text{ vct} \cdot (\text{q}i + \text{q}j) \,.\, u\varepsilon \text{ vct} \,.\supset:$

$\cdot 0 \quad \text{coord}(u;\, i,j,k) = \eta\text{q} \cap x\ni(u - x\ \varepsilon\ \text{q}j + \text{q}k)$ Df

$\cdot 1 \quad \text{coord}(u;\, i,j,k) \mid u\ \varepsilon\ (\text{qf vct})\text{lin}$

· coord(u; i,j,k) signifie « la première coordonnée du vecteur u, par rapport aux vecteurs i,j,k ».

✱ 70. a = (produit alterné)

L'expression $uavaw$ est le « produit alterné » ou « produit extérieur » des vecteurs u,v,w.

Grassmann a.1844 l'indique par $[uvw]$; on peut supprimer les parenthèses, qui n'ont pas ici la valeur donnée par § 1 P 1·2, et indiquer le « trivecteur » par uvw, notation adoptée par plusieurs A. Bien qu'elle ne produise pas d'ambiguïté avec le produit $u \times v$ considéré dans P8, toutefois, pour plus grande clairté, nous introduisons un nouveau signe de multiplication sous la forme a, initiale de « alterné ».

La même opération a été rencontrée, dans des cas particuliers, pa Hamilton a.1845 (voir P71), et par De Saint Venant (ParisCR. 15. 9. 1845), qui l'appelle « produit géométrique ».

Cauchy a.1853 (s.1 t.11 p.444) l'appelle « produit augulaire »; les vecteurs i, j k sont des « clefs »

Voir la bibliographie dans RdM. a.1895 p.179.

Nous définissons (P·0) d'abord le rapport de deux trivecteurs qui est un nombre; puis le trivecteur nul, et l'égalité de deux trivecteurs. Les v^3 se présentent ici pas abstraction, et forment un système d'objets irréductible avec les systèmes précédents.

$uavaw$ est représenté géométriquement par le parallelépipède construit sur u,v,w, considéré en grandeur et en sens. On peut partir de cette idée géometrique pour édifier une théorie des vecteurs.

v^2 signifie « bivecteur. » On peut le représenter par le parallélogramme construit sur u et v. Les v^2 forment un système linéaire à 3 dimensions.

$u,v,w,u',v',w' \varepsilon \text{ vct} \,.\, i\varepsilon \text{ vct} \cdot \iota 0 \,.\, j\varepsilon \text{ vct} \cdot \text{q}i \,.\, k\varepsilon \text{ vct} \cdot (\text{q}i + \text{q}j) \,.\supset\therefore$

$\cdot 0 \quad (uavaw)/(iajak) =$

$$\text{Dtrm}\left\{\begin{matrix} [\ \text{coord}(u;\, i,j,k), & \text{coord}(u;\, j,k,i), & \text{coord}(u;\, k,i,j)\ ], \\ [\ v & v & v\ ], \\ [\ w & w & w\ ] \end{matrix}\right\} \text{ Df}$$

$\cdot 1 \quad uavaw = 0 \,.=:\, r\varepsilon \text{ vct} \cdot \iota 0 \,.\, s\varepsilon \text{ vct} \cdot \text{q}r \,.\, t\varepsilon \text{ vct} \cdot (\text{q}r + \text{q}s) \,.\supset_{r,s,t} \cdot$

$(uavaw)/(rasat) = 0$ Df

$\cdot 11 \quad uauav = 0$

·12 $uavaw = 0 .=.$
$\exists(x,y,z)\ni[x,y,z\varepsilon q . -(x=y=z=0) . xu+yv+zw=0)$ Dfp

·13 $(u+u')avaw = uavaw + u'avaw$

·2 $v^2 = [(uavaw) \mid (u;v;w)]$ (vct:vct:vct) = (trivecteur) Df

$a,b,c\varepsilon v^2 . m\varepsilon q . \supset .\therefore$

·3 $a=b \quad .=: x\varepsilon\ v^2-\iota 0 . \supset x . a/x = b/x$ Df

.31 $a = b+c .=: \quad » \quad . \supset x . a/x = b/x + c/x$ Df

.32 $a = mb .=: \quad » \quad . \supset x . a/x = m(b/x)$ Df

·33 $x\varepsilon\ v^2-\iota 0 . \supset . a/x\ \varepsilon q$

·4 $uav = u'av' .=: w\varepsilon$ vct $. \supset w. uavaw = u'av'aw$ Df

·41 $uav = 0 .=: \quad w\varepsilon$ vct $. \supset w. uavaw = 0$ Df

·42 $(uav)aw = uavaw$ Df

·5 $v^2 = [(uav) \mid (u;v)]$ '(vct : vct) = (bivecteur) Df

·6 $a,b,c\varepsilon\ v^2 . m\varepsilon q . \supset .\therefore$

$a=b \quad .=: w\varepsilon$ vct $. \supset w. aaw = baw$ Df

$a=0 \quad .=: \quad » \quad » \quad = 0$ Df

$a=b+c .=: \quad » \quad » \quad = baw + caw$ Df

$a=mb .=: \quad » \quad » \quad = m(baw)$ Df

I ❋ 71.

$i,j,k\varepsilon$ vct . mod$i$ = mod$j$ = mod$k$ = 1 . $i\times j = j\times k = k\times i = 0 . \supset$:

·0 $I = (i,j,k)/(jak,\ kai,\ iaj)$ Df

L'opération I est dite « indice ». Elle fait correspondre à chaque v^2 un vct, normal au v^2, et ayant même la grandeur. Notre I(uav) coïncide avec V(uv) de Hamilton. L'opération I dépend des vecteurs i,j,k. Si on les change, I vient multiplié par ± 1. En général on prend i,j,k dirigés « en avant, à droite, en haut ».

·1 $a\varepsilon\ v^2 . \supset . Ia\ \varepsilon$ vct

·2 $a,b\varepsilon\ v^2 . \supset . I(a+b) = Ia + Ib$ (p

❋ 80. Volum = (volume)

·0 $u\varepsilon$ Cls'pnt $. \supset .$ Volum$u$ = (volume intérieur de u) = $l'\ x\ni[\exists\ (o,i,j,k,h)\ni\{o\varepsilon$ pnt . $i,j,k\varepsilon$ vct . $i^2 = j^2 = k^2 = 1$. $i\times j = j\times k = k\times i = 0$. $h\varepsilon Q$. $x = h^3\times$ Num$(p,q,r)\ni[p,q,r\varepsilon n$. $o + (p+\theta)hi + (q+\theta)hj + (r+\theta)hk \supset u]\}]$ Df

Soit u une classe de points ou figure. Prenons un point o, trois vecteurs unitaires orthogonaux i, j, k, et un nombre positif h. Si p, q, r sont des nombres entiers, $o + (p+\theta)hi + (q+\theta)hj + (r+\theta)hk$ est le cube

dont un sommet est $o + phi + qhi + rhk$, et les côtés, dirigés selon les axes coordonnés, ont la longueur h. En variant p, q, r, on divise tout l'espace en cubes. Le nombre de ces cubes qui sont contenus dans la figure u, multiplié par h^3 (volume d'un cube), donne le volume d'une figure composée de cubes juxtaposés, et intérieure à la figure donnée. Ce volume dépend du choix des axes coordonnés, et du côté h. La limite supérieure de ces volumes, envariant les axes et h, est dite le « volume intérieur de u ».

$$\cdot 01 \quad \mathrm{Hp}\cdot 0 \;.\supset.\; \mathrm{Volum}'u = (\text{Volume extérieur de } u) =$$
$$l_{,}x\ni[\text{———————————————————————————————}$$
$$\text{———————————————}\;.\; x = h^3 \times \mathrm{Num}(p,q,r)\ni[p,q,r\,\varepsilon\,\mathrm{n}\;.$$
$$\ni[o+(p+\theta)hi + (q+\theta)hj + (r+\theta)hk] \frown u]\}] \qquad \mathrm{Df}$$

$$\cdot 02 \quad \mathrm{Hp}\cdot 0 \;.\supset.\; \mathrm{Volum}u = \eta(\iota\mathrm{Volum}_{,}u \frown \iota\mathrm{Volum}'u) \qquad \mathrm{Df}$$

L'idée du volume d'une figure peut être considérée comme intuitive. Les règles pour trouver les volumes des figures plus simples sont très anciennes. Les exemples cités dans §π 1·1 de Ahmés a. —2000, ont pour but la mesure du volume des cylindres.

Selon Euclide, on reconnaît l'égalité de deux volumes par la superposition, ou en les décomposant en parties superposables, ou par un procès de limite (lib.12 prop.5).

La question, si deux polyèdres ayant le même volume, soient décomposables en parties superposables, a été résolue negativement par

M. Dehn Göttingen G. a.1900 Heft 3.

« Ein reguläres Tetraeder keinem Prisma raumgleich sein kann, dass also Tetraeder und Prisma auf keine Weise in respective congruente Teile zerlegt werden können ». (p

$$\cdot 1 \quad r\,\varepsilon\,\mathrm{Q}\;.\; o\,\varepsilon\,\mathrm{pnt}\;.\supset.\; \mathrm{Volum}\,\{\mathrm{pnt} \frown p\ni[\mathrm{mod}(x-o) < r]\} = 4\pi r^3/3$$

{ Archimedes t.1 p.40 : *Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.* } (v

❋ 81. Area = (Aire)

$$\cdot 0 \quad u\,\varepsilon\,\mathrm{Cls'pnt}\;.\;\mathrm{Volum}u = 0\;.\supset.$$
$$\mathrm{Area}u = \lim\{\mathrm{Volum}\{\mathrm{pnt} \frown x\ni[l_{,}\mathrm{mod}(x-u) < h]\}/(2h)\;|h, \mathrm{Q}, 0\} \qquad \mathrm{Df}$$

Si la classe u a un volume nul, nous définissons l'aire de la figure u de la façon indiquée.

La considération des aires planes peut être faite comme pour les volumes, et l'on rencontre à peu près les mêmes difficultés.

La définition de l'aire d'une surface courbe quelconque donnée par Serret, Cours de calcul diff. et int. t.2 p.293, a été trouvée en même temps insuffisante

par H.A. Schwarz (Mathematische Abhandlungen Berlin a.1890 t.2 p.309), et par nous (Lincei Acc. 19 genn. 1890), où nous l'avons remplacée par une autre, analogue à la définition de Arc (P 56) et fondée sur la considération des bivecteurs. Nous en choisissons ici une plus élémentaire. (p

La définition donnée ici avait été reconnue possible par

BORCHARDT C. W. (Gesammelte Werke Berlin a.1888 p.67) a.1854 JdM. t.19 p.369 :

« On sait que le volume compris entre deux surfaces parallèles se reduit au produit de l'aire de l'une des deux surfaces par leur distance, lorsque cette dernière devient infiniment petite. L'inversion de ce resultat montre que l'aire d'une surface peut être considérée comme la limite vers laquelle converge le rapport, dont le numérateur est le volume compris entre la surface et sa parallèle, et le dénominateur la distance des deux surfaces. »

Sans avoir remarqué ce passage de Borchardt, cette même définition a été proposée par

H. MINKOWSKI (Jahresber. der Deutschen Math. Verein. Leipzig a.1901 t.9 p.115) :

« Es sei F eine Fläche. Man construire... den Bereich der Entfernung $\leqq r$, von F. Es sei $V(r)$ das Volumen dieses Bereichs, so kann der Grenzwert von $\frac{V(r)}{2r}$ für ein nach Null abnehmendes r (vorausgesetz, dass die Grösse $V(r)$ sowie dieser Grenzwert existirt), als die Oberfläche der Fläche F eingeführt werden ». H. Minkowski a donné aussi une définition analogue pour la longueur d'un arc, qui coïncide à peu près avec la 82·0. (v

·1 $r\varepsilon Q \,.\, o\varepsilon \text{ pnt} \,.\supset.\, \text{Area pnt} \frown x\ni[\text{mod}(x-o) = r] = 4\pi r^2$

{ ARCHIMEDES t.1 p.136 : *Πάσης σφαῖρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.* } (v

✱ 82. Arc

·0 $u\varepsilon \text{ Cls'pnt} \,.\, \text{Area}u = 0 \,.\supset.$

$\text{Arc}u = \lim\{\text{Volum}[\text{pnt} \frown x\ni[1, \text{mod}(x-u) < h]/(\pi h^2)] \mid h, Q, 0\}$ Df

·1 $o\varepsilon \text{ pnt} \,.\, i\varepsilon \text{ vct}\text{=}\iota 0 \,.\, r\varepsilon Q \,.\supset.$

$\text{Arc pnt} \frown x\ni[\text{mod}(x-o) = r \,.\, (x-o)\times i = 0] = 2\pi r$ (v

Ajoutez à la TABLE DES SIGNES.

a = produit alterné	add. p.106	prob = probabilité	p.101
Δ = différence	p.100	v^2 = bivecteur	p.107
Area = aire	p.109	v^3 = trivecteur	p.107
coord = coordonnée	p.106	Volum, = Volume intérieur	p.107
Fc = fraction continue	p. 99	Volum′ = » extérieur	p.108
I = indice	p.107	Volum = » propre	p.108

Ajoutez aux *Publications citées par une abréviation*:

BerlinAbh. = Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

GöttingenNachr. = Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch - physikalische Klasse.

WarszawaP. = Prace Matematyczno-fiziczne, Warszawa.

PhilMagaz. = The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. Conducted by Lord Kelvin, G. F. Fitzgerald, W. Francis. London.

ZeuthenT. = Tidsskrifft for Mathematik (Copenhague).

Additions à la BIBLIOGRAPHIE

Toutes les citations sont relatives à ces additions.

Ahmès §vct 80*n*
Archimedes §vct 80·1 81·1
Arnaudeau §∧ 14·03
Aristarchus §sin 1·6 2·4
Binet §B 1·0*n*
Blater §∧ 14·03
Bonnet §lim 2·12 §D 4·4
Borchardt §vct 81*n*
Brigg §Log *n*
Catalan §lim 13·401
Cataldi § Fc 1·2
Cauchy §Σ10 §Dvr2·52
§lim 24·1 §D8*n* §lin16·2 §vct 70 *n*
Cayley §Fc 1·5
Cesàro §! 7·5 §lim18·6
Colson §Σ 10
Couturat §/ *n*
Darboux §cont 3·11
Dehn §vct 80
Descartes §Nprf
Dini §lim 15·31
Euclide §vct 80*n*
Euler §∧ 6·0 §! 7·71 §π 11·12
§sin 5·32·33·43 8·21·23·24·82
8·83 12·9·901 13·1·2·5.
Favaro §Fc 1·32*n*
Frenicle §Nprf
Fourier §sin 17·1
Grassmann §D 4·4 §vct 70*n*
Hadamard §Lm
Hamilton §vct 71*n*
Hardy §S 3·8
Haussner §Np 1·4
Jones §Num 82 §! 8 §sin 35
Jordan §sin 17·1 *n*
Koralek §log 2·41*n*
Kummer §∧ 6·1 §Np 2·01
Laguerre §e 5·4
Lagrange §∧ 9·09 §lin16·2
Legendre §e 5·21*n*
Maclaurin §∧ 9·30§ Σ20·6
Maurolycus §+ 4·3
Méray §/
Mercator §Δ ·6
Mertens §Np 12·6
Minkowski §vct 81*n*
Müller §Fc 1·2
Oppermann §Fc 2·1
Padé §Q 41·4*n*
Peacock §sin 8·8·81
Poincaré §D 8*n*
de Saint Venant §vct 70*n*
Schwarz §vct 81*n*
Schwenter §Fc 1·32*n*
Servois §⊃5·1 6·2 §– 1·5 §15
Staudt §Dvr 2·51
Stolz §/
Sylvester §Nprf §Fc 1·5*n*
Tannery §/
Vandermonde §! 6·3
Wallis §! 7·9 §S 5·7 10·9
§π10·6 §sin 12·0
Werner §sin 4·1*n*
Wlacq §Log*n*

Albino Nagy

Si spense inattesamente in Roma il 26 Marzo, nel suo trentaquatresimo anno, lasciando di sè gradito ricordo e non fugace rimpianto nei colleghi e nei discepoli.

ALBINO NAGY (1) nacque a Traù, in Dalmazia, il 2 ottobre 1866; non ebbe fratelli ed aveva appena sei anni quando gli morì il padre, Giuseppe, procuratore di stato a Zara; sua madre morì a Roma l'anno scorso.

Frequentò le scuole elementari e l'i. r. ginnasio di Zara, dando subito prova di intelletto pronto e versatile; superato con distinzione l'esame di maturità, nel 1884 si recò all'università di Vienna, dove nel 1888 conseguì a voti unanimi la laurea in matematica e con lode quella in filosofia.

Venuto a Roma nel 1889, insegnò nel 1889-90 lettere latine e greche nel ginnasio superiore pareggiato di Ceccano; negli anni 1890-96 insegnò filosofia nel liceo pareggiato di Velletri, avendo per due anni l'incarico di lettere latine e greche in quel r. ginnasio superiore.

Frattanto, il 14 dicembre 1892, fu abilitato per titoli alla privata docenza con effetti legali in Logica matematica presso la R. Università di Roma dove impartì lezioni negli anni 1893-96.

Dal 1896 sino agli ultimi giorni fu docente di filosofia nel r. liceo di Taranto.

Possedeva una cultura varia e multiforme, essendosi egli occupato di storia della filosofia araba, e di lingue orientali.

Qui però diamo soltanto l'elenco dei contributi che egli apportò alla logica matematica.

1890 — *Fondamenti del calcolo Logico.* Giorn. di Battaglini, Napoli 1890. (Estr. dalla sua dissertaz. di laurea: « Ueber Anwendungen der Mathematik auf die Logik »).

— *Sulla rappresentazione grafica, delle quantità logiche.* Rend. della R. Acc. dei lincei, Roma 1890.

1891 — *Lo Stato attuale e i progressi della logica,* Riv. Ital. di Filosofia, Roma 1891 t.6 II p.301-319. (Recens. in RdM. a.1892 t.2 p.80).

1892 — *Principii di logica esposta secondo le dottrine moderne.* Torino 1892.

— *I teoremi funzionali nel calcolo logico,* RdM. 1892 t.2 p.177-179.

1893 — *Ueber Beziehungen zwischen logischen Grössen,* Monatshefte für Mathematik, Wien 1893, t.4 p.147-153.

— *La logica matematica e il calcolo logico,* Riv. Ital. di Filosofia, Roma 1893, t.8 I p.389-395

1894 — *I primi dati della logica* id. Roma 1894, t.9 I p.33-70

— *Ueber das Jevons - Cliffordsche Problem* Monatsh. für Math., Wien 1894 t.5 p.331-345.

— *Sulla definizione e il compito della logica,* Roma, Balbi, 1894.

1896 — *Alcuni teoremi intorno alle funzioni logiche,* RdM. t.6 a.1896 p.21-24.

V.

(1) Le notizie qui date sono estratte da un cenno necrologico scritto da Alessandro Padoa, inserito nel fascicolo III Maggio-Giugno della Rivista Filosofica, Pavia, 1901.

Recensione

O. Stolz und I. A. Gmeiner — *Theoretische Arithmetik*, I. Leipzig, Teubner a.1900.

Il nome dello Stolz é ben noto nel mondo scientifico pei suoi lavori originali, e pei suoi trattati di Aritmetica e di Calcolo infinitesimale, ove si osserva un rigore eccezionale insieme all'uso degli ultimi risultati cui pervenne la scienza su questi soggetti. É quindi con piacere che sarà appresa la notizia di questa nuova opera. Esso è un trattato scolastico; e quantunque espresso col linguaggio ordinario, per la sua precisione ci può subito paragonare punto per punto col Formulario, a.1901, che indicheremo con F.

Nella 1ª sezione, che serve d'introduzione, dopo aver indrodotta l'idea di grandezza, in modo che la si può considerare come idea primitiva, l'A si occupa a p.2 dell'eguaglianza, enunciandone le tre proprietà caratteristiche (F §1 P10·1-·3). Ed aggiunge la condizione:

« Je zwei Dinge des Systemes müssen entweder gleich oder ungleich sein », la quale non è una proprietà dell'eguaglianza, ma un principio di logica, se colla parola ungleich = diseguale si intende « non eguale » (F§4 P1·2 e 3·6).

L'A dà al segno = un significato più ampio di quello che abbia nel F, e quindi non ammette la §1 P10·6. Diversamente detto, l'A considera varie specie di eguaglianze, tutte indicate collo stesso segno =. Invece nel F il segno = rappresenta costantemente un'eguaglianza sola, detta anche identità. Le relazioni soddisfacenti alle condizioni ·1·2·3 di §1 P10 sono espresse col segno = accompagnato da altri segni. Ciò è necessario a farsi nel F.

A p.5 l'A. parla del segno $<$, che considera come rappresentante un'idea primitiva, determinata mediante un sistema di proprietà. La 1) a p.6 si potrebbe erigere in definizione nominale sotto la forma $b>a \,.=.\, a>b$.

La 2) é identica alla §$>$ P2·5 del F.

La 3) esprimente una proprietà del segno = secondo l'A. é soppressa dal F, ove il segno = ha un valore costante.

La 4) coincide con §$>$ P2·1 del F.

Siccome nel F il segno $>$ è definito nominalmente, queste P si presentano come teoremi, e non come Pp.

A p.9 l'A. spiega l'uso e la soppressione delle parentesi, assoggetandolo a regole chiare.

A p.10 l'A. spiega la regola di logica detto « Teorema di Hauber » F §$\wedge$ P2·6, e la regola delle negazioni data da §–P2·4.

La 2ª Sezione tratta dei « numeri naturali ». L'A. esaminata la definizione Euclidea, e le osservazioni di Helmholtz, Kronecker, Dedekind; sceglie la trattazione del « Formulaire », sia nella sostanza che nella forma. Il numero successivo d'un numero a é indicato con $a+$; con questa operazione definisce le cifre, compreso il simbolo X per indicare il « dieci ».

L'addizione è definita per induzione e i teoremi sono dimostrati come nel F.

E noi siamo ben lieti nel vedere che le teorie pure sviluppate nel Formulario acquistino sempre più importanza anche nel campo didattico.

L'A. incomincia la numerazione con 1, come in F1888; mentre nel F1898 e oggi la numerazione comincia con 0, onde eliminare la difficoltá nel definire lo 0.

Inoltre, a causa del valore che l'A. attribuisce al segno $=$, egli aggiunge ancora alle Pp la $a = a$, che nel F appartiene alla logica pura.

Il principio d'induzione, o della « conclusione da n ad $n+1$, é dall'A. attribuita a Bernoulli, mentre nel F é citato Pascal.

La definizione del prodotto é pure data per induzione, e le dimostrazioni coincidono con quelle del formulario.

L'A. a p.28 introduce il nostro sistema di numerazione e lo 0; ma manca la definizione nominale di questo segno.

A p.34 trovansi alcuni esercizii alla 2ª sezione che possono essere utilmente tradotti in simboli.

$a, b, c, d \varepsilon N_1 . \supset :$

4) $a > \text{quot}(b, c) .=. ac > b$

5) $\text{quot}(a, b) > \text{quot}(c, d) .=. ad > bc$

6) identico a §quot P1·5 7) identico a §quot 1·51

8) $a > c . b < d . \supset . \text{quot}(a,b) \geqq \text{quot}(c,d)$

11) identico a §quot P1·2 12) trasformabile nella 11)

13) $c \times \text{quot}(a,b) \leqq \text{quot}(ac,b) \leqq [\text{quot}(a,b)+1]c-1$

14) identico a §quot P1·3 15) complicata

16) $\text{quot}(a,b) \times \text{quot}(c,d) \leqq \text{quot}(ab, cd) \leqq \text{quot}(a,b)\ \text{quot}(c,d) + \text{quot}(a,b) + \text{quot}(c,d).$

17) complicato.

18) $\text{quot}(a,b) + \text{quot}(c,b) \leqq \text{quot}(a+c,b) \leqq \text{quot}(a,b) + \text{quot}(c,b) + 1.$

7) identico a §mlt 1·42. 8) = §Σ P4·1 10) = idem

La Sezione 3ª « Teoria analitica dei numeri razionali » si occupa delle operazioni su coppie di grandezze. Sono notevoli i teoremi: « Se un operazione su 3 grandezze é associativa, essa lo é pure su più grandezze ». « Essa é commutativa se lo é su due ». Essi sono seguiti da una serie di formule; ma la loro redazione completa in simboli presenta delle difficoltà.

A p.57 i numeri razionali sono indrodotti con una definizione che nel Formulario é detta « per astrazione ». Su questo punto, accennato in F1901 §/ P3 nota, giá si é parlato in RdM. t.1 p.262.

L'A dà la def1:

« All'insieme di due numeri naturali a,b con riguardo al loro ordine noi facciamo corrispondere un nuovo oggetto che si indica con a/b, e, dicesi frazione ».

Def2. « due di questi oggetti a/b e c/d diconsi eguali, se $a \times d = b \times c$. »

Def3... « si dice che $a/b > c/d$, quando $ad > bc$. »

Questa 3ª def. non é omogenea (F p.8). Come pure non é omogenea la Df del prodotto di due frazioni (§/5·2)

La def della somma è resa sensibilmente omogenea mediante un teorema precedente (p.59) ma è complicata.

A p.61 l'A. introduce i numeri negativi, facendoli dipendere da coppie di numeri positivi, e imitando il processo seguito per introdurre gli irrazionali.

A p. 63 l'A. indica con $|a|$ il valor assoluto del numero a, e adduce ragioni per provare che questa notazione è piú comoda della mod$a$ di Cauchy. Queste ragioni trovansi già esposte, e discusse nel F p.84 e la ragione per cui ivi si preferisce la notazione di Cauchy.

p.64 Teor. $1 = \S$ mod $1 \cdot 4$

La regola dei segni (p.65) $= F \S \times 6$, non è assunta propriamente come definizione, ma conseguenza immediata della Df.

A p. 70 l'A. indroduce le radici quadrate, come nuovi enti senza parlare di irrazionali. Pare che ció corrisponda ad un bisogno sentito nelle scuole austriache, come lo é pure attualmente nelle scuole italiane. Poiché nei nuovi programmi di matematica pei Licei si fa al 2° anno la teoria delle radici, e al 3° la teoria dei numeri irrazionali.

Il nostro A. sviluppa la teoria con rigore; però le definizioni paiono un po' artificiose.

La sezione 4ª sviluppa sinteticamente la teoria dei numeri razionali, introducendo le « parti dell'unitá ». A p.77 introduce i numeri negativi per una via che parmi difficile ridurre in simboli: le def. date dall'A. non soddisfano alle leggi delle definizioni simboliche. L'A. segue il nuovo principio di distinguere i segni $+$ e $-$ davanti ad un numero, dai segni per indicare l'addizione e la sottrazione. Invece di $-a$ scrive $\overline{a}$; e cita la notazione di Spitz (a con una freccia orizzontale), di Méray (con una freccia sovrapposta), di Padé ($a_n = a$ negativo). Nel F. si é seguita l'idea opposta, perché introducendo i numeri negativi, ed i fratti come operazioni, il valore dei segni $+$ e $-$ è lo stesso, sia nelle formule $b+a$, $b-a$, che nelle $+a$ e $-a$.

« Frazioni sistematiche » sono le frazioni corrispondenti alle decimali in una base qualunque.

Le ultime pagine si riferiscono al calcolo numerico sui numeri decimali. Altra recensione, dovuta al prof. Vivanti, trovasi nel « Bollettino di Bibliografia » giugno 1901 p.42.

G. Peano

SUR LA LOGIQUE DES RELATIONS
AVEC DES APPLICATIONS À LA THÉORIE DES SÉRIES

PAR
BERTRAND RUSSELL
Fellow of Trinity College, Cambridge.

TABLE DES MATIÈRES

§ 1. Théorie générale des Relations.
§ 2. Les nombres cardinaux.
§ 3. Les Progressions.
§ 4. Le fini et l'infini.
§ 5. Les séries condensées.
§ 6. Les séries fondamentales dans une série condensée.

La logique des relatives, telle qu'on la trouve chez MM. Peirce et Schröder, est difficile et compliquée à un si haut degré qu'il est possible de doûter de son utilité. Ces deux auteurs, puisqu'ils ne possèdent pas la distinction entre ε et $\supset$, regardent une classe comme une simple somme d'individus. Pour cette raison, une relation n'est pour eux qu'une somme de couples d'individus. Il en résulte que les propriétés fondamentales des relations s'expriment par des formules de sommation très longues, et dont la signification ne ressort pas très évidemment de la notation. C'est pourtant la logique des relations qui devrait servir comme fondement à la mathématique, puisque ce sont toujours des types de relations que l'on considère dans le raisonnement symbolique; c'est à dire, on ne doit pas considérer telle ou telle relation particulière, à l'exception de celles qui sont fondamentales pour la logique (comme ε et $\supset$), mais bien les relations d'une certaine classe — par exemple, les relations transitives et asymétriques, ou les relations univoques et réciproques. Je montrerai dans le présent mémoire qu'il est possible de simplifier énormément la logique des relations, en se servant de la méthode et de la notation de M. Peano, que je suppose connues dans ce qui suit. Cependant il paraît que la logique de M. Peano n'est guère complète sans l'introduction explicite des relations. Prenons comme exemple la définition de *fonction* (1). Les signes xu et ux, qui paraissent à droite dans cette définition, ne s'expliquent nullement par ce qui précède. La juxtaposition de deux lettres n'a reçu aucun sens excepté la mul-

(1) Formulaire, 1901, § 10, P1 · 0 · 01.

tiplication logique, qui n'est pas ici en question. Le fait est que la définition de *fonction* n'est possible que par le moyen d'un nouvelle idée primitive, savoir celle de *relation.* Qu'on remarque par exemple la conséquence suivante. De la définition citée, et des P §20 P9·4, §22 P2·4, §23 P1·02, P2·0, on déduit

$$a,b\varepsilon\, \mathrm{N}_0 \;.\supset.\; a+b = ab = a\times b$$

Cette conséquence montre que la notation adoptée a besoin de modification. Je donnerai (§ 3, 4) une notation plus compliquée, de laquelle on ne peut pas tirer de pareilles conséquences. On verra du reste que l'introduction des relations donne lieu à une simplification et une généralisation de beaucoup de théories mathématiques; et elle nous permet de donner des définitions *nominales* partout où les définitions sont possibles.

Dans ce qui suit, j'ai adopté quelques uns des symboles de M. Schröder, par exemple, $\breve{\mathrm{R}}$, 0', 1'. Je n'ai pas réussi à me conformer à la règle du Formulaire, de mettre tous les symboles sur une ligne, et dans le cas des relations il m'a fallu distinguer RP de R⌒P. Pour le reste, j'ai adopté tout ce qui se trouve dans la logique de M. Peano, ainsi que la notation Elm, suggérée par M. Padoa [RdM., VI, p. 117]; cependant j'ai distingué ϱu, où u est une classe contenue dans le domaine d'un relation R, de $\varrho\frown u$. Pour cette raison, le produit logique d'une classe u et d'une classe représentée par une lettre grecque est toujours indiqué par $\varrho\frown u$ ou $\pi\frown u$ etc., et non pas par ϱu ou $u\varrho$ [Voir § 1, Prop. 1·33·34·35·36].

§ 1.

Théorie générale des Relations.

❋ 1·0 Idée primitive: Rel = Relation.

·1 $\mathrm{R}\varepsilon\, \mathrm{Rel} \;.\supset:\; x\mathrm{R}y \;.=.\; x$ a avec y la relation R.

·21 $\mathrm{R}\varepsilon\, \mathrm{Rel} \;.\supset.\; \varrho = x\ni\{\exists y\ni(x\mathrm{R}y)\}$ Df

·22 $\mathrm{R}\varepsilon\, \mathrm{Rel} \;.\supset.\; \breve{\varrho} = x\ni\{\exists y\ni(y\mathrm{R}x)\}$ Df

Si R est une relation, ϱ est ce qu'on peut appeler le *domaine* de la relation R, c'est à dire, la classe des termes qui ont cette relation avec un terme quelconque ou avec plusieurs termes. J'emploie toujours (excepté pour les relations qui se trouvent dans le Formulaire) des lettres

majuscules pour les relations, et les lettres minuscules grecques correspondantes pour les domaines des relations. Dans les definitions ·21·22 la lettre R est supposée variable, c'est à dire, α sera le domaine d'une relation A, β d'une relation B, etc. Je regarde $\ni$ comme une idée primitive, de sorte que je me permets de mettre ce signe en avant de propositions non réduisibles sans son aide à la forme $x\varepsilon\alpha$.

·31 $\mathrm{R}\varepsilon\ \mathrm{rel}\ .\ x\varepsilon\varrho\ .\supset.\ \breve{\varrho}x = y\ni(x\mathrm{R}y)$ Df

·32 $x\varepsilon\breve{\varrho}\ .\supset.\ \varrho x = y\ni(y\mathrm{R}x)$ Df

·33 $\mathrm{R}\varepsilon\ \mathrm{rel}.\ u\varepsilon\ \mathrm{Cls}\ .\ u\supset\varrho\ .\supset.\ \breve{\varrho}u = y\ni\{\exists u\cap x\ni(x\mathrm{R}y)\}$ Df

·34 $\breve{u\varrho} = y\ni\{x\varepsilon u\ .\supset x\ .\ x\mathrm{R}y\}$ Df

·35 $u\supset\breve{\varrho}\ .\supset.\ \varrho u = y\ni\{\exists u\cap x\ni(y\mathrm{R}x)\}$ Df

·36 $u\varrho = y\ni\{x\varepsilon u\ .\supset x\ .\ y\mathrm{R}x\}$ Df

·4 $\mathrm{R}\varepsilon\ \mathrm{rel}\ .\supset.\ \exists\varrho\ .=.\ \exists\breve{\varrho}$

·5 $\exists\mathrm{R}\ .=.\ \exists\varrho$ Df

·6 $\mathrm{R},\mathrm{R}'\varepsilon\ \mathrm{rel}\ .\supset\therefore\ \mathrm{R}\supset\mathrm{R}'\ .=:\ x\mathrm{R}y\ .\supset_{x,y}.\ x\mathrm{R}'y$ Df

·61 $\mathrm{R}=\mathrm{R}'\ .=:\ \mathrm{R}\supset\mathrm{R}'\ .\ \mathrm{R}'\supset\mathrm{R}$ Df

·7 $\mathrm{R}\varepsilon\ \mathrm{rel}\ .\supset.\ \mathrm{I}\ \mathrm{rel}\cap\mathrm{R}'\ni(x\mathrm{R}'y\ .=.\ y\mathrm{R}x)$ Pp

·71 $\mathrm{R}\varepsilon\ \mathrm{rel}\ .\supset.\ \mathrm{rel}\cap\mathrm{R}'\ni(x\mathrm{R}'y\ .=.\ y\mathrm{R}x)\ \varepsilon\ \mathrm{Elm}$

$[\ \mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2\ \varepsilon\ \mathrm{rel}\cap\mathrm{R}'\ni(x\mathrm{R}'y\ .=.\ y\mathrm{R}x)\ .\supset\therefore\ x\mathrm{R}_1y\ .=.\ y\mathrm{R}x : x\mathrm{R}_2y\ .=.\ y\mathrm{R}x.\therefore$
$\supset: x\mathrm{R}_1y\ .=.\ x\mathrm{R}_2y : \supset.\ \mathrm{R}_1=\mathrm{R}_2\ ]$

·72 $\mathrm{R}\varepsilon\ \mathrm{rel}\ .\supset.\ \breve{\mathrm{R}} = \imath\ \mathrm{rel}\cap\mathrm{R}'\ni(x\mathrm{R}'y\ .=.\ y\mathrm{R}x)$ Df

·8 $\mathrm{I}\ \mathrm{rel}\cap\mathrm{R}\ni(\varrho = \iota x\ .\ \breve{\varrho} = \iota y)$ Pp

Cette Pp est d'une grande importance, surtout dans l'arithmétique. Elle affirme qu'entre deux individus quelconques il y a une relation qui ne subsiste pas pour aucun autre couple d'individus. Elle n'a pas besoin d'hypothèse, puisque x et y ne sont sujets à aucune limitation. Cependant on peut la restreindre au cas où x et y sont différents, puisque le cas où x et y sont identiques se déduit de celui-ci par la multiplication relative (2·1).

·9 $\mathrm{R}\varepsilon\ \mathrm{rel}\ .\supset.\ \breve{\breve{\mathrm{R}}} = \mathrm{R}$

$[\ x\breve{\breve{\mathrm{R}}}y\ .=.\ y\breve{\mathrm{R}}x\ .=.\ x\mathrm{R}y\ ]$

·91 $\mathrm{R},\mathrm{S}\varepsilon\ \mathrm{rel}\ .\ \mathrm{R}=\breve{\mathrm{S}}\ .\supset.\ \breve{\varrho}=\sigma\ .\ \varrho=\breve{\sigma}$

$\mathrm{R}=\breve{\mathrm{S}}\ .=.\ \breve{\mathrm{R}}=\mathrm{S}$

·93 $R_1, R_2 \varepsilon \text{ rel} .\supset\therefore x(R_1 \cup R_2)y .=: xR_1y \,.\vee.\, xR_2y$ Df

·94 $K\varepsilon \text{ Cls'rel} .\supset. \cup'K = R\ni\{xRy .=. \exists K \cap R'\ni(xR'y)\}$ Df

·95 $\cup'K\,\varepsilon \text{ rel}$ Pp

·96 $R_1, R_2 \varepsilon \text{ rel} .\supset\therefore x(R_1 \cap R_2)y .=: xR_1y \,.\, xR_2y$ Df

·97 $K\varepsilon \text{ Cls'Rel} .\supset. \cap'K = R\ni\{xRy .=: R'\varepsilon K .\supset_{R'}. xR'y\}$ Df

·98 $\cap'K\,\varepsilon \text{ rel}$ Pp

✱ 2·1 $R_1, R_2 \varepsilon \text{ rel} .\supset: x\, R_1R_2\, z .=. \exists y\ni(xR_1y \,.\, yR_2z)$ Df

·11 $R_1R_2\,\varepsilon \text{ rel}$ Pp

Il est nécessaire de distinguer $R_1 \cap R_2$, qui signifie le produit logique, de R_1R_2, qui signifie le produit relatif. On a $R_1 \cap R_1 = R_1$, mais non pas en général $R_1R_1 = R_1$; on a $R_1 \cap R_2 = R_2 \cap R_1$, mais on n'a pas en général $R_1R_2 = R_2R_1$. Par exemple, *grand père* est le produit relatif de *père* et *père*, ou de *mère* et *père*, mais pas de *père* et *mère*.

·12 $R\varepsilon \text{ rel} .\supset. R^2 = RR$ Df

·13 $R,S\varepsilon \text{ rel} .\supset. (\breve{R}\breve{S}) = \breve{S}\breve{R}$

[$x(\breve{R}\breve{S})y .=. yRSx .=. \exists z\varepsilon\,(yRz \,.\, zSx) .=. \exists z\varepsilon\,(x\breve{S}z \,.\, z\breve{R}y) .=. x\breve{S}\breve{R}y$]

·2 Transitif $=$ tr $=$ rel $\cap\, R\ni(R^2 \supset R)$ Df

Quand on a $R^2 \supset R$, on a $xRy \,.\, yRz .\supset. xRz$.

·3 $R\varepsilon \text{ rel} .\supset\therefore R^2 = R .=: xRz .=. \exists y\ni(xRy \,.\, yRz)$

Si R est une relation qui engendre une série (ce qui demande que R soit transitive et contenue dans la diversité), $R^2 = R$ donne la condition que cette série soit condensée (*überall dicht*), c'est à dire qu'elle possède un terme entre deux quelconques de ses termes (Voir le § 5).

·4 $R\varepsilon \text{ rel} .\supset: x{-}Ry .=. {-}(xRy)$ Df

·5 ${-}R\,\varepsilon \text{ rel}$ Pp

·6 $({-}\breve{R}) = {-}(\breve{R})$

Je n'ai pas trouvé nécessaire l'addition relative de MM. Peirce et Schröder. En voici la définition :

Soient R, S des relations : leur somme relative est une relation P, telle que

$$xPy .=\therefore x{-}Rz .\supset_z . zSy : z{-}Sy .\supset_z . xRz \qquad \text{Df}$$

on a $$xPy .=. {-}\exists(\breve{-}\varrho x \cap {-}\sigma y) .=. {-}\{x(-R-S)y\}$$

✱ 3·1 $\varepsilon\,\varepsilon \text{ rel}$ Pp

Cette Pp dit que ε est une relation. Dans ce cas, j'ai dû abandonner la règle d'employer des majuscules pour les relations.

·2 $e = x\ni\{\exists y\ni(x\varepsilon y)\}$ Df [e = individu]

·3 $\breve{e} = x\ni\{\exists y\ni(y\varepsilon x)\}$ Df [$\breve{e}$ = Cls-$\iota\wedge$]

·4 $\breve{e} \supset e$ [$y\varepsilon\breve{e} .\supset. y\varepsilon \text{Cls} .\supset. y\varepsilon e$]

·5 $x\varepsilon\breve{\varepsilon}y \;.\!=\!.\; \exists z \ni (x\varepsilon z \;.\; y\varepsilon z)$

·51 $x\breve{\varepsilon}\varepsilon y \;.\!=\!.\; \exists z \ni (z\varepsilon x \;.\; z\varepsilon y) \;.\!=\!.\; x,y\,\varepsilon\,\mathrm{Cls} \;.\; \exists xy$

·6 $y\varepsilon\,\mathrm{Cls'Cls} \;.\supset.\; \smile' y = x \ni (x\varepsilon^2 y)$

·7 $\mathrm{R}\varepsilon\,\mathrm{rel} : x\varepsilon\varrho \;.\supset_x.\; y \ni (x\mathrm{R}y) = x \;:\supset.\; \mathrm{R} = \breve{\varepsilon}$

[$x\varepsilon\varrho \;.\supset_x : x\mathrm{R}y \;.\!=\!.\; y\varepsilon x \;.\supset.\cdot.\; \mathrm{R} = \breve{\varepsilon}$]

·8 $u,v\,\varepsilon\,\mathrm{Cls} - \iota\Lambda \;.\supset.\; \exists\,\mathrm{rel} \cap \mathrm{R} \ni (x\mathrm{R}y \;.\!=\!.\; x\varepsilon u \;.\; y\varepsilon v)$

[Prop 1·8 $.\supset.\; \exists\,\mathrm{rel} \cap \mathrm{P} \ni (\iota u = \pi \;.\; \iota v = \breve{\pi})$

$\mathrm{P}\varepsilon\,\mathrm{rel} \;.\; \iota u = \pi \;.\; \iota v = \breve{\pi} \;.\supset::$

$x\varepsilon u \;.\; y\varepsilon v \;.\!=\!._{x,y}.\; x(\varepsilon\breve{\mathrm{P}}\varepsilon)y \;.\cdot.\; x - \varepsilon u \;.\supset.\; y - \varepsilon v \;.\!=\!._{x,y}.\; -\{x(\varepsilon\breve{\mathrm{P}}\varepsilon)y\} \;::\supset.$ Prop]

Cette proposition prouve que, si u, v sont deux classes non nulles, il y a une relation qui subsiste entre toute terme de u et toute terme de v, mais qui ne subsiste pas pour aucun autre couple de termes.

·81 $u\varepsilon\,\mathrm{Cls} - \iota\Lambda \;.\supset.\; \exists\,\mathrm{rel} \cap \mathrm{R} \ni (\varrho = u : x\varepsilon u \;.\!=\!._x.\; x\mathrm{R}u)$

[Prop 1·8 $.\supset.\; \exists\,\mathrm{rel} \cap \mathrm{P} \ni (\pi = \iota u \;.\; \breve{\pi} = \iota u) \;:\supset.\cdot.$
$x\varepsilon u \;.\supset_x.\; x(\varepsilon\mathrm{P})u : x - \varepsilon u \;.\supset_x.\; -x(\varepsilon\mathrm{P})u \;.\supset.\cdot.$ Prop]

·82 $u\varepsilon\,\mathrm{Cls} - \iota\Lambda \;.\supset.\; \varepsilon_u = \imath\,\mathrm{rel} \cap \mathrm{R} \ni (\varrho = u : x\varepsilon u \;.\!=\!._x.\; x\mathrm{R}u)$ Df

La relation ε_u est la relation ε pour la classe u seule. Elle est formée par le produit relatif de ε avec la relation qui subsiste seulement entre u et u.

❋ 4·1 *Idée primitive:* 1' = identité

Ce symbole est tiré de la notation de M. Schröder. Je n'emploie pas le symbole = pour l'identité des individus, puisqu'il a un autre usage pour l'équivalence des classes, des P, et des relations.

·2 $1'\,\varepsilon\,\mathrm{Rel}$ Pp

·3 $0' = -1'$ Df

0' est la diversité. Elle est une relation, en conséquence de Prop 2·5.

·31 $x\,1'\,x$ Pp

·32 $1' \supset \breve{1}'$ Pp

·33 $\mathrm{R}\,\varepsilon\,\mathrm{rel} \;.\; x\mathrm{R}y \;.\; y\,1'\,z \;.\supset.\; x\mathrm{R}z$ Pp

·34 $1'^2 \supset 1'$ [Prop 4·33 $.\supset.$ Prop]

·4 $1' = \breve{1}'$

[$x\breve{1}'y \;.\!=\!.\; y1'x$ {1} {1} . Prop·32 $.\supset.\; x1'y$ {2}
{2} $.\supset.\; \breve{1}' \supset 1'$ {3} {3} . Prop·32 $.\supset.$ Prop]

·41 $1'^2 = 1'$

[$x1'y \;.\; y1'y \;.\supset.\; x1'^2y \;:\supset.\; 1' \supset 1'^2$ {1}
{1} . Prop·34 $.\supset.$ Prop]

$\cdot 42 \quad 0' = \breve{0}'$

[Prop·3·4 .⊃. Prop]

$\cdot 5 \quad R, P \varepsilon \text{rel} \,.\supset:\, R\breve{P} \supset 0' \,.=.\, \breve{R}P \supset 0'$

$[\, R\breve{P} \supset 0' \,.=:\, xRy \,.\, y\breve{P}z \,.\supset_{x,y,z}.\, x0'z \;:$

$=.\, -\exists\, (x,y)\ni(xRy \,.\, y\breve{P}x) \,.$

$=.\, -\exists\, (x,y)\ni(y\breve{R}x \,.\, xPy) \,.$

$=:\, y\breve{R}x \,.\, xPz \,.\supset_{x,y,z}.\, y0'z \,:=.\, \breve{R}P \supset 0' \,]$

$\cdot 11 \quad 1{\rightarrow}\text{Nc} = \text{Rel} \cap R\ni\{yRx \,.\, zRx \,.\supset_x.\, y1'z\}$ Df

$\cdot 2 \quad R\varepsilon\, \text{Nc}{\rightarrow}1 \,.=.\, \breve{R}\varepsilon\, 1{\rightarrow}\text{Nc}$

$\cdot 3 \quad 1{\rightarrow}1 = (\text{Nc}{\rightarrow}1)\cap(1{\rightarrow}\text{Nc})$ Df

Nc→1 est la classe des relations univoques. Le symbole Nc→1 indique que, si on a xRy, quand x est donné, il n'y a qu'un y possible, mais que, quand y est donné, il y a un nombre cardinal quelconque de x qui satisfont à la condition xRy. De même 1→Nc est la classe des converses des relations univoques, et 1→1 est la classe des relations univoques et réciproques.

$\cdot 31 \quad \text{Nc}{\rightarrow}1 = \text{Rel} \cap R\ni(x\varepsilon\varrho \supset._x.\, \breve{\varrho}x\, \varepsilon\, \text{Elm})$

$\cdot 32 \quad 1{\rightarrow}\text{Nc} = \text{Rel} \cap R\varepsilon(x\varepsilon\breve{\varrho} \,.\supset_x.\, \varrho x\, \varepsilon\, \text{Elm})$

$\cdot 4 \quad 1'\varepsilon\, 1{\rightarrow}1$

[Prop 4·34·4 .⊃. Prop]

$\cdot 5 \quad R\varepsilon\, 1{\rightarrow}1 \,.\supset.\, \breve{R}\, \varepsilon\, 1{\rightarrow}1$

$\cdot 6 \quad R\varepsilon\, 1{\rightarrow}\text{Nc} \,.\supset.\, R\breve{R} \supset 1'$

On n'a pas $R\breve{R}=1'$, puisque le domaine de $R\breve{R}$ et le même que celui de R, qui n'est en général qu' une partie du domaine de 1'.

$[\, x R\breve{R} y \,.\supset.\, \exists z\ni(x,y\varepsilon\, \varrho\, z) \,:\, R\varepsilon\, 1{\rightarrow}\text{Nc} \,.\supset.\, \varrho z\, \varepsilon\, \text{Elm} \,.\cdot.\supset.\, \text{Prop} \,]$

$\cdot 7 \quad R, S\varepsilon 1{\rightarrow}1 \,.\supset.\, RS\, \varepsilon\, 1{\rightarrow}1$

$\cdot 8 \quad R, S\varepsilon\, \text{Nc}{\rightarrow}1 \,.\, u\varepsilon\, \text{Cls} \,.\, \iota u \supset \varrho \,.\, \breve{\varrho}u \supset \sigma \,.\, RS = P \,.\supset.\, \breve{\sigma}(\breve{\varrho}u) = \breve{\pi}u$

$[\, x\varepsilon u \,.\, y\, 1'\, \iota x\breve{\varrho} \,.\supset.\, y\varepsilon\sigma \,.\supset:\, z\, 1'\, \iota y\breve{\sigma} \,.\supset.\, xRSz \,.\cdot.\supset.\, \breve{\sigma}(\breve{\varrho}u) \supset \breve{\pi}u$ {1}

$x\varepsilon u \,.\, xRSz \,.\supset.\, \exists\, \sigma\cap y\ni(xRy \,.\, ySz) \,.\supset.\, y\varepsilon\breve{\varrho}u \,.\, z\varepsilon\, \breve{\sigma}(\breve{\varrho}u) \;:$

$\supset.\, \breve{\pi}u \supset \breve{\sigma}(\breve{\varrho}u)$ {2}

{1} . {2} .⊃. Prop]

✱ 6·1 $S \varepsilon Nc \dotplus 1 . R = S\breve{S} . \supset . R^2 \supset R . R = \breve{R}$

[$xRz .=. \exists\, y \ni (xSy . zSy)$ |1|

$zRw .=. \exists\, v \ni (zSv . wSv)$ |2|

$S \varepsilon Nc \dotplus 1 . zSy . zSv . \supset . y 1' v$ |3|

|1|.|2|.|3| $\supset$: $xRz . zRw . \supset . \exists\, y \ni (xSy . wSy) . \supset . xRw :\supset . R^2 \supset R$ |4|

$xRz .=. \exists\, y \ni (xSy . zSy) .=. \exists\, y \ni (zSy . xSy) .=. zRx :\supset . \breve{R} = R$ |5|

|4|.|5| $\supset$. Prop]

·2 $R \varepsilon rel . R^2 \supset R . R = \breve{R} . \exists R . \supset . \exists\, Nc \dotplus 1 \cap S \ni (R = S\breve{S})$

[$xSu .=. x \varepsilon \varrho . u = \breve{\varrho} x :\supset$:

$xSu . ySu .=. x,y \varepsilon \varrho . u = \breve{\varrho} x = \breve{\varrho} y . \supset . xRy :\supset . S\breve{S} \supset R$ |1|

$R^2 \supset R . R = \breve{R} . \exists R . \supset : x \varepsilon \varrho . \supset_x . x \varepsilon \breve{\varrho}\, x$ |2|

|2| . Hp|1| $\supset$: $xRy . \supset . x,y \varepsilon \breve{\varrho} x . \supset . x\breve{S}\varrho x . y\breve{S}\varrho x . \supset . x S\breve{S} y :\supset . R \supset S\breve{S}$ |3|

|1| . |3| $\supset$. Prop]

La P 6·2 est la converse de la P 6·1. Elle affirme que toute relation transitive et symétrique et non nulle peut être analysée comme produit d'une relation univoque et de son converse, et la demonstration donne une façon dont ceci peut se faire, sans prouver qu' il n'y a pas d'autres façons de la faire. La P 6·2 est présupposée dans les définitions par abstraction, et elle montre qu'en général ces definitions ne donnent pas un seul individu, mais une classe, puisque la classe des relations S n'est pas en général un élement. Pour chaque relation S de cette classe, et pour tout terme x de R, il y a un individu qu'indique la définition par abstraction; mais les autres relations S de cette classe ne donnent pas en général le même individu. Ceci s'expliquera mieux dans les applications, par exemple dans le § prochain. Cependant on peut toujours prendre la classe $\breve{\varrho} x$, qui paraît dans la démostration de Prop 6·2, comme l'individu indiqué par la définition par abstraction; ainsi par exemple le nombre cardinal d'una classe u serait la classe des classes semblables à u.

§ 2.

Les nombres cardinaux.

✱ 1·1 $u,v \varepsilon Cls . \supset : u \operatorname{sim} v .=. \exists\, 1 \dotplus 1 \cap R \ni (u \supset \varrho . \breve{\varrho}\, u = v)$ Df

Pour la définition de $\breve{\varrho}\, u$, voir § 1 Prop 1·33.

·11 $\operatorname{sim} \varepsilon rel$ Pp

Pour affirmer qu'un terme de valeur constante, tel que « sim », appartient à telle ou telle classe, on a toujours besoin d'une Pp quelconque.

·2 $u \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset . u \mathrm{ sim } u$

[$1' \varepsilon 1 \rightarrow 1 : \mathrm{R} = 1' . \supset . u \supset \varrho . \breve{\varrho} u = u :\supset.$ Prop]

·21 $u, v \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset : u \mathrm{ sim } v . = . v \mathrm{ sim } u$

[§ 1 Prop 5·5 .⊃. Prop]

·22 $u, v, w \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset: u \mathrm{ sim } v . v \mathrm{ sim } w .\supset. u \mathrm{ sim } w$

[§ 1 Prop 5·7 .⊃. Prop.]

·3 $\exists \mathrm{Nc} \rightarrow 1 \cap \mathrm{S} \ni (\mathrm{sim} = \mathrm{S}\breve{\mathrm{S}})$

[1.11·2·21·22. § 1 Prop 6·2 .⊃. Prop]

·4 $\mathrm{S} = \mathrm{Nc} \rightarrow 1 \cap \mathrm{S} \ni (\mathrm{sim} = \mathrm{S}\breve{\mathrm{S}})$ Df

Voir la note à la fin du § 1. Si l'on veut définir le nombre cardinal par abstraction, on ne peut définir qu'une classe de classes, dont chacune a une correspondance univoque et réciproque avec la classe « nombre cardinal, » et à laquelle appartient chaque classe qui a une telle correspondance. Ceci résulte des propositions suivantes (·52 et ·54),

·5 $\mathrm{S} \varepsilon \mathrm{S} .\supset. \sigma = \mathrm{Cls} [\mathrm{sim} = \mathrm{S}\breve{\mathrm{S}} : u \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset u . u \mathrm{ sim } u :\supset.$
$u \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset u . \exists x \ni (u \mathrm{S} x)]$

·51 $\mathrm{S}, \mathrm{S}' \varepsilon \mathrm{S} .\supset. \mathrm{S}\breve{\mathrm{S}}' \varepsilon 1 \rightarrow 1$

[$x \breve{\mathrm{S}}\mathrm{S}' y . x \breve{\mathrm{S}}\mathrm{S}' y' . = . \exists \mathrm{Cls} \cap u \ni (u \mathrm{S} x . u \mathrm{S} y) . \exists \mathrm{Cls} \cap u' \ni (u' \mathrm{S} x . u' \mathrm{S}' y')$ |1|

$u \mathrm{S} x . u' \mathrm{S} x .\supset. u \mathrm{ sim } u' .\supset. u \mathrm{ S}' \breve{\mathrm{S}}' u' .\supset. \exists y'' \ni (u \mathrm{S}' y'' . u' \mathrm{S}' y'')$ |2|

|1| . |2| . $\mathrm{S}, \mathrm{S}' \varepsilon \mathrm{Nc} \rightarrow 1 .\supset. y 1' y'' . y' 1' y'' .\supset. y 1' y' .\supset. \breve{\mathrm{S}}\mathrm{S}' \varepsilon \mathrm{Nc} \rightarrow 1$ |3|

|3| $.\supset. \breve{\mathrm{S}}' \mathrm{S} \varepsilon \mathrm{Nc} \rightarrow 1 .\supset. \breve{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \varepsilon 1 \rightarrow \mathrm{Nc}$ |4| |3| . |4| .⊃. Prop]

·52 $\mathrm{S}, \mathrm{S}' \varepsilon \mathrm{S} .\supset. \breve{\sigma} \mathrm{ sim } \breve{\sigma}'$

[$x \varepsilon \sigma .\supset. \exists \mathrm{Cls} \cap u \ni (u \mathrm{S} x)$ |1|

Prop 1·5 . $u \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset. \exists \sigma \cap y \ni (u \mathrm{S}' y)$ |2|

|1| . |2| $.\supset: x \varepsilon \breve{\sigma} .\supset_x. \exists \breve{\sigma}' \cap y \ni (x \breve{\mathrm{S}}\mathrm{S}' y)$ |3|

|3| $.\supset: y \varepsilon \breve{\sigma}' .\supset_y. \exists \breve{\sigma} \cap x \ni (x \breve{\mathrm{S}}\mathrm{S}' y)$ |4|

|3| . |4| . Prop 5·1 .⊃. Prop]

·53 $\mathrm{S} \varepsilon \mathrm{rel} . \mathrm{R} \varepsilon 1 \rightarrow \mathrm{Nc} . \breve{\sigma} \supset \varrho .\supset. \mathrm{S}\breve{\mathrm{R}}\breve{\mathrm{R}}\mathrm{S} = \mathrm{S}\breve{\mathrm{S}}$

[$\breve{\sigma} \supset \varrho .\supset: x \mathrm{S} y .\supset_{x,y}. \exists z \ni (y \mathrm{R} z)$ |1|

$\mathrm{R} \varepsilon 1 \rightarrow \mathrm{Nc} .\supset: y \mathrm{R} z . z \breve{\mathrm{R}} y' .\supset. y 1' y'$ |2|

|1| . |2| .⊃. $\mathrm{S}\breve{\mathrm{R}}\breve{\mathrm{R}} = \mathrm{S} 1'$ |3|

|3| . § 1 Prop 4·33 .⊃. $\mathrm{S}\breve{\mathrm{R}}\breve{\mathrm{R}} = \mathrm{S}$.⊃. Prop]

·54 $\mathrm{S} \varepsilon \mathrm{S} . k \mathrm{ sim } \breve{\sigma} .\supset. \exists \mathrm{S} \cap \mathrm{S}' \ni (k = \breve{\sigma}')$

[$k \mathrm{ sim } \breve{\sigma} . = . \exists 1 \rightarrow 1 \cap \mathrm{R} \ni (k \supset \breve{\varrho} . \varrho k = \breve{\sigma})$ |1|

|1| . Prop 1·5 $.\supset: u \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset_u . \exists k \cap x \ni (u \mathrm{S} \mathrm{R} x)$ |2|

$S\varepsilon$ Nc$\rightarrow$1 . R$\varepsilon\rightarrow$1 .$\supset$: SR ε Nc$\rightarrow$1 |3|

Prop ·53 .$\supset$. SR$\breve{\mathrm{R}}\breve{\mathrm{S}}$ = $\breve{\mathrm{S}}\breve{\mathrm{S}}$ = sim |4|

|2| . |3| . |4| . $\supset$. Prop]

Les propositions ·52 et ·54 prouvent que toutes les classes qui forment les domaines des différentes relations de la classe ς sont semblables (sim), et que toute classe semblable à l'une d'elles appartient à cette classe de classes. L'arithmétique des nombres cardinaux s'applique toute entière à chacune de ces classes; mais pour développer complètement la théorie des nombres finis, on a besoin de l'induction complète. (Voir le § 4).

✱ 2. $S\varepsilon\varsigma$.$\supset$::

·1 $u,v\varepsilon$ Cls .$\supset$: $\imath\breve{\sigma}u > \imath\breve{\sigma}v$.=. $-(u\mathrm{sim}v)$. $\exists$Cls$w\ni\cap(w\mathrm{sim}v\,.\,w\supset u)$ Df

·2 $\imath\breve{\sigma}u < \imath\breve{\sigma}v$.=. $\imath\breve{\sigma}v > \imath\breve{\sigma}u$ Df

·3 $u = \Lambda\,.\,v = \Lambda$.$\supset$. u sim v

[Rε 1$\rightarrow$1 . $u = \Lambda$.$\supset$. $u\supset\varrho$. $u\varrho = \Lambda$ |1|

|1| . $v = \Lambda$. Prop 1·1 .$\supset$. Prop]

·4 $O\sigma = \imath\breve{\sigma}\Lambda$ Df

·5 $\imath x$ sim $\imath y$

[§1 Prop 1·8 .$\supset$. Prop]

·6 u sim $\imath x$.$\supset$: $u\varepsilon$ Elm

[u sim $\imath x$.=. $\exists$ 1$\rightarrow$1 $\cap$ R$\ni(u\supset\varrho\,.\,\breve{\varrho}u = \imath x)$

Rε1$\rightarrow$1 . $u\supset\varrho$. $\breve{\varrho}u = \imath x$.$\supset$: $y,z\varepsilon u$.$\supset$. $y\mathrm{R}x$. $z\mathrm{R}x$.$\supset$. $y1'z$.$\supset$. $u\varepsilon$ Elm]

·61 $u,v\ \varepsilon$ Elm .$\supset$. u sim v

[$u\varepsilon$ Elm . $x\varepsilon u$.$\supset$. u sim $\imath x$ |1|

$v\varepsilon$ Elm . $y\varepsilon v$.$\supset$. v sim $\imath y$ |2|

|1| . |2| . Prop 2·5 .$\supset$. Prop]

·7 $1_\sigma = \imath\breve{\sigma}\cap x\ni(u\varepsilon$ Elm .$\supset u$. $u\mathrm{S}x)$ Df

✱ 3·1 Rε rel . $u\supset\varrho$. $\exists u$.$\supset$.

$\exists$ rel $\cap$ R$'\ni\{\varrho' = u : x\mathrm{R}'y$.=$_{x,y}$. $x\varepsilon u$. $x\mathrm{R}y\}$

Hp . §1 Prop 3·8 .$\supset$. $\exists$ rel$\cap$ R$''\ni\{\varrho'' = u\,.\,\breve{\varrho}'' = \breve{\varrho}u : x\varepsilon u\,.\,y\breve{\varrho}u$.=$_{x,y}$. $x\mathrm{R}''y\}$

R$''\varepsilon$rel : $x\mathrm{R}''y$.=$_{y,x}$. $x\varepsilon u$. $y\breve{\varrho}u$: R$\cap$R$''$ = R$'$:$\supset$:

$x\mathrm{R}'y$.=. $x\varepsilon u$. $y\breve{\varrho}u$. $x\mathrm{R}y$.=. $x\varepsilon u$. $x\mathrm{R}y$:$\supset$. Prop]

·11 Rε rel . $u\supset\varrho$.$\supset$. rel $\cap$ R$'\ni\{x\mathrm{R}'y$.=. $x\varepsilon u$. $x\mathrm{R}y\}\ni$Elm

[$\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2\varepsilon$ rel$\cap$R$'\ni\{x\mathrm{R}'y$.=. $x\varepsilon u$. $x\mathrm{R}y\}$.$\supset$: $x\mathrm{R}_1y$.=. $x\varepsilon u$. $x\mathrm{R}y$.=. $x\mathrm{R}_2y$:$\supset$. Prop]

Les P·1·11 montrent qu'on peut toujours trouver une relation dont le domaine est une portion limitée de celui d'une relation donnée, et qui est équivalente à la relation donnée dans cette portion.

$\cdot 12 \quad R\varepsilon \text{ rel} . u\supset\varrho . \supset . Ru = \imath \text{ Rel} \cap R'\ni\{xR'y .=. x\varepsilon u . xRy\}$ Df

$\cdot 2 \quad u,u'\varepsilon \text{ Cls} . u \text{ sim } u' . \supset . \exists\, 1\rightarrow 1 \cap R\ni(u=\varrho . u'=\breve{\varrho})$

[$u \text{ sim } u' . \supset . \exists\, 1\rightarrow 1 \cap R\ni(u\supset\varrho . \breve{\varrho}u = u)$ |1|
|1| . Prop3·1 .⊃. Prop]

$\cdot 3 \quad u,v,u',v'\varepsilon \text{ Cls} . uv = \Lambda . u'v' = \Lambda . u \text{ sim } u' . v \text{ sim } v' . \supset .$
$u\cup v \text{ sim } u'\cup v'$

[$u \text{ sim } u'$. Prop·2 .⊃. $\exists\, 1\rightarrow 1 \cap R\ni(u=\varrho . u'=\breve{\varrho})$
$v \text{ sim } v'$. Prop·2 .⊃. $\exists\, 1\rightarrow 1 \cap R\ni(v=\varrho' . v'=\breve{\varrho}')$
$uv=\Lambda . u'v'=\Lambda . P= R\cup R' . \supset . \pi= u\cup v . \breve{\pi}= u'\cup v' . P\varepsilon\, 1\rightarrow 1 . \supset .$ Prop]

$\cdot 4 \quad k\varepsilon \text{ Cls}' 1\rightarrow 1 : R_1,R_2\varepsilon k . R_1\, 0'\, R_2 .\supset_{R_1,R_2} . \varrho_1\cap\varrho_2 = \Lambda .$

$\breve{\varrho}_1\cap\breve{\varrho}_2 = \Lambda :\supset. \cup' k\ \varepsilon\ 1\rightarrow 1$

[$x(\cup' k)y .=. \exists\, k\cap R\ni(xRy) .\supset. \exists\, k\cap R\ni(x\varepsilon\varrho)$
$R_1,R_2\varepsilon k . R_1\, 0'\, R_2 .\supset_{R_1,R_2} . \varrho_1\cap\varrho_2 = \Lambda :\supset: \exists\, k\cap R\ni(x\varepsilon\varrho) .\supset_x . k\cap R\ni(x\varepsilon\varrho)\ \varepsilon \text{ Elm}:$
$\supset\therefore R\varepsilon k . x\varepsilon\varrho .\supset: x(\cup' k)y .=. xRy .\therefore\supset.$ Prop]

$3\cdot 41 \quad R\varepsilon\, 1\rightarrow 1 . \varrho,\breve{\varrho}\ \varepsilon \text{ Cls}'\text{Cls} : xRy .\supset_{x,y} . x \text{ sim } y :$

$x,x'\varepsilon\varrho . x0'x' .\supset_{x,x'} . xx' = \Lambda : y,y'\varepsilon\breve{\varrho} . y0'y' .\supset_{y,y'} . \varrho\varrho' = \Lambda :\supset. \cup'\varrho \text{ sim } \cup'\breve{\varrho}$

[$xRy .\supset^{x,y}. x\text{sim}y :\supset: xRy .\supset. \exists\, 1\rightarrow 1 \cap R'\ni(x=\varrho' . y=\breve{\varrho}')$

$x\varepsilon\varrho .\supset_x . R_x\ \varepsilon\ 1\rightarrow 1 \cap R'\ni(x=\varrho' . \breve{\varrho}x = \breve{\varrho}') : k= 1\rightarrow 1 \cap R''\ni\{\exists\varrho \cap x\ni(R''1'R_x)\}:$

$P= \cup' k$. Prop 3·4 :⊃. $P\varepsilon\, 1\rightarrow 1 . \pi=\cup'\varrho . \breve{\pi}= \cup'\breve{\varrho} .\supset.$ Prop]

Cette proposition donne le fondement de d'addition arithmétique, sous une forme qui permet l'addition d'un nombre infini de nombres soit finis, soit infinis.

$3\cdot 5 \quad u\varepsilon \text{ Cls} . x,y\varepsilon u .\supset. u-\iota x \text{ sim } u-\iota y$

[$u-\iota x-\iota y \text{ sim } u-\iota x-\iota y . \iota x \text{ sim } \iota y$. Prop 3·3 .⊃. Prop]

$\cdot 51 \quad u,v\varepsilon \text{ Cls} . u \text{ sim } v . x\varepsilon u . y\varepsilon v .\supset. u-\iota x \text{ sim } v-\iota y$

[$R\varepsilon\, 1\rightarrow 1 . u=\varrho . v=\breve{\varrho} . xRy .\supset.$ Prop |1|

$R\varepsilon\, 1\rightarrow 1 . u=\varrho . v=\breve{\varrho} . -(xRy) .\supset.\therefore \exists\, v\cap z\varepsilon(xRz) : xRz .\supset_z . y0'z .\therefore$
$\supset. u-\iota x \text{ sim } v-\iota z$ |2|

Prop3·5 .⊃. $v-\iota z \text{ sim } v-\iota y$ |3|

|1|.|2|.|3| .⊃. Prop]

$\cdot 52 \quad u,v\varepsilon \text{ Cls} . x\varepsilon u . y\varepsilon v .\supset: u \text{ sim } v .=. u-\iota x \text{ sim } v-\iota y$

✱ 4. $\mathrm{S}\varepsilon\varsigma . \supset ::$

$\cdot 1 \quad m,n \varepsilon \breve{\sigma} . \supset . m+n = \breve{\iota\sigma} \cap x\ni \{u\mathrm{S}m . v\mathrm{S}n . uv = \Lambda . \supset u,v . u \smile v\ \mathrm{S}x\}$ Df

Cette définition dépend de Prop 3·3.

$\cdot 2 \quad k \breve{\supset\sigma} . \supset . \Sigma k = \breve{\iota\sigma} \cap p\ni \{u \varepsilon \mathrm{Cls'Cls} . u \operatorname{sim} k : x,y \varepsilon u . \supset x,y . xy = \Lambda$

$: \exists\, 1+1 \cap \mathrm{R}\ni (u = \varrho . k = \breve{\varrho} : x \varepsilon u . x\mathrm{R}y . \supset x . x\mathrm{S}y) : \supset u . \smile' u\ \mathrm{S}p\}$ Df

Cette définition depend de Prop 3·41. Il importe d'observer qu'elle définit la somme d'une classe finie ou infinie de nombres finis ou infinis; mais qu'il faut que tous les nombres soient différents, car sinon, on ne peut les définir comme une classe de nombres, mais seulement comme nombres de classes. Pour le cas où il y a des nombres égaux dans la sommation, il faut des considérations différentes, et surtout la multiplication, que je ne développe pas ici, pour éviter les longueurs.

$\cdot 3 \quad 1_\sigma 0' 0_\sigma$

[$u\mathrm{S}1_\sigma . \supset . u \varepsilon \mathrm{Elm} : v\mathrm{S}0_\sigma . \supset . v = \Lambda : \Lambda - \varepsilon \mathrm{Elm} : \supset . \mathrm{Prop}$]

Cette proposition prouve que pour une relation quelconque de la classe ς, 1_σ diffère de 0_σ.

$\cdot 4 \quad x \varepsilon \breve{\sigma} . \supset . x+1_\sigma = \breve{\iota\sigma} \cap y\ni \{u\mathrm{S}x . z - \varepsilon u . \supset u,z . u \smile z\ \mathrm{S}y\}$ Df

$\cdot 41 \quad x \varepsilon \breve{\sigma - \iota 0_\sigma} . \supset . x - 1_\sigma = \breve{\iota\sigma} \cap y\ni \{u\mathrm{S}x . z \varepsilon u . \supset u,z . u - \iota z\ \mathrm{S}y\}$ Df

Cette définition dépend de Prop 3·51.

$4\cdot 5 \quad x \varepsilon \breve{\sigma - \iota 0_\sigma} . \supset : x - 1_\sigma 1' x . = . x 1' x + 1_\sigma$

[$x - 1_\sigma 1' x . u\mathrm{S}x - 1_\sigma . v\mathrm{S}x . \supset . u \operatorname{sim} v$ {1}

{1} . Prop 3·52 $. \supset \therefore z - \varepsilon u . w - \varepsilon v . \supset : u \operatorname{sim} v . = . u \smile z \operatorname{sim} v \smile w \therefore$

$\supset : x - 1_\sigma 1' x . = . x 1' x + 1_\sigma$]

$\cdot 6 \quad x \varepsilon \breve{\sigma - \iota 0_\sigma} . \supset : x - 1_\sigma 0' x . = . x 0' x + 1_\sigma$

[·5 . Transp $. \supset .$ Prop]

Les propositions ·5 et ·6 prouvent que si le nombre d'une classe est identique au nombre de la classe qu'on obtient en ôtant un terme à la classe donnée, alors ce nombre est aussi identique au nombre de la classe qu'on obtient eu ajoutant un terme à la classe donnée, et viceversa. Puisque nous avons prouvé (4·3) que 1_σ est différent de 0_σ, nons avons les moyens pour prouver que dans la classe des nombres qui obéissent à l'induction complete, en partant de 0_σ, deux nombres successifs ne sont jamais égaux. Mais avant de développer ce sujet, il faut examiner la théorie des progressions, c'est-à-dire, des séries dont le nombre ordinal est ω.

§ 3.

Les progressions.

✱ 1.1 $\omega = \mathrm{Cls} \cap u\ni\{\exists 1 \dashv 1 \cap \mathrm{R}\ni(u\supset\varrho \,.\, \breve{\varrho}u \supset u \,.\, \exists\, u - \breve{\varrho}u :$

$s \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, \exists\, su - \breve{\varrho}u \,.\, \breve{\varrho}(su) \supset s \,.\supset s \,.\, u \supset s\}$ Df

Ceci est une définition du nombre ordinal ω, ou bien, si l'on veut, une définition de la classe des classes dénombrables. Les nombres ordinaux sont en effe des classes de séries. La classe ω est la plus simple des classes de séries infinies. Puisque la définition ne présuppose pas les nombres, il sera bon de donner à ce type de séries un nom qui n'implique pas les nombres. Je l'appellerai donc la classe des *progressions*. Voici la définition en mots : ω est la classe des classes u telles qu'il y a une relation univoque et réciproque R telle que u est contenue dans le domaine de R, et que la classe des termes auxquels les différents u ont la relation R est contenue dans u, sans être identique avec u, et que, si s est une classe quelconque à laquelle appartient au moins un des termes de u auxquels aucun u n'a la relation R, et à laquelle appartient tout terme de u auquel un terme de la partie commune de u et s a la relation R, alors la classe u est contenue dans la classe s.

·11 $\mathrm{R}\varepsilon 1 \dashv 1 \,.\, \breve{\varrho} \supset \varrho \,.\, \exists\, \varrho - \breve{\varrho} \,.\, \supset \,.$

$\omega_\varrho = u\ni\{u\supset\varrho \,.\, \breve{\varrho}\, u \supset u \,.\, \exists\, u - \breve{\varrho}u : s\varepsilon\mathrm{Cls} \,.\, \exists\, su - \breve{\varrho}u \,.\, \breve{\varrho}(su) \supset s \,.\supset s \,.\, u \supset s\}$ Df

ω_ϱ est la classe des progressions dont R est la relation génératrice.

·12 $u\varepsilon\omega \,.\supset.\, \mathrm{Rel}u = 1 \dashv 1 \cap \mathrm{R}\ni(u\varepsilon\, \omega_\varrho)$ Df

·13 $\mathrm{Induct} .=:. u\varepsilon\omega \,.\, \mathrm{R}\varepsilon\, \mathrm{Rel}u \,.\supset: s\varepsilon\, \mathrm{Cls} .\, \exists\, su - \breve{\varrho}u \,.\, \breve{\varrho}\,(su)$
$\supset s \,.\supset s \,.\, u \supset s$ Df

·2 $u\varepsilon\omega \,.\, \mathrm{R}\varepsilon\, \mathrm{Rel}u \,.\supset.\, u - \breve{\varrho}u\ \varepsilon\ \mathrm{Elm}$

$[\, x\varepsilon\, u - \breve{\varrho}u \,.\, s = \iota x \cup \breve{\varrho}u \,.\supset.\, \breve{\varrho}(su) \supset s \,.\, \exists\, su - \breve{\varrho}u$ |1|

|1| . Induct $.\supset.\, u \supset s \,.\supset.\, u \supset \iota x \cup \breve{\varrho}u \,.\supset.\, u - \breve{\varrho}u \supset \iota x \,.\supset.$ Prop

$\mathrm{R}\varepsilon\, 1 \dashv 1 \,.\, \breve{\varrho} \supset \varrho \,.\, \exists\, \varrho - \breve{\varrho} \,.\, u\varepsilon\omega_\varrho \,.\, \supset ::$

·3 $\mathrm{O}u = \eta(u - \breve{\varrho}u)$ Df

·31 $x\varepsilon u \,.\supset.\, \mathrm{seq}x = \breve{\iota\varrho}x$

·4 $\mathrm{P}\varepsilon\, \mathrm{Rel} \,.\supset.\, \mathrm{P}^{\mathrm{O}}{}_u = 1'_\pi$ Df

·5 $\mathrm{P}\varepsilon\, \mathrm{Rel} \,.\, n\varepsilon u \,.\supset.\, \mathrm{P}\mathrm{seq}n = \mathrm{P}^n\, \mathrm{P}$ Df

Les P 1·4·5 définissent par induction les puissances finies des relations. Cette définition s'effectue au moyen des termes de u. Dans la théorie des

progressions on ne peut se passer des puissances des relations; donc, si l'on veut rendre cette théorie indépendante des nombres, il faut définir les puissances d'une manière qui n'introduit pas de nombres. Le symbole $1'\pi$ signifie l'identité dans la classe π, et la relation nulle partout ailleurs. Voir § 2 Prop 3·12.

·6 $1_u = \iota \breve{\varrho} (0_u)$ Df

·7 $P \varepsilon 1 \rightarrow 1 . \supset . P 1_u = P$

[$P 1_u = 1'\pi P = P$]

1·8 $P \varepsilon 1 \rightarrow 1 . a \varepsilon u . \supset . P^a \varepsilon 1 \rightarrow 1$

[$P 0_{u\varepsilon} 1 \rightarrow 1$ |1|

$P \varepsilon 1 \rightarrow 1$. §1Prop 5·7 .⊃: $a \varepsilon u$. $P^a \varepsilon 1 \rightarrow 1 . \supset . P^{seq a} \varepsilon 1 \rightarrow 1$ |2|

|1|.|2| . Induct .⊃. Prop]

·81 $x \varepsilon u . O_u R^x z . \supset . x 1' z$

[$x 1' 0_u . 0_u R^x z . \supset . z 1' 0_u$ |1|

$0_u R^x x . \supset . 0_u R^{seq x} seq x$ |2| |1| . |2| . Induct .⊃. Prop]

·82 $v \varepsilon \omega . R' \varepsilon Rel_v . x \varepsilon u . O_v R'^x z . \supset . z \varepsilon v$

[$x 1' 0_u . 0_v R'^x z . \supset . z 1' 0_v . \supset . z \varepsilon v$ |1|

$0_v R'^x z . z \varepsilon v . \supset . 0_v R'^{seq x} seq z . seq z \varepsilon v$ |2|

|1| . |2| . Induct .⊃. Prop]

1·9 $v \varepsilon \omega . R' \varepsilon Rel_v . \supset . \exists 1 \rightarrow 1 \cap P \ni \{u = \pi . v = \breve{\pi} : x, y \varepsilon u .$

$x R y . \supset x, y . \iota \breve{\pi} x R' \iota \breve{\pi} y\}$

Cette proposition affirme que deux progressions sont toujours deux séries semblables, c'est à dire qu'on peut trouver une relation univoque et réciproque dont le domaine est l'une des deux progressions, et dont la relation converse a l'autre progression pour son domaine, et qui est telle qu'aux termes qui précèdent dans une série correspondent des termes qui précèdent dans l'autre, et vice versa.

[§ 1 Prop 1·8 .⊃. $\exists$ rel $\cap P_0 \ni (\pi_0 = \iota 0_u . \breve{\pi}_0 = \iota 0_v)$ |1|

Prop 81 .⊃: $x \varepsilon u . 0_u R^x z . \supset . z \varepsilon u$ |2|

Prop 82 .⊃: $x \varepsilon u . 0_v R'^x z' . \supset . z' \varepsilon v$ |3|

|1| . |2| . |3| .⊃: $x \varepsilon u . z \breve{R}^x P_0 R'^x z' . \supset . z \varepsilon u . z' \varepsilon v . z 1' x$ |4|

§1 Prop 5·7 . §3 Prop 1·8 .⊃. $\breve{R}^x P_0 R'^x \varepsilon 1 \rightarrow 1$ |5|

|4|.|5| . $Q = rel \cap F \ni \{\exists u \cap x \ni (F = \breve{R}^x P_0 R'^x)\}$. $P = \cup' Q$.⊃.·.

$P \varepsilon 1 \rightarrow 1 . u = \pi . v = \breve{\pi} : x, y \varepsilon u . x R y . \supset_{x,y} . \iota \pi x R' \iota \breve{\pi} y$.·.⊃. Prop]

1·91 $u' \, sim \, u . \supset . u' \varepsilon \omega$

Dans cette proposition on démontre que toute classe semblable à une progression est elle-même une progression. Si P est la relation univoque et réciproque entre u et u', R la relation génératrice de u, alors $\breve{P} R P$ est la relation génératrice de u'.

[$u'\mathrm{sim}u \,.\supset.\, \exists\, 1\rightarrow 1 \cap P'\varepsilon(u\supset\pi' \,.\, \breve{\pi}'u = u')$ |1|

$P\varepsilon\, 1\rightarrow 1 \,.\, u\supset\pi \,.\, \breve{\pi}u = u' : x\varepsilon u \,.\supset_x.\, x' = \breve{\imath}\pi x \,.\, \mathrm{seq}x' = \breve{\imath}\pi(\mathrm{seq}x) :\supset.$

$x'\breve{P}x \,.\, x\mathrm{R}\,\mathrm{seq}x \,.\, \mathrm{seq}x\, P\, \mathrm{seq}\, x' \,.\supset.\, x'\, \breve{P}\mathrm{R}P\, \mathrm{seq}\, x'$ |2|

$Hp\,|2| \,.\, \breve{P}\mathrm{R}P = R' \,.\supset.\, R'\varepsilon\, 1\rightarrow 1 \,.\, \breve{\varrho}'u \supset u'$ |3|

$Hp\,|3| \,.\, x_0' = \imath\breve{\pi}0_u \,.\supset.\, x_0' = \imath\breve{u}'\text{-}\varrho'u'$ |4|

$Hp\,|3| \,.\, s\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\, \imath u'\text{-}\breve{\varrho}'u'\, \varepsilon s \,.\, \breve{\varrho}'(u's) \supset s \,.\supset.\cdot.$

$0_u\,(P\varepsilon)s : x(P\varepsilon)u's \,.\supset_x.\, \mathrm{seq}x\,(P\varepsilon)\, u's$ |5|

$|5| \,.\, \mathrm{Induct} \,.\supset:\, x\varepsilon u \,.\supset_x.\, x(P\varepsilon)u's$ |6|

$Hp\,|5| \,.\, |6| \,.\, P\varepsilon\, 1\rightarrow 1 \,.\supset:\, x'\varepsilon u' \,.\supset x' .\, x'\varepsilon s$ |7|

$|3| \,.\, |4| \,.\, |7| \,.\supset.\, \mathrm{Prop}$]

✱ 2. $R\ni 1\rightarrow 1 \,.\, \breve{\varrho} \supset \varrho \,.\, \exists\, \varrho = \breve{\varrho} \,.\, u\varepsilon\, \omega_\varrho \,.\supset::$

·1 $\breve{\varrho}u\ \varepsilon\ \omega_\varrho$

[$\mathrm{Prop}\,1{\cdot}91 \,.\, R' = \breve{R}RR \,.\supset.\, \breve{\varrho}u\ \varepsilon\ \omega_{\varrho'}$ |1|

$|1| \,.\, R'\supset R \,.\supset.\, \mathrm{Prop}$]

·11 $x\varepsilon u \,.\supset.\, \breve{\varrho}^x u\ \varepsilon\ \omega_\varrho$

[$u = \varrho^0{}_u\, u \,.\, \mathrm{Prop}\ 2{\cdot}1 \,.\, \mathrm{Induct} \,.\supset.\, \mathrm{Prop}$]

Note. $\breve{\varrho}^x u = y\ni\{\exists u \frown z\ni (zR^x\, y)\}$.

·12 $x\varepsilon u \,.\supset.\, x0'\ \mathrm{seq}\ x$

[$\exists u\text{-}\breve{\varrho}u \,.\, u\text{-}\breve{\varrho}u\ \varepsilon\ \mathrm{Elm} \,.\supset.\, 0_u\, 0'1_u$ |1|

$\mathrm{Prop}\ 11 \,.\, x\varepsilon u \,.\supset.\, \breve{\varrho}^x u\varepsilon\omega_\varrho \,.\, x1'0\breve{\varrho}^x u$ |2|

$|1| \,.\, |2| \,.\supset:\, x\varepsilon u \,.\supset_x.\, x0'\ \mathrm{seq}x$]

La P 2·11 prouve qu'on peut omettre autant de termes qu'on veut au commencement d'une progression sans qu'elle cesse d'être une progression : la P 2·12 prouve que tout terme d'une progression diffère de son successeur.

·13 $v \supset u \,.\, \exists v \,.\supset.\, \exists\, v = \breve{\varrho}v$

[$v\supset \breve{\varrho}v \,.\supset.\cdot.\, 0_u\text{-}\varepsilon v : x\varepsilon\, u\text{-}v \,.\supset_x.\, \mathrm{seq}x\text{-}\varepsilon v$ |1|

$|1| \,.\, \mathrm{Induct} \,.\supset.\, \text{-}\exists u \frown v \,.\supset.\, v = \Lambda$ |2|

$|2| \,.\supset:\, v\supset u \,.\, \exists v \,.\supset.\, \exists\, v = \breve{\varrho}v :\supset.\, \mathrm{Prop}$]

2·14 $v \supset u \,.\, \exists v.\, \breve{\varrho}v\supset v \,.\supset.\, v\varepsilon\, \omega_\varrho$

[$\mathrm{Prop}\ 2{\cdot}13 \,.\supset.\, \exists\, v\text{-}\breve{\varrho}v$ |1|

$Hp \,.\supset.\, \breve{\varrho}v\supset v$ |2|

$v\supset u \,.\, u\supset\varrho \,.\supset.\, v\supset\varrho$ |3|

$x\varepsilon v \,.\, \breve{\varrho}v \supset v \,.\supset.\, \mathrm{seq}\, x\ \varepsilon v :\supset:\, x\varepsilon v \,.\supset_x.\, \breve{\varrho}^x u \supset v :\supset:\, x\varepsilon\ v\text{-}\breve{\varrho}v \,.\supset.\, v = \breve{\varrho}^x u$ |4|

$|4| \,.\, \mathrm{Prop}\ 2{\cdot}11 \,.\supset.\, \mathrm{Prop}$]

$\cdot 15 \quad x \varepsilon \breve{\varrho} u \,.\supset.\, x 0' 0_u$

[$x \varepsilon \breve{\varrho} u \,.0_u - \varepsilon\, \breve{\varrho} u \,.\supset.$ Prop]

$\cdot 16 \quad x, z \varepsilon u \,.\, y \varepsilon \breve{\varrho} u \,.\, x \mathrm{R}^y z \,.\supset.\, x 0' z$

[$u' = \breve{\varrho}^x u \,.\supset.\, u, \varepsilon \varrho \omega \,.\, x = 0_u \,.\, z \varepsilon u'$ |1| |1| . Prop 2·15 .⊃. Prop]

Cette proposition prouve que le même terme ne peut jamais revenir dans une progression : tout terme diffère de tous les termes précédents.

$\cdot 2 \quad a, b \varepsilon u \,.\supset.\, \exists u \cap c \ni (a \mathrm{R}^b c)$

[$b 1' 0_u \,.\supset.\, a \mathrm{R}^b a$ |1|

$a \mathrm{R}^b c \,.\, c \varepsilon u \,.\supset.\, a \mathrm{R}^{\mathrm{seq}b} \mathrm{seq} c \,.\, \mathrm{seq} c\, \varepsilon u$ |2|

|1| . |2| . Induct .⊃. Prop]

$\cdot 21 \quad a, b \varepsilon u \,.\supset.\, u \cap c \ni (a \mathrm{R}^b c)\ \varepsilon\ \mathrm{Elm}$

[Prop 1·8 .⊃. Prop]

$\cdot 3 \quad a, b \varepsilon u \,.\supset.\, a + b = \imath u \cap c \ni (a \mathrm{R}^b c)$ Df

$\cdot 4 \quad a, b, x \varepsilon u \,.\supset.\, \exists u \cap y \ni \{x (\mathrm{R}^a)^b y\}$

[$b 1' 0_u \,.\supset.\, x (\mathrm{R}^a)^b x$ |1|

$x (\mathrm{R}^a)^b y \,.\, \exists u \cap z \ni (y \mathrm{R}^a z) \,.\supset.\, \exists u \cap z \ni \{x (\mathrm{R}^a)^b \mathrm{R}^a z\}$

$\supset.\, \exists u \cap z \ni \{x (\mathrm{R}^a)^{\mathrm{seq}b} z\}$ |2|

|1| . |2| . Induct .⊃. Prop]

$\cdot 41 \quad a, b \varepsilon u \,.\supset.\, (\mathrm{R}^a)^b\ \varepsilon\ 1 \rightarrow 1$

[$(\mathrm{R}^a\ 0_x\ \varepsilon\ 1 \rightarrow 1$ |1|

$(\mathrm{R}^a)^b\ \varepsilon\ 1 \rightarrow 1$. §1Prop 5·7 .⊃. $(\mathrm{R}^a)^{\mathrm{seq}b}\ \varepsilon\ 1 \rightarrow 1$ |2|

|1| . |2| . Induct .⊃. Prop]

$\cdot 42 \quad a, b, x \varepsilon u \,.\supset.\, u \cap y \ni \{x (\mathrm{R}^a)^b y\}\ \varepsilon\ \mathrm{Elm}$

[Prop 2·41 .⊃. Prop]

$\cdot 43 \quad a, b, x \varepsilon u \,.\supset.\, x + ab = \imath u \cap y \ni \{x (\mathrm{R}^a)^b y\}$ Df

$\cdot 44 \quad ab = 0_u + ab$ Df

$\cdot 45 \quad ab\ 1' c \,.\supset.\, x + ab\ 1'\ x + c$ [Induct]

$\cdot 46 \quad ab\ 0' c \,.\supset.\, x + ab\ 0'\ x + c$ [Induct]

$\cdot 47 \quad ab\ 1' c \,.=.\, x + ab\ 1'\ x + c$

[Prop 2·45·46 .⊃. Prop]

$\cdot 48 \quad a \varepsilon u \,.\supset.\, a + 0_u = a$

[$a + 0_u = \imath u \cap x \ni (a \mathrm{R}^{0_u} x) = a$]

$\cdot 49 \quad a \varepsilon u \,.\supset.\, 0_u + a = a$

[Prop 1·81 .⊃. Prop]

2·5 $a,b\varepsilon u \supset. \mathrm{R}^a \mathrm{R}^b = \mathrm{R}^{a+b}$

[$\mathrm{R}^a \mathrm{R}^{0_u} = \mathrm{R}^a = \mathrm{R}^{a+0_u}$ ¦1¦

$\mathrm{R}^a \mathrm{R}^b = \mathrm{R}^{a+b} \supset. \mathrm{R}^a \mathrm{R}^{\mathrm{seq}b} = \mathrm{R}^a \mathrm{R}^b \mathrm{R} = \mathrm{R}^{a+b}\mathrm{R} = \mathrm{R}^{\mathrm{seq}(a+b)}$ ¦2¦

$a + \mathrm{seq}b = nu \cap x \ni (a\mathrm{R}^{\mathrm{seq}b}x) = nu \cap x \ni \exists\, y \ni (a\mathrm{R}^b y \,.\, y\mathrm{R}x)$¦

$= nu \cap x \ni \exists u \cap (a,y) \ni (0_u \mathrm{R}^a a \,.\, a\mathrm{R}^b y \,.\, y\mathrm{R}x)$¦ ¦3¦

¦3¦ . Hp¦2¦ $\supset. a+\mathrm{seq}b = nu \cap x \ni \exists\, u \cap y \ni (0_u \mathrm{R}^{a+b} y \,.\, y\mathrm{R}x)$

$= \mathrm{seq}(a+b)$ ¦4¦

¦2¦ . ¦4¦ $\supset. \mathrm{R}^a \mathrm{R}^b = \mathrm{R}^{a+b} \supset. \mathrm{R}^a \mathrm{R}^{\mathrm{seq}b} = \mathrm{R}^{a+\mathrm{seq}b}$ ¦5¦

¦1¦ . ¦5¦ . Induct $\supset.$ Prop]

·51 $a,b,x\varepsilon u \supset. (x+a)+b = x+(a+b)$

[$(x+a)+b = nu \cap z \ni \exists\, u \cap y \ni (x\mathrm{R}^a y \,.\, y\mathrm{R}^b z)$¦

$= nu \cap z \ni (x\mathrm{R}^a \mathrm{R}^b z)$ ¦1¦

¦1¦ . Prop 2·5 $\supset. (x+a)+b = nu \cap z \ni (x\mathrm{R}^{a+b}z) = x+(a+b)$]

·52 $a,b,x\varepsilon u \supset. x+a+b = (x+a)+b$ Df

·53 $a,b\varepsilon u \supset. a+b = b+a$

[$0_u + 0_u = 0_u + 0_u$ ¦1¦ $0_u + 1_u = 1_u = 1_u + 0_u$ ¦2¦

$a+1_u = 1_u + a \,.\, \supset : \mathrm{seq}a+1_u = (a+1_u)+1_u = (1_u+a)+1_u$ ¦3¦

Hp ¦3¦ . ¦3¦ . Prop 2·52 $\supset. \mathrm{seq}a+1_u = 1_u + (a+1_u) + 1_u = 1_u + \mathrm{seq}a$ ¦4¦

¦2¦ . ¦4¦ . Induct $\supset. a+1_u = 1_u + a$ ¦5¦

¦3¦ . $a+b = b+a \supset. a+\mathrm{seq}b = a+b+1_u = a+1_u+b = 1_u+a+b = 1_u+b+a$

$= b+1_u+a = \mathrm{seq}b+a$ ¦6¦

¦1¦ . ¦6¦ . Induct $\supset.$ Prop]

·6 $a\varepsilon u \supset. a1_u = a$

[$a1_u = nu \cap x \ni \{0_u (\mathrm{R}^a)^{1_u} x\} = nu \cap x \ni \{0_u \mathrm{R}^a x\} = 0_u + a = a$]

·60 $a\,0_u = 0_u a = a$

·61 $a,b\varepsilon u \supset. a(b+1_u) = ab+a$

[$a(0_u + 1_u) = a1_u = a = a0_u + a$ ¦1¦

$a(b+1_u) = ab+a \supset.$

$a(\mathrm{seq}b+1_u) = nu \cap x \ni \{0_u (\mathrm{R}^a)^{\mathrm{seq}b+1_u} x$

$= nu \cap x \ni \{\exists\, u \cap y \ni (0_u \mathrm{R}^{ab+a} y \,.\, y\mathrm{R}^a x)\}$

$= nu \cap x \ni \{0_u \mathrm{R}^{ab+a+a} x\}$

$= nu \cap x \ni \{0_u \mathrm{R}^{a\,\mathrm{seq}b+a} x\} = a\,\mathrm{seq}b+a$ ¦2¦

¦1¦ . ¦2¦ . Induct $\supset.$ Prop]

·611 $a,b\varepsilon u \supset. (b+1_u)a = ba+a$

[$(b+1_u)0_u = 0_u = b0_u + 0_u$ ¦1¦

$(b+1_u)a = ba+a \supset.$

$(b+1_u)(a+1_u) = nu \cap x \ni \{0_u \mathrm{R}^{(b+1_u)(a+1_u)} x\}$

$= nu \cap x \ni \{\exists\, y \ni (0_u \mathrm{R}^{(b+1_u)a} y \,.\, y\mathrm{R}^{b+1_u} x)\}$

$= nu \cap x \ni \{\exists\, y \ni (0_u \mathrm{R}^{ba+a} y \,.\, y\mathrm{R}^{b+1_u} x)\}$

$= ba+a+b+1_u = ba+b+a+1_u$ ¦2¦

Prop 2·61 . $\supset$. $ba+b+a+1_u = b(a+1_u)+a+1_u$ ¦3¦

¦2¦ . ¦3¦ $\supset: (b+1_u)a = ba+a \supset. (b+1_u)(a+1_u) = b(a+1_u) + a+1_u$ ¦4¦

¦1¦ . ¦4¦. Induct $\supset.$ Prop]

2·62 $a,b,c\varepsilon u \,.\supset.\, a(b+c) = ab+ac$

$a(b+0_u) = ab = ab+a0_u$ |1|
$a(b+c) = ab+ac \,.\supset.\, a(b+c+1_u) = a(b+c)+a = ab+ac+a$ |2|
Prop 2·61 $.\supset.\, ab+ac+a = ab+a(c+1_u)$ |3|
Prop 2·53 $.\supset.\, ab+ac+a = ac+ab+a = ac+a(b+1_u) = a(b+1_u)+ac$ |4|
|2| . |3| . |4| $.\supset:\, a(b+c) = ab+ac \,.\supset.\, a(b+c+1_u) = ab+a(c+1_u) = a(b+1_u)$
$+ac$ |5|
|1| . |5|. Induct . ⊃ . Prop]

·63 $a,b,c\varepsilon u \,.\supset.\, (b+c)a = ba+ac$

[$(b+c)0_u = 0_u = b0_u + c0_u$ |1|
$(b+c)a = ba+ca \,.\supset.\, (b+c)(a+1_u) = (b+c)a+b+c = ba+ca+b+c$
$= ba+b+ca+c$ |2|
Prop 2·61 . ⊃: $ba+b = b(a+1_u)$. $ca+c = c(a+1_u)$ |3|
|2| . |3| .⊃: $(b+c)\,a = ba+ca \,.\supset.\, (b+c)(a+1_u) = b(a+1_u)+c(a+1_u)$ |4|
|1| . |4|. Induct .⊃. Prop]

·64 $a,b\varepsilon u \,.\supset.\, ab = ba$

[$a0_u = 0_u = 0_u\, a$ |1|
$ab = ba \,.\supset.\, a(b+1_u) = ab+a = ba+a = (b+1_u)a$ |2|
|1| . |2|. Induct .⊃. Prop]

On a maintenant prouvé les lois formales de l'addition et de la multiplication : la loi associative de l'addition dans P 2·51, la loi commutative de l'addition dans P 2·53, la loi distributive dans ·62 et ·63, et la loi commutative de la multiplication dans ·64. La loi associative de la multiplication résulte immédiatement (comme pour tous les produits relatifs) de la même loi pour le produit logique. Dans ce qui précède on n'a jamais présupposé les nombres : la théorie toute entière s'applique a toute progression. De là découle dans une forme générale toute l'arithmétique des nombres finis.

✱ 3. $R\varepsilon\, 1{+}1 \,.\, \breve{\varrho}\supset\varrho \,.\, \exists\varrho\!-\!\breve{\varrho} \,.\, u\varepsilon\omega_\varrho \,.\, a,b,c\varepsilon u \,.\supset::$

·1 $P\varepsilon\, 1{+}1 \,.\, yPz \,.\, xP^{seq\,a}z \,.\supset.\, xP^a y$
[$x\, P^{seq\,a}\, z \,.\supset.\, \exists\, u \frown w \ni (xP^a\, w \,.\, wPz)$ |1|
$P\varepsilon 1{+}1 \,.\supset.\, w \ni (wPz)\, \varepsilon \mathrm{Elm}$ |2|
|2| . $yPz \,.\supset.\, y\varepsilon w \ni (wPz) \,.\supset.$ Prop]

·11 $P\varepsilon\, 1{+}1 \,.\, xPy \,.\, xP^{seq\,a}z \,.\supset.\, y\, P^a z$
$P^{seq\,a} = P^{a+1_u} = P^{1_u+a} = PP^a$ |1|
|1| .⊃: $xP^{seq\,a}z \,.=.\, \exists w \ni (xPw \,.\, wP^a\, z)$ |2|
|2| . $\breve{\pi}x\, \varepsilon$ Elm . $xPy \,.\supset.\, y\varepsilon w \ni (xPw \,.\, wP^a\, z \,.\supset.$ Prop]

·12 $x\varepsilon\breve{\varrho}u \,.\supset.\, x-1_u = \imath\, u \frown y \ni (\mathrm{seq}\, y = x)$ Df

3·2 $\exists\, u \cap x\ni(a\mathrm{R}^x b \mathbin{\smile} b\mathrm{R}^x a)$

[$\mathrm{O}_u\, \mathrm{R}^b\, b$ |1|

$\exists\, \breve{\varrho} u \cap x\ni(a\mathrm{R}^x b)$. Prop 3·11 .ɔ. $x—1_u\, \varepsilon\, u \cap y\ni(\mathrm{seq}a\, \mathrm{R}^y\, b)$ |2|

$a\mathrm{R}^{\mathrm{O}_u} b$.ɔ. $b\mathrm{R}^{1_u}\mathrm{seq}a$.ɔ. $\exists\, u \cap y\varepsilon(b\mathrm{R}^y\, \mathrm{seq}a)$ |3|

$\exists\, u \cap x\ni(b\mathrm{R}^x a)$. $z\varepsilon u \cap x\ni(b\mathrm{R}^x a)$.ɔ. $b\mathrm{R}^{\mathrm{seq}z}\mathrm{seq}a$

ɔ. $\exists\, u \cap y\ni(b\mathrm{R}^y\, \mathrm{seq}a)$ |4|

|2|.|3|.|4| .ɔ. $\exists\, u \cap x\ni(a\mathrm{R}^x b \mathbin{\smile} b\mathrm{R}^x a)$.ɔ. $\exists\, u \cap y\ni(\mathrm{seq}a\, \mathrm{R}^y\, b \mathbin{\smile} b\, \mathrm{R}^y\, \mathrm{seq}a$ |5|

|1|.|5| Induct .ɔ. Prop]

·21 $\mathrm{O}_u\, \varepsilon\, u \cap x\ni(a\mathrm{R}^x b \mathbin{\smile} b\mathrm{R}^x a)$.ɔ. $a1'b$

·22 $\mathrm{O}_u = \varepsilon\, u \cap x\ni(a\mathrm{R}^x b \mathbin{\smile} b\mathrm{R}^x a)$.ɔ. $\exists\, \breve{\varrho} u \cap x\ni(a\mathrm{R}^x b \mathbin{\smile} b\mathrm{R}^x a)$

·3 $a > b \mathrel{.=\!=.} \exists\, \breve{\varrho} u \cap x\ni(b\mathrm{R}^x a)$ Df

·31 $a < b \mathrel{.=.} \exists\, \breve{\varrho} u \cap x\ni(a\mathrm{R}^x b)$ Df

·32 $a1'b \mathbin{\smile} a > b \mathbin{\smile} a < b$ [Prop 3·2 .ɔ. Prop]

·33 $a > b$.ɔ. $-(a < b)$

[$a > b$. $a < b \mathrel{.=.} \exists \breve{\varrho} u \cap (x,y)\ni(a\mathrm{R}^x b$. $b\mathrm{R}^y a$.ɔ. $\exists \breve{\varrho} u \cap x + y\ni(a\mathrm{R}^x + {}^y a)$

ɔ. $-$(Prop 2·16) |1|

|1| .ɔ.·. Prop 2·16 .ɔ. $a > b$.ɔ. $-(a < b)$.·.ɔ. Prop]

·34 $a < b$.ɔ. $-(a > b)$

·35 $a < b = b > a$ [Prop 3·3·31 .ɔ. Prop]

·36 $a < b$.ɔ. $ac < bc$

·37 $a > b$.ɔ. $ac > bc$

✱ 4. $\mathrm{R}\varepsilon\, 1 \dotplus 1$. $\breve{\varrho} \ni \varrho$. $\exists \breve{\varrho} = \breve{\varrho}$. $u \varepsilon \omega_\varrho$. $a,b,c \varepsilon \breve{\varrho} u$.ɔ::

·1 $a\mathrm{B}c \mathrel{.=.} ab = c$ Df

·11 $\mathrm{B}\varepsilon\, \mathrm{Rel}$

[$x \varepsilon u$.ɔ. $c\ni(xb = c)\varepsilon\, \mathrm{Elm}$ |1|

|1| . § 1 Prop 1·8 .ɔ: $xb = c$.ɔ$_a$. $\exists \mathrm{Rel} \cap \mathrm{R}_{xb}\ni(\varrho_{xb} = \iota x$. $\breve{\varrho}_{xb} = \iota c)$ |2|

$\mathrm{K}_b = \mathrm{Rel} \cap \mathrm{R}_\ni \{\exists u \cap x\ni(xb = c$. $\varrho = \iota x$. $\breve{\varrho} = \iota c)\}$. $\mathrm{R}_b = \smile\text{‘}\, \mathrm{K}_b$.ɔ.

$a\mathrm{R}_b\, c \mathrel{.=.} ab = c$.ɔ. $\mathrm{R}_b\, 1'\mathrm{B}$ |3|

|3| . § 1 Prop 1·95 .ɔ. Prop]

·2 $\mathrm{B}\varepsilon\, 1 \dotplus 1$

[$b1'1_u$.ɔ. $\mathrm{B}\varepsilon 1 \dotplus 1$ |1|

$\mathrm{B}\varepsilon 1 \dotplus 1$. $d1'\mathrm{seq}b$.ɔ. $\mathrm{D}\varepsilon 1 \dotplus 1$ |2|

|1| . |2| . Induct .ɔ. Prop]

·3 $d \varepsilon \breve{\varrho}\, u$.ɔ: $a\mathrm{B}\breve{\mathrm{C}}d \mathrel{.=.} \exists\, u \cap n\ni\{ab = n$. $dc = n\} \mathrel{.=.} b\mathrm{A}\breve{\mathrm{D}}c$

·4 $\mathrm{B}\breve{\mathrm{C}}\varepsilon\, 1 \dotplus 1$

[$\mathrm{B},\mathrm{C}\varepsilon 1 \dotplus 1$.ɔ. Prop]

4·5 $\mathrm{H}\varepsilon\ \mathrm{Nc}{+}1\ .\supset:\ x\mathrm{Op}_{\mathrm{H}} = y\ .=.\ x\mathrm{H}y$ Df

·51 $\mathrm{Op} = p\ni\{(p=)\ \varepsilon\ \mathrm{Nc}{+}1\}$ Df

En mathématique on a l'habitude de parler des opérations plutôt que des relations univoques. Les Df 4·5·51 n'ont pour but que de permettre l'emploi du langage habituel. La relation entre une relation univoque et une opération s'exprime dans ces Df : l'opération suivie du signe d'égalité signifie la relation correspondante.

·6 $\mathrm{r}_u = q\ni\{\exists\ \breve{\varrho}u \cap (x,y)\ni(q = \mathrm{Op}_{\mathrm{X}}\breve{\mathrm{Y}})\}$ Df

·61 $b/c = \mathrm{Op}_{\mathrm{B}}\breve{\mathrm{C}}$ Df

Les P 4·6·61 donnent la Df générale des opérations qui corrrespondent aux nombres rationnels. Il est important de remarquer que selon cette Df aucun nombre rationnel ne doit être identifié avec un nombre entier, puisque les nombres rationnels sont des opérations sur les nombres entiers, tandis que les nombres entiers ne le sont pas.

·7 $ab/(ac) = a/c$ [Prop 4·3 .⊃. Prop]

·71 $a\mathrm{B}\breve{\mathrm{A}}b$ [$a\mathrm{B}ab\ .\ b\mathrm{A}ab$.⊃. Prop]

·72 $q,q'\varepsilon\mathrm{r}\ .\supset.\ \exists\ u \cap (x,y,z)\ni(q = x/z\ .\ q' = y/z)$

[$q = m/n\ .\ q' = m'/n'$. Prop 4·7 .⊃. $q = mn'/(nn')\ .\ q' = m'n/(nn')$.⊃. Prop]

·73 $q = x/z = x'/z'\ .\ q' = y/z = y'/z'\ .\ x < y\ .\supset.\ x' < y'$

[Prop 3·36 .⊃. Prop]

·74 » » $x > y\ .\supset.\ x' > y'$

[Prop 3·37 .⊃. Prop]

·8 $q,q'\varepsilon\ \mathrm{r}u\ .\supset\therefore\ q\mathrm{M}q'\ .=:\ q = x/z\ .\ q' = y/z\ .\supset_{x,y,z}.\ x < y$ Df

·81 $\mathrm{M}\ \varepsilon\ \mathrm{Rel}$

[Cette P se prouve par la méthode de Prop 4·11, mais la preuve est longue]

·9 $q,q'\varepsilon\mathrm{r}u\ .\ q\mathrm{M}q'\ .\supset.\ \exists\ \mathrm{r}u \cap q''\ni(q\mathrm{M}q''\ .\ q''\mathrm{M}q')$

[$q = a/c\ .\ q' = b/c\ .\ -(a\mathrm{R}b)$.⊃. $q\ \mathrm{M}\ \mathrm{seq}a/c\ .\ \mathrm{seq}a/c\ \mathrm{M}\ b/c$ |1|

$q = a/c\ .\ q' = b/c\ .\ a\mathrm{R}b\ .\ d\varepsilon\breve{\varrho}^2x\ .\supset.\ q = ad/(cd)\ .\ q' = bd/(cd)\ .\ -(ad\mathrm{R}bd)$ |2|

|1|.|2| .⊃. Prop]

·91 $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$ [Prop 4·9 . § 1 Prop 2·3 .⊃. Prop]

Pour éviter les confusions, j'ai désigné par M la relation d'être moindre parmis les rationels. On vient de démontrer que cette relation est égale à son carré, ce qui prouve qu'elle engendre une série condensée. Dans le § 5 nous développerons la théorie générale de ces séries.

✱ 5. $\mathrm{R}\varepsilon\ 1{+}1\ .\ \breve{\varrho}\supset\varrho\ .\ \exists\ \varrho{=}\breve{\varrho}\ .\ u\varepsilon\omega_\varrho\ .\ a,b,c,d\varepsilon u\ .\supset::$

·1 $+a = \mathrm{Op}_{\mathrm{R}^a}$ Df ·11 $-a = \mathrm{Op}_{\breve{\mathrm{R}}^a}$ Df

·2 $\breve{\mathrm{R}}^a = (\breve{\mathrm{R}}^a)$ [Induct]

$\cdot 3 \quad +u = x\ni\{\exists\, u \frown y\ni(x\ 1' +y)\}$ Df

$\cdot 31 \quad -u = x\ni\{\exists\, u \frown y\ni(x\ 1' -y)\}$ Df

$\cdot 32 \quad \pm u = +u \smile -u$ Df

$\cdot 4 \quad q,q' \varepsilon \mathrm{r}u \ .\supset\therefore\ q(\mathrm{D/C})q' \ .=:\ q = a/c \ .\ q' = b/c \ .$

$-\exists\, \breve{\varrho}^2 u \frown (x,y,z)\ni(a=xz \ .\ c=yz :\supset:\ b=xz \ .\ c=yz) \ .\supset.\ a+d=b$ Df

$\cdot 41 \quad +d/c = \mathrm{Op}_{\mathrm{D/C}}$ Df $\qquad \cdot 42 \quad -d/c = \mathrm{Op}_{\breve{(\mathrm{D/C})}}$ Df

$\cdot 5 \quad +\mathrm{r}u = x\ni\{\exists\, u \frown (y,z)\ni(x= +y/z)$ Df

$\cdot 51 \quad -\mathrm{r}u = x\ni\{\exists\, u \frown (y,z)\ni(x= -y/z)\}$ Df

1 $+\mathrm{r}u$ est la classe des rationnels positifs, qui sont des opérations sur es rationnels sans signes. Les classes u, $\mathrm{r}u$, $+u$, $+\mathrm{r}u$ s'excluent mutuellement: aucun terme de l'une des quatre n'appartient à aucune des trois autres.

§ 4.

Le fini et l'infini.

✱ $1\cdot 1 \quad \mathrm{Cls\ infin} = \mathrm{Cls} \frown u\ni\{\exists\, u \frown x\ni(u = \iota x \ \mathrm{sim}\ u)\}$ Df

$\cdot 11 \quad \mathrm{Cls\ fin} = \mathrm{Cls} - \mathrm{Cls\ infin}$ Df

$\cdot 2 \quad \mathrm{Cls\ infin} = \mathrm{Cls} \frown u\ni\{x\varepsilon u \ .\supset_x.\ u = \iota x \ \mathrm{sim}\ u\}$

[§2 Prop 3·5 .ɔ: $x,y\varepsilon u$.ɔ. $u - \iota x$ sim $u - \iota y$:ɔ. Prop]

$\cdot 21 \quad \mathrm{Cls\ infin} = \mathrm{Cls} \frown u\ni\{u = \iota x \ \mathrm{sim}\ u\}$

[Prop 1·2 . $x\varepsilon u$.ɔ. $u - \iota x$ sim u |1|

$x \varepsilon u$.ɔ. $u - \iota x = u$.ɔ. $u - \iota x$ sim u |2|

|1| . |2| .ɔ. Prop]

$\cdot 22 \quad \mathrm{Cls\ fin} = \mathrm{Cls} \frown u\ni\{x\varepsilon u \ .\supset_x.\ -(u = \iota x \ \mathrm{sim}\ u)\}$

[Prop 1·1·11 .ɔ. Prop]

$\cdot 3 \quad u\varepsilon\ \mathrm{Cls\ infin} \ .\ x \varepsilon u \ .\supset.\ u \smile \iota x\ \varepsilon\ \mathrm{Cls\ infin}$

[Hp . $y\varepsilon u$.ɔ. $u - \iota y$ sim u |1|

|1| . §2 Prop 3·3 .ɔ. u sim $u \smile \iota x$.ɔ. Prop]

$\cdot 31 \quad u \smile \iota x\ \varepsilon\ \mathrm{Cls\ fin} \ .\ x \varepsilon u \ .\supset.\ u\varepsilon\ \mathrm{Cls\ fin}$

[Prop 1·3 . Transp .ɔ. Prop]

$\cdot 4 \quad u\varepsilon\ \mathrm{Cls} \ .\ u \smile \iota x\ \varepsilon\ \mathrm{Cls\ infin} \ .\ x \varepsilon u \ .\supset.\ u\varepsilon\ \mathrm{Cls\ infin}$

[$u \smile \iota x\ \varepsilon$ Cls infin . $x \varepsilon u$.ɔ. $u \smile \iota x$ sim u |1|

|1| . $y\varepsilon u$. §1 Prop 3·51 .ɔ. u sim $u - \iota y$.ɔ. Prop]

$\cdot 41 \quad u\varepsilon\ \mathrm{Cls\ fin} \ .\ x \varepsilon u \ .\supset:\ u \smile \iota x\ \varepsilon\ \mathrm{Cls\ fin}$

[Prop 1·4 . Transp .ɔ. Prop]

$\cdot 5 \quad u\varepsilon\ \mathrm{Cls} \ .\ x \varepsilon u \ .\supset:\ u\varepsilon\ \mathrm{Cls\ fin} \ .=.\ u \smile \iota x\ \varepsilon\ \mathrm{Cls\ fin}$

[Prop 1·31·41 .ɔ. Prop]

$\cdot 6 \quad \bigwedge \varepsilon\ \mathrm{Cls\ fin}$

[$u\varepsilon$ Cls infin .ɔ. $\exists u$:ɔ. Prop]

1·61 Elm ⊃ Cls fin

[$u \varepsilon$ Elm .⊃$_u$. $\exists x \ni (u = \iota x)$: Prop 1·41 . $\wedge \varepsilon$ Cls fin :⊃. Prop]

·7 $u \varepsilon$ Cls fin .⊃. $\exists = u$ Pp

✱ 2. $S \varepsilon \mathcal{S}$.⊃::

·1 $\breve{\sigma}$ infin $= \breve{\sigma}$(Cls infin) Df

·11 $\breve{\sigma}$ fin $= \breve{\sigma}$(Cls fin) Df

·12 $\breve{\sigma}$ fin $= \breve{\sigma} - \breve{\sigma}$ infin [$S \varepsilon$ Nc+1 .⊃. Prop]

·2 $x \varepsilon \breve{\sigma}$fin .=. $x + 1_\sigma \varepsilon \breve{\sigma}$ fin [Prop 1·5 .⊃. Prop]

·21 $x \varepsilon \breve{\sigma}$fin .=. $x 0' x + 1_\sigma$

[Prop 1·22 . §2 Prop 4·6 .⊃. Prop]

·3 $R_\sigma = \imath \mathrm{Rel} \cap R \ni \{x R y .=. x \varepsilon \breve{\sigma}$ fin . $y = x + 1_\sigma\}$ Df

·31 $R_\sigma \varepsilon 1 + 1$ [§2 Prop 3·52 . $S \varepsilon$ Nc+1 .⊃. Prop]

·32 $R_\sigma \supset 0'$ [Prop 2·21 .⊃. Prop]

·33 $\varrho_\sigma = \breve{\sigma}$ fin

[$x \varepsilon \varrho_\sigma$. $u S x$.⊃. $u \varepsilon$ Cls fin |1|

|1| . Prop 1·7 .⊃. $\exists = u$.⊃. $\exists \breve{\varrho}_\sigma x$.⊃. Prop]

·34 $\breve{\varrho}_\sigma = \breve{\sigma}$ fin $- \iota 0_\sigma$

[$x \varepsilon \breve{\sigma}$ fin . $u S x$. $x 0' 0_\sigma$.⊃. $\exists u$.⊃: $y \varepsilon u$.⊃. $u - \iota y \, S \iota \varrho_\sigma x$:⊃. Prop]

·35 $\breve{\sigma}$ fin ε Cls infin

[$\breve{\sigma}$ fin $= \varrho_\sigma$. $\breve{\sigma}$ fin $- \iota 0_\sigma = \breve{\varrho}_\sigma$. ϱ_σ sim $\breve{\varrho}_\sigma$.⊃. Prop]

✱ 3. $S \varepsilon \mathcal{S}$.⊃::

·1 $s \varepsilon$ Cls . $0_\sigma \varepsilon s$. $\varrho_\sigma (s \cap \breve{\sigma}$ fin) $\supset s$.⊃. $\breve{\sigma}$ fin $\supset s$ Pp

·11 Induct = Prop 3·1 Df

On peut, si on veut, définir les nombres finis par l'induction complète, et prendre comme Pp la définition 1·1. Mais je n'ai pas réussi à déduire une de ces P de l'autre. Si l'on définit une classe infinie par la propriété de renfermer une partie qui lui est semblable, on ne réussit pas à démontrer que la partie qu'on obtient en enlevant un seul individu est semblable à la classe entière, ce qui a des conséquences fatales pour la théorie des nombres finis. Si l'on définit une classe infinie par la propriété de rester semblable à elle-même quand on lui ajoute un terme qui ne lui appartient pas, on exclure la classe de tous les individus, puisqu'on ne peut rien ajouter à cette classe. Pour ces raisons j'ai adopté la définition 1·1, avec les deux Pp 1·7 et 3·1.

$3{\cdot}2 \quad \breve{\sigma}\,\text{fin}\ \varepsilon\ \omega$

[Prop 2·3·31·33·34·3·1 . §3 Prop 1·1 .ɔ. Prop]

$\cdot 3 \quad \breve{\rho}\,\text{fin} = \text{Cls} \cap u\ni \{\exists \text{S} \cap \text{S}\ni(u = \breve{\sigma}\,\text{fin})\}$ Df

$\cdot 31 \quad \breve{\rho}\,\text{fin} = \omega$

[Prop 3·2 .ɔ. $\breve{\rho}$ fin ɔ ω |1|

$\text{R}\varepsilon\ 1{\rightarrow}1 \,.\, u = \varrho \,.\, \breve{\sigma}\,\text{fin} = \breve{\varrho} \,.\, \text{P} = \text{RR}\sigma\breve{\text{R}} \,.\text{ɔ}.\, u\varepsilon\ \omega_{\pi}$ |2|

§2 Prop 1·54 .ɔ. $u\varepsilon\ \breve{\rho}$ fin |3| |1| . |2| . |3| .ɔ. Prop]

On a maintenant prouvé que toute classe semblable aux nombres cardinaux finis est une progression, et vice versa. De là on déduit que tous les résultats du § 3 s'appliquent aux nombres finis.

$\cdot 4 \quad u\varepsilon\ \text{Cls fin} \,.\text{ɔ}.\, \exists\, \omega \cap v\ni(u \supset v)$

[$u = \Lambda$.ɔ: $v\varepsilon\omega$.ɔ$_u$. $u\supset v$ |1|

§2 Prop 3·5 . §3 Prop 1·91 .ɔ: $u\varepsilon$Elm . $v'\varepsilon\omega$. $x\varepsilon v$.ɔ. $v'-\iota x \cup u\ \varepsilon\omega$

.ɔ. $\exists\, \omega \cap v\ni(u\supset v)$ |2|

$u\varepsilon$ Cls fin . $v\varepsilon\omega$. $u\supset v$. $u\text{S}x$. $y-\varepsilon u$.ɔ.

$w\cup\iota y\ \varepsilon$ Cls fin . $w\cup\iota y\ \text{S}\ x+1\sigma$. $w\cup\iota y \supset v\cup\iota y$ |3|

Prop 3·31 . Prop 2·35 . Prop 1·1·3 . §3 Prop 1·91 .ɔ. $v\cup\iota y\ \varepsilon\omega$ |4|

|3|.|4| .ɔ: $u\varepsilon$ Cls fin . $v\varepsilon\omega$. $u\supset v$. $u\text{S}x$. $y-\varepsilon u$.ɔ.

$w\cup\iota y\ \varepsilon$ Cls fin . $v\cup\iota y\varepsilon\omega$. $w\cup\iota y \supset v\cup\iota y$. $w\cup\iota y\ \text{S}\ x+1\sigma$ |5|

|1| : |2| . |5| . Induct :ɔ. Prop]

$\cdot 41 \quad u\varepsilon\ \text{Cls fin} \,.\text{ɔ}.\, \exists\, \omega \cap v\ni\{u\supset v \,.\, \exists\, v \cap x\ni(y\varepsilon u \,.{=}.\, y{<}x)\}$

Pour la définition de $y{<}x$, voir § 3 Prop 3·31.

[$u = \Lambda$. $v\varepsilon\omega$.ɔ: $y\varepsilon u$.=. $y{<}0_v$ |1|

$u\varepsilon$Elm . Prop3·4 .ɔ. $\exists\, \omega \cap v\ni(\iota u\varepsilon v)$ |2|

$v\varepsilon\omega$. $\iota u\varepsilon v$. §3 Prop 2·11 .ɔ. $\iota u \cup v \cap z\ni (z{>}\iota u)\ \varepsilon\omega$

.ɔ. $\exists\, \omega \cap v'\ni\{u\supset v' \,.\, \exists\, v' \cap x\ni(y\varepsilon u \,.{=}.\, y{<}x)\}$ |3|

$v\varepsilon\omega$. $u\varepsilon$ Cls fin . $u\supset v$. $\exists\, v \cap x\ni(y\varepsilon u \,.{=}.\, y{<}x)$. $z-\varepsilon u$.ɔ::

$v \cup \iota z\varepsilon\omega$. $u \cup \iota z\ \varepsilon$ Cls fin . $u \cup \iota z \supset v\cup\iota z$.∴. $x\varepsilon v : y{<}x$.=. $y\varepsilon u$.∴.ɔ.

$\exists\, \omega \cap v'\ni\{v\supset v' \,.\, v'-v = \iota z \,.\, x\varepsilon v' : y\varepsilon\ w\cup\iota z \,.{=}.\, y{<}x\}$ |4|

|1| . |2| . |4| . Induct .ɔ. Prop]

$\cdot 42 \quad \text{Cls fin} = \text{Cls} \cap u\ni\{\exists\, \omega \cap v\ni [\ u\supset v \,.\, \exists\, v \cap x\ni\ (y\varepsilon u \,.{=}.\, y{<}x)]\}$

On déduit que toute classe finie peut être bien ordonnée.

$\cdot 5 \quad u\varepsilon\ \text{Cls fin} \,.\text{ɔ}.\, {=}\exists\, \text{Cls} \cap v\ni\ (v\supset u \,.\, \exists\, u{=}v \,.\, u\text{sim}v)$

[$\text{S}\varepsilon\text{S} \,.\, v\text{S}x \,.\, u-v\text{S}y$.ɔ. $u\text{S}\ x+y$ |1|

§3 Prop 2·16 .ɔ. $x+y\ 0'\ x$.ɔ. Prop]

$\cdot 51 \quad \text{Cls infin} = \text{Cls} \cap u\ni\ \{\exists\, \text{Cls} \cap v\ni\ (v\supset u \,.\, \exists\, u{=}v \,.\, u\text{sim}v\ )\}$

[Prop 1·1: 3·51 . Transp :ɔ. Prop]

La P 3·51 donne la définition habituelle de l'infini, de laquelle, cependant, il ne paraît pas possible de déduire la P 1·1.

Stampato coi tipi della « Rivista di Matematica » dalla Tip. Gerbone - Torino.

NUOVE PUBBLICAZIONI

C. ALASIA — *La recente geometria del triangolo.* Città di Castello, S. Lapi, 1900, pag. XVI+340. Lire 3.

C. BURALI-FORTI — *Lezioni di aritmetica pratica.* Torino, Petrini, 1901, pag. VII+276 con X tavole. Lire 2.

P. CAZZANIGA — Libro di aritmetica e di algebra elementare, parte II^a, III^a edizione. Verona, Drucker, 1900, pag. 134-260. Lire 2.

— id. id. parte III^a, III^a edizione, id. id. pag. 261-375. Lire 2.

M. DE FRANCHIS — *Elementi di geometria* ad uso delle scuole tecniche. Palermo, Sandron, 1901, pag. IV+226. Lire 2.

HAMILTON — *Elements of Quaternions,* edited by C. J. Joly, a.1899, vol. I, pag. XXXIV+583 — a.1901, vol. II, pag. LIV+502 — Longmans, Green, and Co; London. Price S.21.

F. INVREA — *Elementi di fisica,* vol. secondo, fasc. 1°, Magnetismo, Elettricità. Torino, L. 3.

A. KNESER — *Lehrbuch der Variationsrechnung,* mit 24 abbild. Braunschweig, druck und verlag von Friedrich Vieweg und sohn, 1900, pag. XIV+311.

L. MASCHERONI — *La geometria del compasso* (nuova ediz. con ritratto) pubblicato da G. Fazzari. Palermo, « Era nuova », 1901, pagine XVI+152. Lire 2.

S. ORTU CARBONI — *Esercizi di geometria elementare.* Livorno, Giusti, 1901, pag. VIII+170. Lire 1.

S. PINCHERLE e U. AMALDI — *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi.* Bologna, Zanichelli, 1901; Lire 15.

S. PINCHERLE — *Introduz. al corso di algebra complementare e di geom. analitica.* Bologna, Zanichelli, 1901, pag. 66. Lire 2.

LIA PREDELLA-LONGHI — *Elementi di algebra,* ad uso della 1^a classe normale. Seconda ediz. riveduta e corretta. Roma, Paravia, 1901, pag. IV+102.

A. RUSSELL FORSITH — *Trattato sulle equazioni differenziali,* prima versione dall'inglese di A. Arbicone. Livorno, Giusti, 1901, pagine VI+337. Lire 7.

O. STOLZ und J. A. GMEINER — *Theoretische Arithmetik.* I Abtheilung, Leipzig, Teubner, 1900, pag. 98.

G. VERONESE — *Nozioni elementari di geometria intuitiva* ad uso dei ginnasi inferiori. Verona, Drucker, 1901, pag. VIII+80. Lire 1.

Revue de Mathématiques publiée par G. Peano, t. 7, et **Formulaire de Mathématiques** t. 3.

Prix de l'abonnement 10 fr. pour l'Italie, 11 fr. pour l'Union postale.

Tomes 1 à 6 de la *Revue*, 1 et 2 du *Formulaire* fr. 64.

L'adresser aux librairies Frères Bocca, et Ch. Clausen à Turin, ou à l'editeur G. Peano, Via Barbaroux, 6, Torino.

Le *Formulaire de Mathématiques* publie toutes les propositions mathématiques exprimées entièrement par les symboles idéographiques. La *Revue* publie les travaux ayant pour but le perfectionnement du Formulaire.

Title-page + cont.
Sec. 895.54

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES

(RIVISTA DI MATEMATICA)

PUBLIÉE PAR

G. PEANO

Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin

TOME VII - N° 3

SOMMAIRE

B. Russell — *Sur la logique des relations* (suite) . . p. 137
L. Couturat — La logique de Leibniz d'après des documents inedits (Recensione, Vailati) . . . . . » 148
Dizionario di Matematica — Parte I, Logica matem. (Peano) » 160
Additions au Formulaire a. 1901, par A. Arbicone, T. Boggio, E. Cantoni, F. Castellano, G. Peano, G. Vacca . . » 173

TURIN
BOCCA FRÈRES
LIBRAIRES

1901

LIBRI RICEVUTI

L. ANDREONI — *Preliminari ad un corso di elettrotecnica.* Forlì, Bordanini, a. 1901, p. 189.

C. ARZELÀ — *Lezioni di calcolo infinitesimale.* Vol. 1°, parte 1ª. Firenze, Succ. Lemonnier, a. 1901. L. 9.

B. BETTINI e C. CIAMBERLINI — *Elementi di Aritmetica e Geometria.* Firenze, Bemporad, a. 1901, p. 142.

G. INGRAMI — *Nozioni di Planimetria.* Bologna, Cenerelli, a. 1901, p. 68, L. 1,25.

— *Nozioni pratiche di Geometria.* Bologna, Cenerelli, a. 1901, p. 59. L. 1.

F. INVREA — *Elementi di Fisica.* Vol. 2°. Torino, Unione Tip., a. 1901.

G. RIBONI — *Elementi di Geometria.* 3ª edizione. Bologna, Zanichelli, a. 1902 (?), p. IV + 436. L. 3.

G. VERONESE e P. GAZZANIGA — *Elementi di Geometria.* Edizione II. Verona, F.lli Drucker, a. 1901. - Parte I, p. XX+ 112. L. 1,25. Parte II, p. IV+ 212. L. 2,25.

H. VOGT — *Éléments des Mathématiques supérieures.* Paris, Nony, a. 1901, p. 620.

3·6 $u,v\varepsilon$ Cls fin .ɔ. $u\smile v\ \varepsilon$ Cls fin

[$v\ni u$.ɔ. $u\smile v = u$.ɔ. Prop {1}

$u\subset v$.ɔ. $u\smile v = v$.ɔ. Prop {2}

$\exists u-v$. $\exists v-u$. $S\ni S$. uSx . $v-uSy$.ɔ. $u\smile v\ Sx+y$ {3}

{3} . §3 Prop 2.2 .ɔ. Prop {4}

{1} . {2} . {4} .ɔ. Prop]

·61 $u\varepsilon$ Cls infin . $v\varepsilon$Cls .ɔ. $u\cup v\varepsilon$ Cls infin

[$x\ni u$. $u\varepsilon$ Cls infin .ɔ. $u$sim $u-\iota x$.ɔ. $u\cup v$sim$u\cup v-\iota x$.ɔ. Prop]

·62 $u\cup v\varepsilon$Cls fin .ɔ. u, $v\varepsilon$Cls fin

[Prop 3.61 . transp .ɔ. Prop]

§ 5

Les séries condensées

1·1 $R\varepsilon$ Rel . $R\ni 0'$. $R^2 = R$.ɔ. $\Phi_R = \mathrm{Cls}\cap u\ni\{u\ni \varrho\smile\breve{\varrho}$.∴

$x,y\varepsilon u$.$\ni_{x,y}$: $x1'y$.∪. xRy .∪. yRx .∴

$x,y\varepsilon u$. xRy .$\ni_{x,y}$. $\exists u\cap z\ni(xRz$. $zRy)\}$ Df

·11 $\Phi = \mathrm{Cls}\cap u\ni\{\exists\mathrm{rel}\cap R\ni(R\ni 0'$. $R^2 = R$. $u\varepsilon\ \Phi_R\ )\}$ Df

Ces P donnent la définition d'une série condensée. Si R est une relation contenue dans la diversité et égale à son carré, et si u est une classe contenue dans la somme logique du domaine de R avec celui de $\breve{R}$, et si deux u différents ont toujours une des deux relations R,$\breve{R}$, et si entre deux u différents il y a toujours un troisième u, alors u est une Φ_R. La classe Φ est la classe de toutes les séries condensées pour toutes les relations qui engendrent de telles séries.

·2 $R\varepsilon$ Rel . $R\ni 0'$. $R^2 = R$: $x\varepsilon\ \varrho\smile\breve{\varrho}$. $\ni_x$.$\varrho x\smile\breve{\varrho}x = \varrho\smile\breve{\varrho}$: .ɔ.

$\varrho, \breve{\varrho}, \varrho\cup\breve{\varrho}\varepsilon\ \Phi_R$

·3 $R\varepsilon$ Rel . $R\ni 0'$. $R^2 = R$. $u\varepsilon\Phi_R$. $\exists\ u = \breve{\varrho}u$.ɔ. $u = \breve{\varrho}u\ \varepsilon$ Elm

[$x\varepsilon u-\breve{\varrho}u$. $y\varepsilon u-\iota x$: xRy .∪. yRx :ɔ. xRy .ɔ. $y\varepsilon\breve{\varrho}u$]

·4 $R\varepsilon$ Rel . $R\ni 0'$. $R^2 = R$.ɔ. $\Phi_R = \Phi_{\breve{R}}$

·5 $R\varepsilon$Rel . $R\ni 0'$. $R^2 = R$. $S\varepsilon 1+1$. $\sigma\varepsilon\ \Phi_R$.ɔ. $\breve{\sigma}\varepsilon\ \Phi\breve{S}RS$

[$x\varepsilon\sigma$. $y1'\iota\breve{\sigma}x$.ɔ. $y\breve{S}x$ (1)

$x'\varepsilon\ \breve{\varrho}x$. $y'1'\iota\breve{\sigma}\ x'$.ɔ. $x'Sy'$. xRx' .ɔ. $xRSy'$ (2)

(1) . (2) .ɔ. $y\breve{S}\ RSy'$. $y'\varepsilon\ \breve{\sigma}$ (3)

$y\ \breve{S}RS\ y'$. $y'\ \breve{S}RS\ y''$.ɔ. $y\ \breve{S}RS\breve{S}RS\ y''$ (4)

$S\varepsilon\ 1+1$. $R^2 = R$.ɔ. $\breve{S}RS\breve{S}RS\ \ni\ \breve{S}RS$ (5)

(4) . (5) .ɔ. $(\breve{S}RS)^2 \supset \breve{S}RS$ (6)

$y\,\breve{S}RS\,y'' .ɔ. \exists\, \sigma \cap (x',x'') \ni (y\breve{S}x \,.\, xRx'' \,.\, x''Sy'')$ (7)

(7) . $R^2 = R$. $S\varepsilon\, 1\text{-}+1$.ɔ. $\exists\, \sigma \cap (x,x',x'') \ni (y\breve{S}x \,.\, xRx' \,.\, x'S\breve{S}x \,.\, x'Rx'' \,.\, x''Sy'')$ (8)

(8) .ɔ. $\breve{S}RS \supset \breve{(SRS)}^2$ (9)

(6) . (9) .ɔ. $(\breve{S}RS)^2 = \breve{S}RS$ (10)

$R \supset 0'$. $S\varepsilon 1\text{-}+1$.ɔ. $\breve{S}RS \supset 0'$ (11)

(3) . (10) . (11) .ɔ. Prop]

Cette P donne une méthode par laquelle on obtient une nouvelle série condensée par corrélation avec une série condensée donnée. Elle prouve que toute classe semblable à une série condensée est elle-même une série condensée par rapport à une certaine relation. On a le théorème plus général: soit P une relation telle que $P \supset 0' \cdot P^2 \supset P$: la classe des séries du même type d'ordre que π est la classe des domaines des relations P' telles qu'il y a une relation S univoque et réciproque telle que $P' = \breve{S}PS$ $\pi = \sigma$. Ce théorème s'applique aux séries de toute espèce sans aucune exception. J'omets la preuve pour éviter les longueurs.

·6 $R\varepsilon Rel$. $R \supset 0'$. $R^2 = R$. $u \varepsilon \Phi_R$. $P = R_{u \cap \varrho u}$.ɔ. $u \varepsilon \Phi_P$. $u = \pi \cup \breve{\pi}$

Pour la Df de $R_{u \cap \varrho u}$, voir § 2 Prop 3·12.

✱ 2. $P\varepsilon\, Rel$. $P \supset 0'$. $P^2 = P$. $u = \pi \cup \breve{\pi}$. $u \varepsilon\, \Phi_P$.ɔ: :

·1 $v \varepsilon Cls$. $v \supset u$.ɔ. $\pi(\pi v) = \pi v$

[$\pi v = \Lambda$.ɔ. $\pi(\pi v) = \Lambda$.ɔ. $\pi(\pi v) = \pi v$ (1)

$\exists \pi v$.ɔ.·. $x \varepsilon \pi v$.ɔ. $\exists\, v \cap y \ni (xPy)$: (2)

(2) . $P^2 = P$.ɔ. $\exists\, u \cap z \ni (xPz \,.\, zPy)$.ɔ. $x \varepsilon \pi(\pi v)$: (3)

$x \varepsilon \pi(\pi v)$.ɔ. $\exists\, u \cap z \ni \{\exists\, v \cap y \ni (xPz \,.\, zPy)\}$

ɔ. $\exists\, v \cap y \ni (xPy)$.ɔ. $x \ni \pi v$ (4)

(1) . (3) . (4) .ɔ. Prop]

·2 $v \varepsilon Cls$. $v \supset u$.ɔ. $\breve{\pi}(\breve{\pi} v) = \breve{\pi} v$

·3 $pu = Cls \cap v \ni \{v \supset u \,.\, \pi v = v \,.\, \exists v \,.\, \exists u = v\}$ Df

·4 $\breve{p}u = Cls \cap v \ni \{v \supset u \,.\, \breve{\pi} v = v \,.\, \exists v \,.\, \exists u = v\}$ Df

pu correspond à ce que M. Peano appelle la classe des segments [RdM. t.6 p.133, § 8, P·0]. J'appellerai *pu* la classe des segments inférieurs, $\breve{p}u$ celle des segments supérieurs.

·5 $v \varepsilon Cls$. $v \supset u$. $\exists\, v \cap \breve{\pi}$. $\exists\, u = \pi v$.ɔ. $\pi v\ \varepsilon\ pu$

[$\exists v \cap \breve{\pi}$.ɔ. $\exists \pi v$ (1) Prop 2·1 .ɔ. $\pi(\pi v) = \pi v$ (2)

(1) . (2) . $\exists u = \pi v$.ɔ. Prop.]

2·51 $v\varepsilon\mathrm{Cls} \,.\, v\supset u \,.\, \exists v\frown\pi \,.\, \exists u\frown\breve{\pi v} \,.\supset.\, \breve{\pi v}\ \varepsilon\ \breve{p}u$

·6 $v,v'\varepsilon\, pu \,.\supset:\, v\supset v' \,.\smile.\, v'\supset v$

[$v,v'\varepsilon pu \,.\, \exists v'-v \,.\supset.\, \exists v'\frown\breve{v\pi} \,.\supset:\, x\varepsilon v \,.\supset_x.\, \exists v'\frown y\ni(x\mathrm{P}y)$: (1)
(1) . $v'\varepsilon pu \,.\supset:\, x\varepsilon v \,.\supset_x.\, x\varepsilon v' :\supset.\, v\supset v'$ (2)
$\exists v-v' \,.\supset.\, v'\supset v$ (3) (2) . (3) .⊃. Prop]

Pour la définition de $v\breve{\pi}$, voir §1 Prop 1·34.

·61 $v,v'\varepsilon\, \breve{p}u \,.\mathrm{c}:\, v\supset v' \,.\smile.\, v'\supset v$

·7 $u\mathrm{T}v' \,.=.\, v,v'\varepsilon pu \,.\, v\supset v' \,.\, v-=v'$ Df

·71 $\mathrm{T}\varepsilon\,\mathrm{Rel}$

[§1 Prop 3·82 .⊃: $v,v'\varepsilon pu \,.=.\, v\varepsilon pu\breve{\varepsilon}pu v'$ (1) (⊃) εRel (2)
(=) εRel (3)

(1) . (2) . (3) . §1 Prop 1·98 . Prop 2·5 .⊃. $(\varepsilon pu\breve{\varepsilon}pu)\frown(\supset)\frown(-=)$ εRel (4)

(4) .T= $(\varepsilon pu\breve{\varepsilon}pu)\frown(\supset)\frown(-=)$.⊃. Prop]

Les P (2) et (3) de cette preuve sont des Pp, que nous aurions dû introduire au § 1, si nous avions voulu faire une logique complète: (2) affirme que l'inclusion d'une classe dans une classe est une relation, et (3) affirme que l'égalité des classes est une relation.

·72 $\mathrm{T}\supset 0' \,.\, \mathrm{T}^2\supset\mathrm{T}$

·73 $\mathrm{T}^2=\mathrm{T}$

[$v\mathrm{T}v' \,.\supset.\, \exists v'-v \,.\supset.\, \exists \pi v'-v \,.\supset.\, \exists v'\frown(x,y)\ni(x,y-\varepsilon v \,.\, x0'y)$ (1)
(1) . $x\mathrm{P}y \,.\supset.\, v\mathrm{T}\pi x \,.\, \pi x\mathrm{T}v'$ (2) (1) . $y\mathrm{P}x \,.\supset.\, v\mathrm{T}\pi y \,.\, \pi y\mathrm{T}v'$ (3)
(1) . (2) . (3) .⊃. Prop]

·8 $pu\ \varepsilon\ \Phi_{\mathrm{T}}$ [Prop 1·1.2·71·72·73 .⊃. Prop]

On vient de prouver que la classe des segments inférieurs est une série condensée par rapport à T. On prouve de même que la classe des segments supérieurs est une série condensée.

✱ 3. $\mathrm{P}\varepsilon\,\mathrm{Rel} \,.\, \mathrm{P}\supset 0' \,.\, \mathrm{P}^2=\mathrm{P} \,.\, u=\pi\breve{\pi} : x\varepsilon u \,.\supset.\, \pi x\smile\iota x\smile\breve{\pi x}=u \,:\supset::$

·1 $v\varepsilon\, pu \,.\supset.\, \tau v=pu\frown x\ni(x\mathrm{T}v)$ [$\tau v\supset\tau \,.\, \tau\supset pu \,.\supset.$ Prop]

·2 $w\ \varepsilon\ \mathrm{Cls} \,.\, w\supset pu \,.\supset.\, \tau w=pu\frown x\ni\{\exists w\frown y\ni(x\mathrm{T}y)\}$

·21 $w\tau=pu\frown x\ni\{y\varepsilon w \,.\supset_x.\, x\mathrm{T}y\}$

Pour la définition de $w\tau$, voir § 1 Prop 1·36.

·3 $w\ \varepsilon\ \mathrm{Cls} \,.\, w\supset pu \,.\supset.\, \smile'w\supset u$

$w\varepsilon\ \mathrm{Cls} \,.\, w\supset pu \,.\, \exists w \,.\, \exists\, pu-w \,.\, \exists u-\smile'w \,.\supset.\,\cdot$

·4 $\smile'w\ \varepsilon\ pu$

[$x\varepsilon\smile'w \,.=.\, \exists w\frown v\ni(x\varepsilon v \,.\, v\varepsilon pu) \,.=.\, \exists w\frown v\ni\{\exists v\frown y\ni(x\mathrm{P}y)\}$
$.=.\, \exists\smile'w\frown y\ni(x\mathrm{P}y) \,.=.\, x\varepsilon\pi(\smile'w) \,:=.\, \smile'w=\pi(\smile'w)$]

3·5 $\tau w = \tau(\cup^{\epsilon} w)$

[$v \varepsilon \tau w .=. v \varepsilon pu . \exists w \cap z \ni (v \varepsilon \tau z)$ (1) $z \varepsilon w . \supset . \tau z \supset \tau(\cup^{\epsilon} w)$ (2)

(1) . (2) .⊃. $v \varepsilon \tau w .\supset. v \varepsilon pu . v \varepsilon \tau(\cup^{\epsilon} w) :\supset. \tau w \supset \tau(\cup^{\epsilon} w)$ (3)

$v \varepsilon \tau(\cup^{\epsilon} w) .\supset. v \supset \cup^{\epsilon} w . v = \cup^{\epsilon} w .\supset. \exists \cup^{\epsilon} w = v$

$.\supset. \exists w \cap z \ni (v \mathrm{T} z) .\supset. v \varepsilon \tau w :\supset. \tau(\cup^{\epsilon} w) \supset \tau w$ (4)

(3) . (4) .⊃. Prop]

Cette P prouve que, si w est une classe de segments d'une série condensée, la classe des segments contenus dans un terme variable de w est la même que la classe des segments contenus dans la somme logique de la classe des classes w. Quand la classe w n'a pas de maximum, on déduit que la somme logique des w est la limite supérieure des w: la classe w a donc toujours ou bien un maximum ou bien une limite supérieure. (Voir les P 3·6·7·8 qui suivent). La moitié du théorème analogue se démontre pour la limite inférieure et le produit logique dans Prop 3·51.

·51 $\tau(\cap^{\epsilon} w) \supset w\tau$

[$x \varepsilon w .\supset: \cap^{\epsilon} w \supset x$ (1)

(1) . $z \mathrm{T} \cap^{\epsilon} w .\supset: x \varepsilon w .\supset_x . z \mathrm{T} x :\supset. z \varepsilon w\tau .\supset.$ Prop]

On ne peut pas prouver que $\tau(\cap^{\epsilon} w) = w\tau$. Ce théorème ne sera vrai que quand w a un minimum; dans le cas contraire, la limite inférieure des w sera $\cap^{\epsilon} w$, et appartiendra dans certains cas à la classe $w\tau$, mais non pas à la ctasse $\tau(\cap^{\epsilon} w)$.

·6 $\exists pu \cap x \ni (\tau w = \tau x)$ [Prop 3·5 .⊃. Prop]

·7 $\lambda' w = \iota pu \cap x \ni (\tau w = \tau x)$ Df

·8 $v \varepsilon pu .\supset. \exists \mathrm{Cls} \cap w \ni (w \supset pu . v = \lambda' w)$ [$w = \tau v$]

Les P 3·6·8 prouvent que pu est parfaite pour les limites supérieures, mais non pas nécessairement pour les limites inférieures. $\lambda' w$, telle qu'on vient de la définir, n'est pas toujours une limite, puisqu'elle est le maximum s'il y en a un. Les segments qui composent la classe pu se définissent par des classes quelconques comprises dans u. Dans le § prochain nous examinerons les segments et les limites qui s'obtiennent en employant exclusivement ce que M. G. Cantor appelle des séries fondamentales [RdM. V, p. 157].

§ 6.

Les séries fondamentales dans une série condensée.

Les séries fondamentales sont des séries du type ω, dont chacune monte ou descend continuellement dans la série condensée qui la contient. Dans le premier cas (1·1) j'appelle *progression* la série fondamentale; dans le second cas (1·2) je l'appelle *régression*. Quant à la série condensée, elle n'est sujette à aucune condition excepté qu'elle soit condensée: je ne décide pas, par exemple, si elle est dénombrable ou continue ou ni l'un ni l'autre,

✱ 1. $P\varepsilon \mathrm{Rel} . P\supset 0' . P^2 = P : x\varepsilon \pi\cup\breve{\pi} . \supset . \pi x \cup \iota x \cup \breve{\pi} x =$

$\pi\cup\breve{\pi} : u = \pi\cup\breve{\pi} : \supset ::$

·1 $\omega_P = \omega \cap v\ni\{v\supset u : R\varepsilon \mathrm{Rel}_v . x,y\varepsilon v . xRy . \supset_{x,y} . xPy\}$ Df

·2 $\omega_{\breve{P}} = \omega \cap v\ni\{v\supset u : R\varepsilon \mathrm{Rel}_u . x,y\varepsilon v . xRy . \supset_{x,y} . yPx\}$ Df

Si v est une progression, Rel_v est la classe des relations génératrices de cette progression (§ 3 Prop 1·12). Dans le cas actuel, on ne doit apmettre comme relation génératrice qu'une relation qui satisfait à la condition donnée. Une telle relation, si elle existe, est unique. Il ne faut pas confondre ω_P et ω_π. Voir § 3 Prop 1·11.

·3 $\pi\omega = x\ni\{\exists\, \omega_P \cap v\ni(x = \pi v)\}$ Df

·31 $\omega\breve{\pi} = x\ni\{\exists\, \omega_P \cap v\ni(x = \breve{v}\pi)\}$ Df

·4 $\breve{\pi}\omega = x\ni\{\exists\, \omega_{\breve{P}} \cap v\ni(x = \breve{\pi} v)\}$ Df

·41 $\omega\pi = x\ni\{\exists\, \omega_{\breve{P}} \cap v\ni(x = v\pi)\}$ Df

Il ne faut pas confondre $\pi\omega$ avec pu [§ 5 Prop 2·3] : pu est la classe de tous les segments inférieurs de u, $\pi\omega$ est la classe des segments inférieurs qui définissent des progressions. Ces deux classes sont identiques dans bien des cas, mais je ne connais aucune preuve qu'elles le soient toujours.

·5 $v\varepsilon \omega_P . \supset . v\supset\pi v$ [$x\varepsilon v . \supset . x\, P\, \mathrm{seq} x . \supset . x\varepsilon \pi v$]

·51 $v\varepsilon \omega_{\breve{P}} . \supset . v\supset \breve{\pi} v$

·6 $v\varepsilon \omega_P . \supset . \breve{v}\pi = u - \pi v$

[$x\varepsilon \breve{v}\pi . \supset . x\varepsilon u - \pi v$ (1)

$x\varepsilon u - \pi v . \supset . -\exists v \cap y\ni(xPy) . \supset .\cdot . y\varepsilon v . \supset_y : y1'x . \cup . yPx$ (2)

$y1'x . \supset . x\mathrm{Pseq} y . \supset . x\varepsilon \pi v$ (3)

(2) . (3) $.\supset.\cdot. x\varepsilon u - \pi v . \supset : y\varepsilon v . \supset_y . yPx : \supset . x\varepsilon \breve{v}\pi$ (4)

(1) . (4) $.\supset.$ Prop]

·61 $v\varepsilon \omega_{\breve{P}} . \supset . v\pi = u - \breve{\pi} v$

·7 $\pi\omega \supset pu$ ·71 $\breve{\pi}\omega \supset \breve{p}u$

·8 $v,v'\varepsilon \omega_P . \supset : \pi v \supset \pi v' . \cup . \pi v' \supset \pi v$ [§5 Prop 2·6 $.\supset.$ Prop]

·81 $v,v'\varepsilon \omega_{\breve{P}} . \supset : \breve{\pi} v \supset \breve{\pi} v' . \cup . \breve{\pi} v' \supset \breve{\pi} v$ [§5 Prop 2·61 $.\supset.$ Prop]

✱ 2. $P\varepsilon \mathrm{Rel} . P\supset 0' . P^2 = P : x\varepsilon \pi\cup\breve{\pi} . \supset_x . \pi x \cup \iota x \cup \breve{\pi} x =$

$\pi\cup\breve{\pi} : u = \pi\cup\breve{\pi} . v,v'\varepsilon\omega_P : \supset ::$

·1 $x\varepsilon v . \supset_x . \exists v' \cap y\ni(xPy . y\mathrm{Pseq} x) : \supset . -\exists\, v' \cap \breve{v}\pi$

[Hp : $k\varepsilon\omega . \supset_k . \exists k : \supset . \exists v' \cap y\ni\{\exists v \cap x\ni(xPy . y\, P\, \mathrm{seq} x)\}$

$R\varepsilon \mathrm{Rel}_v . R'\varepsilon \mathrm{Rel}_{v'} .$ §3 Prop 2·11 $. x\varepsilon v . y\varepsilon v' . xPy . y\mathrm{Pseq} x . \supset . \breve{\varrho}^x v, \breve{\varrho}^y v' \varepsilon \omega_P$ (1)

$\mathrm{Hp}\,(1) \,.\, y' \varepsilon v' \,.\, x' \varepsilon \breve{\varrho}^{x}\, v \,.\, x' \mathrm{P} y' \,.\, y' \,\mathrm{P}\, \mathrm{seq} x' \,.\supset.\, y' \varepsilon \breve{\varrho}^{y}\, v'$ (2)

$\exists\, \breve{\varrho}^{y}\, v' \cap y'' \ni (\mathrm{seq} x' \,\mathrm{P}\, y'' \,.\, y'' \,\mathrm{P}\, \mathrm{seq}\, \mathrm{seq} x') \,.\supset:\, \mathrm{seq} y' \,1'\, y'' \,.\cup.\, \mathrm{seq} y' \,\mathrm{P}\, y'' :$
$\supset.\, \mathrm{seq} y' \,\mathrm{P}\, \mathrm{seq}\, \mathrm{seq} x'$ (3)

$(2) \,.\, (3) \,.\supset\therefore\, z \varepsilon v' \,.\supset_z :\, z \varepsilon \pi v \,.\supset.\, \mathrm{seq} z \,\varepsilon\, \pi v$ (4) $\mathrm{Hp} \,.\supset.\, 0_{v'} \varepsilon\, \pi v$ (5)

$(4) \,.\, (5) \,.\, \mathrm{Induct} \,.\supset.\, v' \ni \pi v \,.\supset.\, \mathrm{Prop}$]

Puisque cette démonstration est un peu compliquée, je la répéterai en mots. La P affirme que si deux progressions v, v' sont tels qu'entre deux termes consécutifs quelconques de v il se trouve toujours au moins un terme de v', alors il n'y a aucun terme de v' qui succède à tout terme de v. Soit x un terme de v, et y un terme de v' entre x et seq x. Alors les termes de v qui ne précèdent pas x forment une progression $\breve{\varrho}^{x}\, v$, et les termes de v' qui ne précèdent pas y forment une progression $\breve{\varrho}^{y}\, v'$. Si alors x' est un terme quelconque de $\breve{\varrho}^{x}\, v$, y' un terme de v' entre x' et seq x', on deduit que y' est un terme de $\breve{\varrho}^{y}\, v$. Or il y a un terme y'' de $\breve{\varrho}^{y}\, v'$ qui vient entre seq x' et seq seq x', et un tel terme doit ou bien être seq y' ou bien succéder à seq y'; donc seq y doit précéder seq seq x'. Il s'ensuit que, si z est un v' qui précède quelque v, alors seq z est aussi un v' qui précède quelque v. Mais par hypothèse il y a des v' qui précèdent des v; donc le premier terme de v' doit précéder des v. On déduit par induction que tout terme de v' précède des termes de v, c'est-à-dire qu'aucun terme de v' ne succède à tout terme de v.

2·2 $\mathrm{Hp\ Prop\ 2{\cdot}1} \,.\supset.\, \pi v = \pi v'$

[$x \varepsilon \pi v' \,.\supset.\, \exists v' \cap y \ni (x \mathrm{P} y)$ (1)

$(1) \,.\, v' \ni \pi v \,.\supset:\, x \varepsilon \pi v' \,.\supset_x .\, x \varepsilon \pi v :\supset.\, \pi v' \ni \pi v$ (2)

$x \varepsilon \pi v \,.\supset.\, \exists v \cap y \ni (x \mathrm{P} y) \,.\supset.\, \exists v' \cap z \ni (x \mathrm{P} z) \,.\supset.\, x \varepsilon \pi v' :\supset.\, \pi v \ni \pi v'$ (3)

$(2) \,.\, (3) \,.\supset.\, \mathrm{Prop}$]

$\cdot 3 \quad w \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, w \ni u \,.\, \exists v \cap z \ni (w \ni \breve{\pi} z) : x \varepsilon v \,.\supset_x .\, \exists w \cap y \ni (x \mathrm{P} y \,.\, y \mathrm{P} \mathrm{seq} x).$

$w \cap y \ni (x \mathrm{P} y \,.\, y \mathrm{P} \mathrm{seq} x) \,\varepsilon\, \mathrm{Elm} : \breve{v\pi} \ni \breve{w\pi} \,.\supset\therefore.\, w \,\varepsilon\, w_{\mathrm{P}}$

Cette P affirme que si v est une progression dans une série condensée u, et si w est une classe contenue dans u et succédant à un certain terme de v, et s'il y a un terme de w, et un seul, entre deux termes consécutifs quelconques de v, et si finalement les termes qui succèdent a tout terme de v succèdent aussi à tout terme de w, alors w est une progression dans u.

[$\mathrm{Hp} \,.\, \S 1 \mathrm{Prop} 1{\cdot}8 \,.\supset:\, x \varepsilon v \,.\supset_x .\, \exists 1{+}1 \cap \mathrm{R}_x \ni \{ \iota x = \varrho_x \,.\, w \cap y \ni (x \mathrm{P} y \,.\, y \mathrm{P} \mathrm{seq} x) = \breve{\varrho} x \}$

$x \varepsilon v \,.\supset_x .\, \mathrm{R}_x = \{ 1{+}1 \cap \mathrm{R}_x \ni \{ \iota x = \varrho_x \,.\, w \cap y \ni (x \mathrm{P} y \,.\, y \mathrm{P} \mathrm{seq} x) = \breve{\varrho} x \} :$

$\mathrm{R} w \varepsilon \mathrm{Rel} \cap \mathrm{R}' \ni \{ a \mathrm{R}' b \,.=.\, \exists v \cap x \ni (a \mathrm{R}_x b) \} \,.\, \S 3 \mathrm{Prop} 2{\cdot}16 :\supset.\, \mathrm{R} w \,\varepsilon\, 1{+}1$ (1)

$\mathrm{R} \varepsilon \mathrm{Rel}_v : x \varepsilon v \,.\supset_x .\, w_x = \iota w \cap y \ni (x \mathrm{P} y \,.\, y \mathrm{P} \mathrm{seq} x) : \mathrm{seq} w_x = \breve{w}_{\mathrm{seq} x} :\supset.\, x \mathrm{R}_w w_x \,.\supset.$

$w_x \breve{\mathrm{R}}_w \mathrm{R}\, \mathrm{seq} x \,.\, \mathrm{seq} x \,\mathrm{R}_w \mathrm{seq} w_x :\supset.\, w_x \breve{\mathrm{R}}_w \mathrm{R}\, \mathrm{R}_w \,\mathrm{seq} w_x$ (2)

$w_x \text{ P seq} x \,.\, \text{seq} x \text{ P seq} w_x \,.\supset.\, w_x \text{ P seq} w_x$ (3)

$x \varepsilon v - \iota 0_v \,.\supset.\, w_0 \underset{v}{\text{P}} x \,.\supset.\, -(w \supset \breve{\pi} x)$ (4)

(4) . Hp $.\supset.\, w \supset \breve{\pi} 0_v$ (5)

$\breve{v\pi} \supset \breve{w\pi} \,.\supset:\, y \varepsilon w \,.\supset_y.\, \exists v \cap x' \ni (y \text{ P seq} x')$ (6)

Hp (6) . §3Prop. 2·11 $.\supset.\, v \cap x' \ni (y \text{ P seq} x') \,\varepsilon\, \omega_{\text{P}}$

$y \varepsilon w \,.\, v \cap x' \ni (y \text{ P seq} x') = v' \,.\, x = 0_{v'} \,.\supset.\, y = w_x$ (7)

§1 Prop5·7 . (1) . $\text{R}' = \breve{\text{R}}_w \text{R} \text{R}_w \,.\supset.\, \text{R}' \varepsilon 1 \dashv 1 \,.\, w_0 \underset{v}{=} \breve{nw} - \varrho' w$ (8)

$s \varepsilon \text{Cls} \,.\, w_0 \underset{v}{\varepsilon} s : x \varepsilon v \,.\, w_x \,\varepsilon s \,.\supset_x.\, \text{seq} w_x \,\varepsilon s :\supset:\, x(\text{R}_w \varepsilon) s w \,.\supset_x.\, \text{seq} x(\text{R}_w \varepsilon) s w$ (9)

(9) . Hp(9) . Induct $.\supset:\, x \varepsilon v \,.\supset_x.\, x(\text{R}_w \varepsilon)\, s w$ (10)

Hp (9) . (10) . $\text{R}_w \varepsilon 1 \dashv \,.\supset:\, w_x \,\varepsilon w \,.\supset_{\underset{x}{w}}.\, w_x \,\varepsilon s$ (11)

(7) . (8) . (11) $.\supset.$ Prop]

·4 $\exists \omega_{\text{P}} \cap w \ni (vw = \bigwedge \,.\, \pi v = \pi w)$ [Prop2·3 $.\supset.$ Prop]

·5 $\exists v \breve{\pi} \cap z \ni (\pi z = \pi v) \,.\supset.\, v \breve{\pi} \cap z \ni (\pi z = \pi v) \,\varepsilon \text{Elm}$

[$\pi z = \pi v \,.\, z \text{P} z' \,.\supset.\, \pi z' - = \pi v$ (1)

$\pi z = \pi v \,.\, z' \text{P} z \,.\supset.\, \pi z' - = \pi v$ (2) (1) . (2) $.\supset.$ Prop]

·6 $\exists v \breve{\pi} \cap z \ni (\pi z = \pi v) \,.\supset.\, \text{l}' v = v \breve{\pi} \cap z \ni (\pi z = \pi v)$ Df

·61 $\iota v \varepsilon \omega_{\breve{\text{P}}} \,.\, \exists w \breve{\pi} \cap z \ni (\pi z = \breve{\pi} v) \,.\supset.\, \text{l}_{\iota} w = w \breve{\pi} \cap z \ni (\pi z = \breve{\pi} w)$ Df

l'v et $\text{l}_{\iota} w$, telles qu'on vient de les définir, sont de vraies limites, tandis bue $\lambda' v$ et $\lambda_{\iota}\, v$ du § précédent étaient ou bien des limites ou bien des maxima ou des minima. Puisque l'v appartient à la classe $v\pi$, l'v ne peut pas appartenir à la classe v. qui du reste n'a pas de maximum, par définition. De même $\text{l}_{\iota}\, w$ n'appartient pas à la classe w, qui n'a pas de minimum. Si une ω_{P} ou une $\omega_{\breve{\text{P}}}$ possède une limite, elle ne peut en avoir qu'une seule; mais elle peut n'en avoir point. Dans les classes dérivées, $\pi\omega, \omega\breve{\pi}, \omega\pi, \breve{\pi}\omega$ au contraire, on peut démontrer l'existence des limites, comme nous allons voir.

✱ 3 $\text{P} \varepsilon \text{Rel} \,.\, \text{P} \supset 0' \,.\, \text{P}^2 = \text{P} \,.\, u = \pi \breve{\pi} : x \varepsilon u \,.\supset_x.\, \pi x \cup \iota x \breve{\pi} x = u :\supset::$

·1 $a, b \varepsilon u \,.\, a \text{P} b \,.\supset.\, \exists \omega_{\text{P}} \cap v \ni (\breve{\pi} v \supset \breve{\pi} a \,.\, \pi v \supset \pi b)$

Cette P affirme qu'on peut trouver une progression dont tous les termes sont contenus entre deux termes donnés de la série condensée u.

[$x \varepsilon u \,.\, x \text{P} b \,.\, \text{P}^2 = \text{P} \,.\supset.\, \exists u \cap y \ni (x \text{P} y \,.\, y \text{P} b)$ (1)

§ 1 Prop 1·8 $\text{R} \varepsilon 1 \dashv 1 \,.\, \breve{\varrho} \supset \varrho \,.\, \exists \breve{\varrho} - \varrho \,.\, v' \varepsilon w_{\varrho} \,.\supset.\, \exists\, 1 \dashv 1 \cap \underset{v'}{\text{R}_0} \ni (\underset{v'}{\varrho_0} = \iota 0_{v'} \,.$

$a \text{P} \underset{v'}{\iota \varrho_0} \,.\, \underset{v'}{\iota \breve{\varrho}_0} \text{P} b)$ (2)

§1 Prop1·8 . (1) . Hp(2) . $x \varepsilon v' \,.\supset:\, \exists 1 \dashv 1 \cap \text{R}_x \ni (\varrho_x = \iota x \,.\, a \text{P} \iota \breve{\varrho}_x \,.\, \iota \breve{\varrho}_x \text{P} b) \,.\supset.$

$\exists 1 \dashv 1 \cap R_{seq x} \ni (\varrho_{seq x} = \iota seq x \,.\, \breve{\iota}\varrho_x P \breve{\iota}\varrho_{seq x} \,.\, \breve{\iota}\varrho_{seq x} P b)$ (3)

(2).(3). Induct .⊃: $x \varepsilon v' . \supset_x . \exists 1 \dashv 1 \cap R_x \ni (\varrho_x = \iota x \,.\, a P \breve{\iota}\varrho_x \,.\, \breve{\iota}\varrho_x P \breve{\iota}\varrho_{seq x} \,.\, \breve{\iota}\varrho_{seq x} P b)$ (4)

$x \varepsilon v' . \supset_x . S_x \varepsilon 1 \dashv 1 \cap R_x \ni (\varrho_x = \iota x \,.\, a P \breve{\iota}\varrho_x \,.\, \breve{\iota}\varrho_x P \breve{\iota}\varrho_{seq x} \,.\, \breve{\iota}\varrho_{seq x} P b)$:

$S = Rel \cap R'' \ni | \exists v' \cap x \ni (R'' = S_x) | \,.\, R' = \cup' S \,.\therefore\supset.$

$R' \varepsilon 1 \dashv 1 \,.\, \varrho' = v' \,.\, \breve{\varrho}' sim\, v' \,.\, \breve{\pi\varrho}' \supset \breve{\pi a} \,.\, \pi\breve{\varrho}' \supset \pi b$ (5)

(5) . § 3 Prop 1·91 .⊃. $\varrho' \varepsilon \omega_P$ (6) (5) . (6) .⊃. Prop]

Dans la preuve qu'on vient de donner, on prend d'abord une progression quelconque v' dont la relation génératrice est R. On prend un terme quelconque entre a et b, et on établit une relation $R_{v'}$, qui subsiste uniquement entre le premier terme de v' et le terme qu'on a pris entre a et b. Alors on prouve par induction que pour tout terme x de v', on peut trouver une relation R_x qui subsiste seulement entre x et un seul terme entre a et b, qui précède le seul terme auquel seq x a la relation R seq x. Alors on prend la somme logique R' des relations R_x pour toutes les valeurs de x pour lesquelles x est un v, et on démontre que le domaine de $\breve{R}'$ est une progression dans u, dont tous les termes se trouvent entre a et b. Le processus qu'on a employé peut se décrire comme « compter sans nombres ».

3·11 $a, b \varepsilon u \,.\, a P b \,.\supset.\, \exists \omega \breve{P} \cap v \ni (\breve{\pi v} \supset \breve{\pi a} \,.\, \pi v \supset \pi b)$

[§ 5 Prop 1·4 . § 6 Prop 3·1 .⊃. Prop]

·2 $\pi\omega \,\varepsilon\, \Phi$

[$v, v' \varepsilon \omega_P \,.\, \pi v T \pi v' \,.\, a, b \varepsilon v' - \pi v \,.\, a P b$. Prop 3·1 .⊃.

$\exists \omega_P \cap v'' \ni (\breve{\pi v''} \supset \breve{\pi a} \,.\, \pi v'' \supset \pi b) \,.\supset.\, \exists \omega_P \cap v'' \ni (\pi v T \pi v'' \,.\, \pi v'' T \pi v') \,.\supset.$ Prop]

Pour la Df de T, voir § 5 Prop 2·7

·21 $\breve{\pi\omega} \,\varepsilon\, \Phi$

·3 $\omega\breve{\pi} \,\varepsilon\, \Phi$

[Prop 1·6 .⊃: $x, x' \varepsilon \omega\breve{\pi} .=. u - x, u - x' \varepsilon \pi\omega$ (1) (1). Prop 3·2 .⊃. Prop]

·31 $\omega\pi \,\varepsilon\, \Phi$

·4 $\exists \breve{\pi = \pi} \,.\supset.\, \cap' \pi\omega = \breve{\pi = \pi} \,.\, \cap' \pi\omega \,\varepsilon\, Elm$

[$x \varepsilon \breve{\pi - \pi} \,.\supset: v \varepsilon \omega_P \,.\supset_v.\, x \varepsilon \pi v :\supset.\, x \varepsilon \cap' \pi\omega$ (1)

Prop 3·1·2 . $x \varepsilon \breve{\pi} \,.\supset.\, \exists \omega_P \cap v \ni (x \varepsilon \breve{v\pi}) \,.\supset.\, x - \varepsilon \cap' \pi\omega$ (2)

(1) . (2) . § 5 Prop 1·3 .⊃. Prop]

·41 $\exists \breve{\pi = \pi} \,.\supset.\, \cap' \breve{\pi\omega} = \breve{\pi = \pi} \,.\, \cap' \breve{\pi\omega} \,\varepsilon\, Elm$

·5 $\exists \pi = \breve{\pi} \,.\supset.\, \cap' \omega\pi = \pi = \breve{\pi} \,.\, \cap' \omega\pi \,\varepsilon\, Elm$

[$x \varepsilon \pi - \breve{\pi} \,.\supset: v \varepsilon \omega \breve{P} \,.\supset_v.\, x \varepsilon v\pi :\supset.\, x \varepsilon \cap' \omega\pi$ (1)

$x \varepsilon \breve{\pi}$. Prop 3·11·31 .⊃. $\exists \omega \breve{P} \cap v \ni (x \varepsilon \pi v) \,.\supset.\, x - \varepsilon \cap' \omega\pi$ (2) (1) . (2) .⊃. Prop]

·51 $\exists \breve{\pi = \pi} \,.\supset.\, \cap' \omega\breve{\pi} = \breve{\pi = \pi} \,.\, \cap' \omega\breve{\pi} \,\varepsilon\, Elm$

$\cdot 6 \quad \pi\breve{\supset}\pi \;.\supset.\; \cap'\pi\omega = \Lambda$ Dem 3·4 N° (2) .ɔ. Prop]

$.61 \quad \breve{\pi}\supset\pi \;.\supset.\; \cap'\breve{\pi}\omega = \Lambda$

$\cdot 7 \quad \pi\breve{\supset}\pi \;.\supset.\; \cap'\omega\pi = \Lambda$

$\cdot 71 \quad \breve{\pi}\supset\pi \;.\supset.\; \cap'\omega\pi = \Lambda$

✱ 4 $\mathrm{P}\varepsilon\mathrm{Rel} \,.\, \mathrm{P}\supset 0' \,.\, \mathrm{P}^2 = \mathrm{P} \,.\, u = \pi\breve{\pi} : x\varepsilon u \;.\supset_x.\; \exists x\cap\breve{\pi}x = u \;.\supset::$

$\cdot 1 \quad x\mathrm{T}_1 y \;.=.\; x,y\varepsilon\pi\omega \,.\, x\supset y \,.\, x = y$ Df

$\cdot 11 \quad x\mathrm{T}_2 y \;.=.\; x,y\varepsilon\breve{\pi}\omega \,.\, x\supset y \,.\, x = y$ Df

$\cdot 12 \quad x\mathrm{T}_3 y \;.=.\; x,y\varepsilon\omega\pi \,.\, x\supset y \,.\, x = y$ Df

$\cdot 13 \quad x\mathrm{T}_4 y \;.=.\; x,y\varepsilon\breve{\omega\pi} \,.\, x\supset y \,.\, x = y$ Df

$\cdot 2 \quad x\varepsilon\pi\omega \;.\supset.\; \exists\, \omega\mathrm{T}_1 \cap z\ni(\mathrm{l}'z = x)$

[Prop 3·1 .ɔ: $y_1,y_2\varepsilon u \,.\, y_1\mathrm{P}y_2 \;.\supset_{y_1,y_2}.\; \exists\pi\omega \cap m\ni(\pi y_1\mathrm{T}_1 m \,.\, m\mathrm{T}_1\pi y_2)$ (1)

(1) . Prop 2·1·3 . $v\varepsilon\omega\mathrm{P} \,.\, x = \pi v : z\varepsilon v \;.\supset_z.\; w_x\,\varepsilon\pi\omega \,.\, \pi z\mathrm{T}_1 w_x \,.\, w_x\,\mathrm{T}_1\pi(\mathrm{seq}\,z):$
$w = y\ni\{\exists v\cap z\ni(y\mathrm{l}'w_x)\} \;.\therefore.\supset.\; w\varepsilon\omega\mathrm{T}_1 \,.\mathrm{l}'w = x$]

Cette P preuve que tout terme de $\pi\omega$ (c'est-à dire, tout segment inférieur de u) est la limite supérieure d'une progression de termes de $\pi\omega$. Si v est une progression dans u, x un terme variable de v, πv est la limite des segments πx ; mais ce fait ne suffit pas à la démonstration de 4·2, puisqu'on n'a aucune raison de croire que πx appartient toujours à la classe $\pi\omega$, c'est-à-dire que, si x est un u, x est la limite supérieure d'une progression dans u.

$.21 \quad x\varepsilon\,\omega\pi \;.\supset.\; \exists\, \omega\breve{\mathrm{T}}_1 \cap z\ni(\mathrm{l}_{\prime}z = x)$

Cette P se déduit de Prop 3·11 comme 4·2 se déduit de 3·1.

$\cdot 22 \quad x\varepsilon\,\pi\omega \;.\supset.\; \exists\, \omega\mathrm{T}_2 \cap z\ni(\mathrm{l}'z = x)$

$\cdot 23 \quad x\varepsilon\,\omega\pi \;.\supset.\; \exists\, \omega\breve{\mathrm{T}}_2 \cap z\ni(\mathrm{l}_{\prime}z = x)$

$\cdot 24 \quad x\varepsilon\,\breve{\pi}\omega \;.\supset.\; \exists\, \omega\mathrm{T}_3 \cap z\ni(\mathrm{l}'z = x)$

$\cdot 25 \quad x\varepsilon\,\breve{\omega\pi} \;.\supset.\; \exists\omega\breve{\mathrm{T}}_3 \cap z\ni(\mathrm{l}_{\prime}z = x)$

$\cdot 26 \quad x\varepsilon\,\breve{\pi}\omega \;.\supset.\; \exists\omega\mathrm{T}_4 \cap z\ni(\mathrm{l}'z = x)$

$\cdot 27 \quad x\varepsilon\,\breve{\omega\pi} \;.\supset.\; \exists\omega\breve{\mathrm{T}}_4 \cap z\ni(\mathrm{l}_{\prime}z = x)$

La démonstration des Prop ·22 — ·27 est semblable à celle de Prop ·2. Il y a huit autres propositions de la même forme que nous ne savons pas démontrer, et qui paraissent ne pas être toujours vraies. Telle est la proposition

$$x\varepsilon\,\pi\omega \;.\supset.\; \exists\omega\breve{\mathrm{T}}_1 \cap z\ni(\mathrm{l}_{\prime}z = x)$$

$\cdot 3 \quad z\varepsilon\omega\mathrm{T}_1 \;.\supset.\; \mathrm{l}'z\;\varepsilon\;\pi\omega$

[$x\varepsilon z \;.\supset.\; x\mathrm{Tseq}x \;.\supset.\; \exists u\cap y\ni(x\mathrm{T}\pi y \,.\, \pi y\mathrm{Tseq}x)$ (1)

Prop 2·3 : $x\varepsilon z \;.\supset_x\; v_x\,\varepsilon u\cap y\ni(x\mathrm{T}\pi y \,.\, \pi y\mathrm{Tseq}x) : v = w\ni\{\exists z\cap x\ni(w\mathrm{l}'v_x)\} \;.\therefore.\supset.$
$v\varepsilon\omega\,\mathrm{P} \,.\, \mathrm{l}'z = \pi v \;.\supset.$ Prop]

$.31 \quad z\varepsilon\,\omega\breve{\mathrm{T}}_1 \;.\supset.\; \mathrm{l}_{\prime}z\varepsilon\,\omega\pi$

$\cdot 32 \quad z\varepsilon\,\omega\mathrm{T}_2 \;.\supset.\; \mathrm{l}'z\varepsilon\,\pi\omega$

·33 $z\varepsilon\ \omega\breve{T}_2\ .\supset.\ l'z\varepsilon\ \omega\pi$

·34 $z\varepsilon\ \omega T_2\ .\supset.\ l'z\varepsilon\ \breve{\pi}\omega$

·35 $z\varepsilon\ \omega\breve{T}_2\ .\supset.\ l'z\varepsilon\ \breve{\omega}\pi$

·36 $z\varepsilon\ \omega T_4\ .\supset.\ l'z\varepsilon\ \breve{\pi}\omega$

·37 $z\varepsilon\ \omega\breve{T}_4\ .\supset.\ l'z\varepsilon\ \breve{\omega}\pi$

Ici aussi il y a huit autres propositions de forme semblable qui ne paraissent pas être toujours vraies. Telle est la proposition.

$$z\varepsilon\ \omega\breve{T}_1\ .\supset.\ l'z\varepsilon\ \pi\omega$$

Note au § 6. — On peut maintenant résumer les principaux résultats du § 6.

Une série condensée (une Φ) est une série qui a un terme entre deux quelconques de ses termes. Une telle série se définit par une relation transitive P, qui implique la diversité, et qui est telle que $P^2 = P$. Si xPy, on peut dire que x précède y. S'il y a des termes en dehors de la série considérée qui ont la relation P ou $\breve{P}$ avec d'autres termes, on peut toujours trouver une autre relation, équivalente à P dans la série considérée, et telle que tous les termes qui subissent cette relation ou sa converse appartiennent à la série considérée (§ 5 Prop 1·6). Par conséquent il est plus simple, et non moins général, de prendre comme type de série condensée le domaine complet d'une relation convenable et de sa converse.

Soit u une telle série, P sa relation génératrice. Une progression dans u est une série du type ω, contenue dans u, et telle qu'on a toujours x P seq x, si x est un terme de la progression. Nous appelons ωP la classe des progressions dans u. De même, $\omega\breve{P}$ est la classe des régressions, c'est-à-dire des séries de type ω, pour lesquelles $x\breve{P}$ seq x. On peut construire une ωP et une $\omega\breve{P}$, dont tout terme se trouve entre deux termes donnés quelconques de u.

Toute classe v contenue dans u définit quatre classes dans u:

(1) πv, qui contient tous les termes tels qu-il y a un v qui succède à eux;

(2) $\breve{\pi} v$, qui contient tous les termes tels qu'il y a un v qui les précède;

(3) $v\pi$, qui contient tous les termes qui précèdent tout terme de v;

(4) $v\breve{\pi}$, qui contient tous les termes qui succèdent à tout terme de v.

Si v est une progression, (1) et (4) sont seules importantes; pour une régression, (2) et (3) sont seules importantes. Si v est une progression, tout terme de u appartient à (1) ou (4), et (1) n'a pas de dernier terme; mais on ne peut savoir (dans le cas général) si (4) a un premier terme ou non. On a des remarques semblables si v est une régression.

On avance maintenant à la théorie des segments, qui constitue une généralisation de la théorie des nombres réels. On a quatre classes de segments:

(1) La classe $\pi\omega$, qui est formée de toutes les classes πv, où v est une ωP quelconque:

(2) la classe $\breve{\pi}\omega$, qui est formée de toutes les classes $\breve{\pi} v$, où v est une $\omega\breve{P}$ quelconque;

(3) La classe $\omega\pi$, qui est formée de toutes les classes $v\pi$, où v est une $\omega\breve{P}$ quelconque ;

(4) La classe $\omega\breve{\pi}$, qui est formée de toutes les classes $\breve{v\pi}$, où v est une ωP quelconque.

Chacune de ces quatre classe est une Φ, donc la relation génératrice se dérive de l'inclusion logique. Tout terme de $\omega\breve{\pi}$ est le produit de u et de la négation du terme correspondant de $\pi\omega$; et de même pour $\breve{\pi\omega}$ et $\omega\pi$. Les classes $\pi\omega$ et $\omega\pi$ peuvent avoir des termes communs ; par exemple, si u est la classe des nombres rationels, et v est une progression dans u qui n'a pas de limite rationelle, v' une régression qui détermine la même section (dans le sens de Dedekind). Si u est une série qui satisfait au postulat de continuité de Dedekind, $\pi\omega$ est $\omega\pi$ n'ont pas de termes communs ; car alors il y aura un dernier terme dans toute classe qui appartient à la classe $\omega\pi$, et dans aucune classe de $\pi\omega$.

Dans chacune des quatre classes $\pi\omega$, $\breve{\pi\omega}$, $\omega\pi$, $\omega\breve{\pi}$, on peut construire une progression ou une régression, qui aura toujours une limite appartenant à une des quatre classes, mais pas toujours à la classe qui contient la dite progression ou regression. De plus, tout terme de chacune des quatre classes est la limite de certaines progressions, ou bien de certaines régressions, mais non pas nécessairement (à ce qu'il paraît) de toutes les deux ; et les termes des dites progressions ou régressions n'ont pas besoin d'appartenir à la même classe que le terme qui est leur limite. Ces résultats sont en définitif les suivants:

Tout terme de $\pi\omega$ est la lim. d'une pr. dans $\pi\omega$ et d'une pr. dans $\omega\pi$

» $\breve{\pi\omega}$ » » $\breve{\pi\omega}$ » $\omega\breve{\pi}$

» $\omega\pi$ » régr. » $\pi\omega$ » $\omega\pi$

» $\omega\breve{\pi}$ » » » $\breve{\pi\omega}$ » $\omega\breve{\pi}$

Toute progression dans $\pi\omega$ ou dans $\omega\pi$ a une limite dans $\pi\omega$

» » » $\breve{\pi\omega}$ » $\omega\breve{\pi}$ » » $\breve{\pi\omega}$

» régression » $\pi\omega$ » $\omega\pi$ » » $\omega\pi$

» » » $\breve{\pi\omega}$ » $\omega\breve{\pi}$ » » $\omega\breve{\pi}$

Donc :

$\pi\omega$ est identique à la classe des limites de progr. dans $\pi\omega$ ou $\omega\pi$

$\breve{\pi\omega}$ » » » » » » $\breve{\pi\omega}$ » $\omega\breve{\pi}$

$\omega\pi$ » » » » régressions » $\pi\omega$ » $\omega\pi$

$\omega\breve{\pi}$ » » » » » » $\breve{\pi\omega}$ » $\omega\breve{\pi}$

Nous n'avons pas réussi à prouver qu'aucune des quatre classes est une série complètement parfaite ; mais chacune d'elles est parfaite ou bien à

droite ou bien à gauche, c'est-à-dire ou bien pour les régressions, ou bien pour les progressions. La somme logique de $\pi\omega$ et $\omega\pi$, ou de $\breve{\pi\omega}$ et $\breve{\omega\pi}$, est une série parfaite; mais cette série ne sera en général pas condensée. Car s'il existe dans u une progression v et une régression v' ayant la même limite dans u (ce qu'on sait être possible), alors πv et $v'\pi$ seront consécutifs dans la série $\pi\omega \cup \omega\pi$, car $v'\pi$ ne contiendra qu'un seul terme qui n'appartient pas à πv, savoir la limite commune. Donc $\pi\omega \cup \omega\pi$ n'est pas en général une série continue.

Nous n'avons pas réussi à prouver qu'aucune progression ou régression dans u ait une limite, quoique nous ne connaissions pas d'exemple d'une série condensée dont aucun terme n'est un élément principale (dans le langage de M. G. Cantor). Nous ne savons non plus prouver qu'il y a des termes de $\pi\omega$ qui sont des limites de régression, etc.

On sait d'après M. G. Cantor comment prouver tous ces théoremes si u est une série dénombrable [RdM. V, pp. 129-162]. Nous ne développons pas ce sujet, puisqu'il n'a été traité à fond par M. Cantor. Dans le § 6 nous avons seulement voulu déduire les résultats qui sont valables pour toute série condensée, sans introduire d'autres conditions.

BERTRAND RUSSELL.

Recensione.

L. COUTURAT — *La logique de Leibniz d'après de documents inédits*, Paris Alcan 1901.

Che l'esame dei manoscritti di Leibniz, a distanza di un paio di secoli dalla sua morte, abbia potuto ancora dar materia al rintracciamento di frammenti o di opere, paragonabili per valore e interesse a quelle che di quel gran pensatore erano finora pervenute a cognizione del pubblico, è un fatto che può sembrar strano e poco credibile a chi non ponga mente al genere delle questioni alle quali quei frammenti si riferiscono.

Tali questioni appartengono infatti ad un campo di ricerche il cui accesso richiede, come condizione indispensabile, il possesso simultaneo di cognizioni e attitudini intellettuali che, riunite eccezionalmente ed eminentemente in Leibniz, vennero poi in certo modo a essere ripartite fra le due classi, ben distinte e quasi antagonistiche, dei suoi eredi intellettuali, cioè, da una parte i matematici e dall'altra i cultori degli studi filosofici.

Ciò rende anche, nello stesso tempo, ragione di un altro fatto notevole, messo chiaramente in luce dal presente volume del Couturat, che, cioè, perfino negli scritti del Leibniz, già da tempo pubblicati, le parti che toccano più davvicino gli argomenti a cui abbiamo sopra alluso, cioè in particolare i vari metodi di rappresentazione simbolica dei ragionamenti deduttivi e il concetto generale di un algoritmo operatorio (calculus ratio-

cinator), sembrano non aver quasi richiamato sopra di sè alcuna attenzione ed essere giaciute non meno neglette o ignorate di quelle altre parti, ad esse affini, che gli editori delle opere di Leibniz non avevano finora neppur stimate degne della pubblicazione.

Eppure, come ha ragione di notare il Couturat, è precisamente alle ricerche e alle considerazioni in esse esposte che è necessario far capo per rendersi conto della origine prima e delle intime sorgenti da cui derivarono, per espressa testimonianza del Leibniz stesso, tanto le sue idee filosofiche più originali quanto le sue scoperte nel campo della matematica. Sì le une che le altre sono da lui infatti insistentemente presentate come delle semplici « applicazioni » di quelle sue speculazioni generali sulla logica deduttiva e sull'arte di scoprire (Combinatoria characteristica et ars inveniendi) alle quali egli non ha mai cessato di attendere in ogni fase della sua vita intellettuale, e delle quali le traccie ci sono rimaste in quella serie di frammenti e di tentativi che, già segnalati su questa Rivista dal Vacca, sono ora per la prima volta dal Couturat presi in considerazione nel loro insieme, e analizzati e comparati in rapporto al concetto fondamentale di cui rappresentano lo svolgimento.

Tale concetto è quello della possibilità di estendere al di fuori del campo dell'algebra, e della matematica in generale, quei processi di deduzione automatica che, basati su un'analisi rigorosa delle idee fondamentali e sull'uso di opportune notazioni ideografiche, si sono ivi dimostrati tanto fecondi ed efficaci come mezzi di accertamento e di indagine.

*
* *

È ai suoi primi studi sulla logica scolastica e al fascino che, come egli stesso ci informa, questi esercitarono su di lui fin dai suoi anni più giovanili, che occorre risalire per trovare il primo germe delle sue meditazioni su questo soggetto. (Mihi adhuc puero necdum nisi vulgaris logicae placita noscenti, expertique matheseos *nescio quo instinctu* subnata cognitio est posse excogitari aliquam analysin notionum unde *combinatione quadam exsurgere veritates et*, *quasi numeris*, *aestimari possint*. Elem. Rationis) Couturat, pag. 34.

Nello scritto *De Arte combinatoria*, da lui pubblicato mentre non era ancora ventenne (1666), e il cui titolo sembra accennare a un'ulteriore influenza esercitata su lui dagli scritti di Raimondo Lullo, questo germe è già sviluppato al punto da indurlo a un tentativo sistematico di rappresentazione simbolica dei concetti della geometria elementare mediante riduzione di essi a un certo numero (precisamente ventisette) di nozioni primordiali (notiones primitivae) che egli designa con numeri progressivi. Da queste coll'uso di pochi altri segni, indicanti le varie specie di relazioni e di « combinazioni » che tra essi si possono stabilire, egli costruisce le definizioni di tutti gli altri. Tali definizioni sono da lui distribuite in varie classi, in ciascuna delle quali sono successivamente combinati i concetti le cui definizioni figurano nelle classi precedenti.

Non è senza importanza notare a questo riguardo come egli insista

continuamente sull'analogia che questo processo di decomposizione e successiva ricomposizione di concetti presenta con quelli aritmetici di decomposizione d'un numero nei suoi fattori primi, e di successiva ricostruzione dei suoi divisori per mezzo di prodotti parziali fra questi.

La dimostrazione d'una proposizione generale: « *Ogni A è B* », è concepita da Leibniz come consistente nel porre in chiaro, per mezzo di una sufficiente analisi del significato dei suoi termini, che l'insieme delle proprietà che, prese insieme (*simul sumptae*) costituiscono la nozione B, *fà parte* dell'insieme delle proprietà che costituiscono la nozione A.

Prendendo le mosse da questo concetto, egli si propone anzitutto di determinare, dato un numero limitato di « nozioni primitive », quale sarà il numero nelle proposizioni « dimostrabili » che si possono costruire, assumendo *come soggetto* (o *come predicato*) una determinata nozione « complessa » (costituita cioè da un determinato gruppo delle nozioni primitive date).

Per quanto riguarda le proposizioni generali affermative, la prima delle suddette questioni è da lui risolta seguendo un procedimento analogo a quello che conduce a determinare il numero dei divisori d'un dato numero (che sia prodotto da numeri primi tutti diversi fra loro); la seconda, quella cioè di determinare il numero delle proposizioni di dato predicato, è parimenti ridotta a quella di determinare, quando sia data una classe finita di numeri primi, quanti sono i multipli d'un numero dato (eguale al prodotto d'un certo numero di essi) che si possono ottenere moltiplicandolo per l'uno o l'altro dei prodotti risultanti dalle diverse combinazioni (senza ripetizioni) di quelli, tra i numeri primi dati, che non figurano tra i suoi fattori.

Per quanto riguarda le proposizioni particolari affermative di dato soggetto Leibniz si limita ad osservare che, poichè la proposizione « *Qualche A è B* » non può, in conformità alle note regole di conversione e di subalternazione della logica scolastica, esser dedotta se non dall'una o dall'altra delle proposizioni generali affermative che hanno *A* per soggetto e B per predicato oppure *B* per soggetto ed *A* per predicato, il numero di quelle tra esse che sono " dimostrabili ,, sarà dato dalla somma dei due numeri sopra calcolati, rispettivamente, per le proposizioni generali di dato soggetto e per le proposizioni generali di dato predicato.

Dopo aver così calcolato il numero delle proposizioni affermative " dimostrabili ,, che si possono costruire colla combinazione d'un dato numero di nozioni " primitive ,,, Leibniz, proseguendo in queste sue ricerche di " logica enumerativa ,,, si propone di determinare anche il numero delle diverse dimostrazioni che di ciascuna di esse è possibile trovare e, in particolare, data una proposizione universale affermativa " dimostrabile ,, " *Ogni A è B* ,, , quanti sono i sillogismi che si possono costruire (sempre nell'ipotesi di un numero limitato di nozioni primitive) aventi per *conclusione* la detta proposizione. Tale numero, corrispondendo a quello delle nozioni complesse che in tali sillogismi possono fungere da " termine medio ,, è da lui calcolato determinando, nel modo già visto sopra, il numero delle

nozioni " complesse ,, atte a figurare *nello stesso tempo* come predicati di proposizioni generali affermative aventi A per soggetto, e come soggetti di proposizioni generali affermative aventi B per predicato. E analoghe considerazioni, sebbene alquanto più oscure e complicate, sono da lui pure applicate al caso dei sillogismi aventi per conclusione una data proposizione generale negativa.

*
* *

Giova notare, prima di passare all'esame degli altri scritti logici di Leibniz posteriori al " *De arte combinatoria* ,, , come egli, pur qualificando questo suo primo lavoro come un " *essay d'escolier* ,,, aggiunge; " *mais le fond est bon et j'ay basti la-dessus* ,,.

In una serie di saggi portanti la data del 1679, troviamo infatti Leibniz occupato a costruire, sulla base dell'analogia sopraindicata tra l'analisi dei concetti e la decomposizione dei numeri nei loro fattori, e coll'ulteriore impiego del segno di negazione, un sistema coerente di notazioni simboliche atto a rappresentare, non solo le varie specie di proposizioni, ma anche le trasformazioni e le operazioni deduttive che su essa si possono effettuare.

Egli osserva anzitutto come, dato un sistema di " nozioni primitive ,, $a, b, c...$, basta far corrispondere ordinatamente ad esse dei numeri primi per es. 2, 3, 5, 7, etc. per poter indicare, senza alcun pericolo d'equivoci, ogni nozione " complessa ,,, derivante da qualsiasi loro combinazione, mediante il numero corrispondente al prodotto dei numeri primi designanti le nozioni primitive dalle quali tale nozione complessa è costituita.

Così per es. se con 2 e 3 si indicano rispettivamente i concetti " animale ,, e " ragionevole ,,, il numero 6 indicherà " animale ragionevole ,,.

Se nella definizione della nozione complessa che si tratta di rappresentare simbolicamente, entrano, oltre ad alcune delle nozioni date anche le negazioni di alcune di esse, egli conviene di rappresentarla con due numeri, uno dei quali sia il prodotto dei numeri primi corrispondenti alle nozioni " positive ,, e l'altro il prodotto di quelli che corrispondono alle nozioni negative, e di distinguere tali due prodotti l'uno dall'altro prefiggendo al secondo il segno — di negazione.

Così per es., avendo 2 e 3 i significati sopra indicati, se indichiamo con 5 e 7 rispettivamente i concetti: " europeo ,,, " ricco ,,, l'espressione simbolica: (6,—35)
esprimerà il concetto: " animale ragionevole, non ricco, non europeo ,,.

Dati due numeri qualunque n, n' (che siano prodotti di fattori primi appartenenti all' " alfabeto ,, introdotto per notare le nozioni primitive poste a base d'una data trattazione) si potrà constatare subito se la nozione corrispondente al simbolo : $(n,—n')$ sia " possibile ,, (cioè non contradittorio) verificando se i due numeri n, n' sono primi tra loro (poichè in caso contrario la nozione in questione conterrebbe un fattore della forma $a—a$).

Per verificare poi se la nozione $(n,—n')$ possa figurare come soggetto in una proposizione universale affermativa, avente per predicato un'altra

data nozione (m,—m'), basterà, in conformità a ciò che abbiamo visto indietro, verificare se n è divisibile per m e inoltre anche n' per m'.

Condizione invece perchè si verifichi la proposizione generale negativa avente per soggetto (n,—n') e per predicato (m,—m'), è che i due numeri n ed m', *oppure* gli altri due n' ed m abbiano un fattore comune.

Le corrispondenti regole per le proposizioni particolari, sono da Leibniz ridotte a quelle sopra enunciate per le proposizioni generali, osservando che le proposizioni particolari, affermative e negative, equivalgono rispettivamente alla negazione delle corrispondenti proposizioni generali negative o affermative.

Dal fatto che i numeri m, n ; m' n' entrano simmetricamente nell'enunciato delle condizioni di validità sopradette, relative alle proposizioni generali negative e particolari affermative, Leibniz deduce immediatamente la nota regola scolastica della " conversio simplex ,, e con analoghe considerazioni cerca di dimostrare quelle relative alla " conversione per contrapposizione ,, (Formul. a. 1901 2·4), alla " conversione parziale ,, non che quelle relative alla validità dei sillogismi delle varie figure. Ma le difficoltà e le complicazioni contro cui vennero ad urtare i suoi tentativi di estendere questo metodo di dimostrazione a tutte le norme della logica scolastica sembrano averlo indotto a rinunziare a ogni ulteriore elaborazione di tale simbolismo logico-aritmetico.

* * *

La sola traccia importante che queste due prime idee relative all'analogia tra l'analisi dei concetti e la decomposizione dei numeri in fattori, abbiano lasciato nei suoi scritti posteriori è rappresentata dalle convinzione, da lui non mai abbandonata anche in seguito, di una distinzione " assoluta ,, tra nozioni " primitive ,, e nozioni " derivate ,,, distinzione che, come quella tra numeri primi (" primitivi ,,) e numeri non primi, egli riguardava come affatto indipendente da qualunque considerazione relativa all'ordine e alla forma delle singole trattazioni. (Cfr. *Formulaire* 1901, p. 7).

Un'altra osservazione, da non omettere a questo proposito è quella della perfetta coincidenza tra la corrispondenza stabilita da Leibniz tra la proposizione: *a est b*, e l'altra: a *è divisibile per* b, e la corrispondenza indicata nel Formulario (a. 1901 p. 23) tra le due proposizioni;

$$x \varepsilon \text{ Cls} \,.\, a \supset b$$

$$x \varepsilon \text{ N} \,.\, \text{a } \textit{est un diviseur de} \text{ b.}$$

Poichè, infatti, Leibniz designa, con a, b, non le *classi*, ma le *condizioni* da cui le classi sono determinate (1), la proposizione *a est b* significa, per lui, non l'inclusione di una classe a in un'altra b, ma invece, come già accennammo, l'inclusione dell'insieme di condizioni che definiscono la classe b nell'insieme di condizioni che definiscono la classe a; la qual cosa, applicando a tali insiemi o classi di condizioni, le notazioni del Formulario (Cfr. ed. 1901 p. 5), si esprimerebbe scrivendo: $b \supset a$ (2).

---

(1) « De ideis loquimur non de individuis ».

(2) « *A est B idem est quod* A *continet* B » (Cfr. Couturat p. 345).

Un'analoga considerazione spiega come, per Leibniz, al minimo comun multiplo di due numeri, venga a corrispondere, non la *somma logica di due classi*, ma la classe formata dagli individui godenti della *somma logica delle condizioni* a e b, cioè il *prodotto logico delle due classi* definite rispettivamente dalle condizioni *a* e *b*.

* * *

Una fase ulteriore delle speculazioni di Leibniz sulla logica è rappresentata dai due scritti " *Specimen calculi universalis* „ e " *Ad specimen calculi universalis addenda* „, che, nelle edizioni di Erdmann e di Gerhardt, furono pubblicati solo in parte.

In essi Leibniz comincia ad enunciare un certo numero di assiomi logici (*propositiones per se verae*), tra i quali, oltre quelli che si riferiscono alla proprietà commutativa dell'operazione logica fondamentale da lui considerata, cioè del prodotto di due classi, (o della somma delle condizioni che le definiscono), figurano il principio d'identità (*a est a*) e l'altro: *ab est a*. (V. Formul. 1901 § 1, 5·3 e § 2, 1·3).

Da questi, coll'aggiunta del principio del sillogismo (" *Si a est b, et b est c, a est c* „), egli deduce una serie di altre proposizioni esprimenti le note proprietà dell'operazione logica suddetta, e, in primo luogo, quelle relative alla " composizione „ e " decomposizione „ dal predicato d'una proposizione universale, cioè:

" Si a est b et a est c, a est bc „

" Si a est bc, a est b et a est c „

A questi due enunciati egli fà seguire l'osservazione che, per quanto riguarda invece il soggetto, è lecita la " composizione („ *si a est c, et b est c, ab est c* „), ma non la " decomposizione „, non potendosi da *ab est c* dedurre *a est c*, nè *b est c*.

Dimostra, in seguito, la proposizione:

" *Si a est b, ac est bc* „ (Formul. 1901 § 1, 5·5, § 2, 1·5)

deducendone, nel modo pure indicato nel Formulario (§ 1, 5·6), il " *praeclarum theorema* „:

" *Si a est b et c est d, ac est bd* „.

Alla domanda se, reciprocamente, dalla proposizione: *ac est bc*, si possa dedurre l'altra: *a est b*, egli risponde che condizione necessoria è sufficiente perchè tale deduzione sia lecita è che *b* e *c non abbiano elementi comuni* (*non sint intercommunicantia*) col che egli intende significare che le due nozioni *b* e *c*, decomposte l'una e l'altra nelle " nozioni elementari „ che le costituiscono, non abbiano alcuna " nozione elementare „ in comune. Per esprimere una tale relazione di *non-intercommunicatio* tra due classi di condizioni *b*, *c*, Leibniz non ha a disposizione alcun simbolo. L'indicarla, come fa il Couturat, scrivendo

$$bc = o$$

è certamente lecito purchè però si avverta che il prodotto *bc*, in questa formola, rappresenta un'operazione affatto diversa da quella indicata da Leibniz scrivendo *ac* o *ab* (per es. nella proposizione *ab est ac*). Con *ab* infatti Leibniz come vedemmo rappresenta l'insieme delle condizioni che co-

stituiscono la nozione a e la nozione b (cioè la *somma logica* di tali condizioni, somma logica alla quale corrisponde il *prodotto* logico delle classi corrispondenti); il *bc* invece che figura nella formola sopradetta, vuol indicare il *prodotto logico* delle classi di condizioni designate con *b* e *c*.

Ne segue che, se si adotta la suddetta convenzione del Couturat (ed è necessario adottarla se si vuol tradurre in simboli il teorema enunciato da Leibniz) la proposizione in questione, enunciata coi simboli del Formulario, dà luogo alla seguente formola:

$$a,b,c\varepsilon \text{ Cls}.\ b\smile c \supset a\smile c\ .\ bc=\Lambda :\supset b\supset a$$

la quale esprime una proposizione vera e non soggetta ad alcuna delle critiche che il Couturat muove all'enunciato di Leibniz (a p. 341, Nota 4).

* * *

Come documento delle varietà di significati attribuiti da Leibniz ai simboli di cui fa uso è notevole un frammento (inedito) portante la data del 1684, e nel quale l'espressione *x est abc* è assunta per indicare ciò che ora si chiamerebbe la *somma* logica delle proposizioni: *x est a, x est b, x est c*.

Tra le proprietà dell'operazione così definita, che ivi sono prese in considerazione, figura in primo luogo la seguente: " *Si x est abcde et y est cefg x est c* ,, colla quale Leibniz intende rappresentare in simboli il procedimento seguìto dai geometri per determinare un punto come intersezione di due o più suoi *luoghi*, o anche dagli indovini per trovare un oggetto date due o più classi di oggetti a cui esso contemporaneamente appartenga. (Couturat p. 344).

* * *

Nel saggio di poco posteriore (1686) portante il titolo " *Generales inquisitiones de analysi notionum et veritatum* ,, l'espressione *a est bc* torna ad assumere il significato che aveva, come vedemmo, nello " *Specimen calculi universalis* ,,, e ad essere definita come equivalente al sussistere simultaneo delle due proposizioni *a est b, a est c*. Gli assiomi posti a base della trattazione nello *Specimen*, vengono rienunciati con qualche modificazione ed aggiunta (tra cui quella relativa alla proprietà della negazione: non non A=A).

Ciò che caratterizza questo saggio è la tendenza ad esprimere le relazioni di " inclusione ,, mediante quelle di " uguaglianza ,,. Così la proposizione *A est B* viene espressa colla formola: A=BX la quale indica che, per ottenere l'insieme delle condizioni che definiscono la classe A, occorre assumere, oltre alle condizioni che definiscono la classe B, anche un certo numero di ulteriori condizioni il cui insieme è designato dalla lettera X. (Cfr. Formul. $\S_{\exists}$ 1·4).

Dalla formola A=BX egli deduce l'altra A=AB, moltiplicando la prima per B e sostituendo nell'espressione così ottenuta (cioè in AB=BX, a BX, il suo valore A).

Basandosi sulle quali premesse, egli dimostra il principio del sillogismo: *Si A=AB et B=BC, A=AC.* (Sostituendo nella prima di dette uguaglianze il valore di B, dato dalla seconda, ottiene prima A=ABC, e da questa, sostituendo in essa ad AB il suo valore A, dato dalla prima, ricava: A=AC. Non enuncia però la proprietà associativa di cui qui fa uso implicitamente).

L'applicazione di questo stesso metodo di rappresentazione alle proposizioni particolari fu da Leibniz tentato in diverse riprese e in vari modi, i quali si possono ridurre a due tipi: quelli cioè consistenti nel far precedere anche il soggetto da un segno di " classe indeterminata ,, (come fecero più tardi anche Boole e Jevons) e quelli basati invece sulla considerazione, a cui Leibniz, come vedemmo, era già ricorso in una precedente occasione, che le proposizioni particolari, affermative o negative, equivalgono rispettivamente alle corrispondenti proposizioni universali negative o affermative.

In questo secondo caso egli rappresenta le proposizioni: *Qualche A è B, Qualche A non è B*, non solo colle formole:

A non = X non B A non = XB,

ma anche colle altre assai più convenienti:

AB est res A non B est res,

dimostrando poi l'equivalenza delle espressioni:

AB non est res A non B non est res

con quelle da lui prima adottate

A=A non B A=AB

per le proposizioni generali.

Il fatto però che con questo sistema di notazione veniva a essere pregiudicata la questione del significato " esistenziale ,, delle proposizioni generali, questione da cui dipendeva l'altra delle legittimità delle regole della logica scolastica relative alla " conversione ,, e alla " subalternazione ,, , sembra esser stato d'ostacolo a che Leibniz traesse tutto il partito possibile da queste sue idee di cui l'ulteriore sviluppo della logica matematica mise più tardi in luce l'importanza.

***

Lo stesso si può dire anche d'un'altra idea contenuta in questo stesso opuscolo (Generales inquisitiones etc.) quella cioè dell'analogia tra le relazioni di *deducibilità,* o di *equivalenza* di proposizioni, e le relazioni di *inclusione* o di *coincidenza* di classi, idea che sembra essere stata suggerita a Leibniz dal " parallelismo ,, (già notato da Pascal) tra i processi d'analisi e *definizione* delle nozioni e i processi di *dimostrazione* e di *riduzione* delle proposizioni le une alle altre.

Allo stesso modo, egli osserva, come la proposizione " *A est B* ,, significa che le condizioni richieste per l'applicazione del nome A, implicano, o contengono, le condizioni indicate dal nome B, così la proposizione:

" *Si A est B, C est D* ,,

esprime che l'affermazione (1) A est B, *contiene*, o implica come conseguenza, la proposizione " *C est D* ,,; per modo che essa può essere indicata con:

(*A continet B*) *continet* (*C continet D*)

o anche: (*A est B*) *est* (*C est* D).

La perfetta conformità tra le proprietà della copula " est ,, (o " continet ,,), nei due casi, è, da Leibniz, riconosciuta ed enunciata in modo non meno chiaro ed esplicito di quanto avvenne più tardi per parte di Peano (1888) e Schröder (1891):

Per A *aut* B *intelligo vel terminum vel enunciationem.* (Couturat p.355). È notevole a questo riguardo l'analisi che egli fa del senso delle congiunzioni " sebbene ,, , " tuttavia ,, (*etsi, tamen*) le quali servono a *negare* che le due proposizioni, tra cui figurano, siano deducibili l'una dall'altra, cioè ad esprimere, per le proposizioni, il sussistere di quelle relazioni che, nel caso delle classi, sono espresse dalle proposizioni particolari (2).

Con frasi poco differenti da quelle usate poi da Boole egli afferma che " *veritates absolutae* (cioè categoriche) *et hypotheticae easdem habent leges et iisdem generalibus theorematibus continentur* ,, , ed interpreta la proposizione A *est* B come perfettamente equivalente alla seguente:

" *Si* L *est* A, L *est* B *quelque soit* L ,..

(Couturat pag. 355, nota 6, Formul. 1901 §1, 4·3.

* * *

Posteriore a quelli finora esaminati è ritenuto dal Couturat lo scritto: *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis.* Anche in questo Leibniz dopo aver definito la relazione di " identità ,, (1), cerca di ridurre ad essa tutte le altre relazioni della logica e in particolare quella di " inclusione ,, che egli definisce nel seguente modo:

" Si plura *simul sumpta* coincidant uni, plurium quodlibet dicitur *inesse* vel *contineri* in uno isto. Ipsum autem unum dicitur continens ,, (Couturat pag. 365).

Il che è anche da lui espresso in simboli dicendo che " A inest B ,, equivale a: " B=A+X.

E importante notare come la dipendenza che Leibniz viene così a stabilire tra il senso che egli attribuisce al segno + e quello che attribuisce alla copula *inest*, fa sì che, per lui, anche il primo sia suscettibile di rappresentare due operazioni logiche diverse a seconda che la parola *inest* che figura nella sua definizione è interpretata come esprimente l'inclusione di una classe (soggetto) in un'altra (predicato) o invece come esprimente la *inclusione* delle condizioni che definiscono una classe (predicato) tra le condizioni che definiscono un'altra classe (soggetto).

---

(1) *Cum dico A est B, et A et B sunt propositiones, intelligo ex A sequi B.* (Couturat, pag. 355, nota 1).

(2) « A est vraie *quoique* B soit vraie » se traduit par: « *De ce que B soit vraie il ne s'ensuit pas que A soit fausse* (Cfr, Couturat, pag. 357, nota 2).

Che Leibniz, nello scritto di cui ora parliamo, oscilli, in certo modo, continuamente tra tali due interpretazioni della copula *inest* è messo fuor di dubbio dagli esempi di cui fa uso. Così egli esemplifica le due proposizioni: " A inest B ,, , " B inest C ,, colle seguenti: " *Quadrilaterum esse, inest parallelogrammo, et parallelogrammum esse, rectangulo* ,, , aggiungendo però subito: " *Inverti haec possunt* si *pro notionibus per se consideratis, spectemus singularia* sub *notione comprehensa, et fieri potest* A *rectangulum*, B *parallelogrammum*, C *quadrilaterum*. (Couturat pag. 374, nota 1).

Ora il fatto che, a seconda che si adotti l'una o l'altra delle due interpretazioni per l'*inest*, il segno + viene a rappresentare, rispettivamente, la *somma logica delle due classi* tra i cui segni è posto, o la *somma logica delle condizioni* da cui tali classi sono definite (somma logica a cui corrisponde, come già si osservò, il prodotto logico delle classi rispettive), basta a mio avviso a giustificare le citazioni storiche, tratte appunto dall'opera di Leibniz di cui ora parliamo, che si trovano nel §2 del Formulario 1901 (riportate in seguito alle proposizioni dall'1·3 all'1·6 e dal 2·1 al 2·6).

Poichè infatti, nello scritto in questione, ciò che Leibniz esprime, promiscuamente, talvolta scrivendo A+B, talvolta scrivendo semplicemente + AB (2), è in fondo sempre *la stessa* operazione logica, o più precisamente *le stesse* due operazioni di logica (cioè la *somma delle condizioni* definienti due classi, e il *prodotto delle classi stesse*), le varie proprietà che egli enuncia dell'operazione + che egli considera, possono tanto riguardarsi come riferentisi a quella che attualmente si chiama *moltiplicazione* logica quanto a quella che ora si chiama l'*addizione*, purchè solo si avverta che, in questo secondo caso, le classi di cui parla Leibniz, e che egli indica un *a* e *b*, sono " classi di condizioni ,,.

È da notare infine a tale proposito come l'osservazione che fa il Couturat (pag. 373) a proposito delle seguenti proposizioni cominciate da Leibniz:

" Da A *inest* B+C non si può dedurre " A *inest* B ,, , non esclude affatto che questa pure, come le rimanenti, corrisponda, per Leibniz, nello stesso tempo all'una e all'altra delle due seguenti asserzioni:

1) Dal dire che la classe di condizioni A è *contenuta* nella somma delle due classi di condizioni B e C non si può dedurre che essa sia contenuta nella classe di condizioni B. (Il che si esprimerebbe in simboli dicendo che da $A \supset B \cup C$ non si deduce $A \supset B$);

2) Dal dire che la classe, determinata dalla condizione A, contiene quella determinata dalla somma delle condizioni B e C, non si può dedurre che essa contenga quella determinata dalle sole condizioni B. (Il che, indicando con *a, b, c*, le classi determinate rispettivamente dalle condizioni A, B, C si esprimerebbe in simboli dicendo che: da $bc \supset a$ non si deduce $b \supset a$).

---

(1) *Eadem* sunt quorum alterutrum ubilibet potest substitui salva veritate ».

(2) *Pro A+B posset simpliciter poni AB* (Couturat pag. 364).

*
* *

Un'analoga avvertenza è pure da ripetere per ciò che riguarda la " sottrazione logica ,, , definita, nello stesso opuscolo, da Leibniz, nel seguente modo:

" Se A contiene B e se C contiene tutto ciò che è contenuto in A, eccetto ciò che è contenuto in B, si dirà che C è uguale ad A—B ,,.

Venendo così infatti anche il concetto di " sottrazione ,,, come prima quello di addizione, a dipendere da quello di " *inclusione* ,, anch'esso verrà a partecipare della stessa duplicità di senso che abbiamo notata nel caso dell'addizione.

Ciò è messo in chiaro dagli esempi stessi che Leibniz cita, per la relazione A — B = C, tra i quali figura il seguente: Homo — Rationalis = Brutum, corrispondente alla formola:

Homo = Brutus + Rationalis (1).

Il diverso significato del segno di sottrazione (detractio) e di quello di negazione (" non ,,) è caratterizzata da Leibniz col dire: A non A est absurdum, A—A est nihil, e il contrasto tra le proprietà dell'uno e dell'altro è espresso dicendo che: " *non* ,, repetitum se ipsum tollit. *Detractio* repetita non tollit se ipsam sed terminos cui praefigitur... Verbi gratia A *non non* B est AB, sed A — — B est A ,,. (Cfr. Couturat pag. 379, nota 1).

Leibniz tenta pure di estendere la sua definizione di A—B anche al caso in cui la condizione che " A *sia contenuto in* B ,, non sia soddisfatta. L'espressione A—B è allora da lui designata come esprimente un' " aspettativa di sottrazione (*expectatio dectractionis*), e paragonata ai numeri negativi dell'Algebra, in quanto, quando essa figuri come aggiunta a un segno di classe C, tale che C+A contenga B, dà luogo all'espressione: C+A—B, il cui significato è determinato dalla definizione già data sopra.

*
* *

Chiuderò questa rapida rassegna degli scritti logici di Leibniz, compita colla scorta del volume del Couturat, notando col Couturat stesso, come, mentre per ciò che riguarda la proprietà delle operazioni fondamentali della logica (presa ognuna a sè o nei suoi rapporti colle relazioni di " inclusione ,, o di " coincidenza ,,), ben poche siano quelle, ora note, di cui negli scritti di Leibniz non si riscontri l'enunciato, sotto forma più o meno esplicita e determinata, per ciò che riguarda invece quelle che si potrebbero chiamare le proprietà *vicendevoli* delle dette operazioni, per es. la reciproca distributività della somma e del prodotto logico (Lambert-Peirce), o la definibilità di ciascuna di queste due operazioni per mezzo dell'altra e del segno di negazione (De Morgan) ecc., egli sembra aver lasciato quasi tutto da fare ai suoi successori.

La sua costante preoccupazione di non scindere le considerazioni re-

(1) Altrove dice anche: *Si A = triangulum, B = aequilaterale* A + B *erit « triangulum aequilaterale »*.

lative all'inclusione o all'eguaglianza tra classi da quelle relative alla coincidenza, parziale o totale, delle condizioni che le definiscono, lungi da facilitargli il riconoscimento di quel principio di " dualità ,, (più tardi scoperta dal De Morgan) da cui dipende tanta parte della semplicità e della simmetria che caratterizza attualmente il calcolo logico, sembra esser stato per lui il principale ostacolo a una concezione netta della somma e del prodotto logico, come di due operazioni fondamentalmente distinte tra loro (per quanto godenti di comuni proprietà), e come suscettibili perciò di essere considerate nei loro reciproci rapporti.

La parte del volume del Couturat, alla cui considerazione mi sono limitato nel presente resoconto, quella cioè direttamente riferentesi al simbolismo della logica matematica non è certamente la sola che contenga documenti e osservazioni di cui sarebbe opportuno l'esame e la discussione su questa Rivista.

Il contenuto tuttavia delle parti rimanenti, pur riattaccandosi alle speculazioni logiche di Leibniz, e pur concernendo argomenti ad esse intimamente connessi, quali il calcolo geometrico, la costruzione d'un linguaggio scientifico universale, il progetto d'un'enciclopedia del sapere umano, ecc., potrà senza inconvenienti, e anzi con vantaggio, formare oggetto di altri speciali resoconti.

G. VAILATI

Bari, 12 ottobre '01.

DIZIONARIO DI MATEMATICA

Un *Dizionario di Matematica*, cioè una raccolta dei termini che si incontrano nelle opere matematiche attuali, insieme alle osservazioni che servono a precisare il significato o i significati d'ogni termine, quali l'etimologia, la storia, la definizione, quando è possibile, riuscirà un lavoro utile tanto sotto l'aspetto scientifico quanto sotto quello didattico.

La moltiplicità dei termini usati per rappresentare una stessa idea, e la moltiplicità dei significati in cui è usato uno stesso termine costituiscono un inconveniente troppo diffuso e ben noto.

Il Dizionario potrà guidare individualmente ogni autore nella scelta dei termini più opportuni pel suo lavoro.

Esso è pure il lavoro preparatorio onde ottenere una terminologia scolastica uniforme; questione questa di alta importanza e a cui si interessa la Società « Mathesis », e di cui dottamente riferì il prof. E. De Amicis nel Congresso tenutosi a Torino nel 1898.

Esistono libri aventi lo stesso titolo del precedente, quali:

G. S. Klügel, *Mathematisches Wörterbuch.* Leipzig a.1803-1831, 5 vol.

cui fa seguito il

« Supplement » von J. A. Grunert. Leipzig a.1833-36, 2 vol.

A. S. De Montferrier, *Dictionnaire des sciences mathémathiques pures et appliquées.* Paris a.1838, 3 volumi. (Altre copie portano l'indicazione Paris a.1845).

H. Sonnet, *Dictionnaire des Mathématiques appliquées.* Paris a.1867, 2 vol.

Ma queste opere voluminose contengono sotto ogni nome le proprietà principali dell'oggetto indicato da quel nome. Ad es. sotto il nome di *Derivata* si troverà un sommario di calcolo differenziale. Esse sono enciclopedie, e come tali non possono competere coi trattati comuni, perchè disponendo i vari soggetti in ordine alfabetico, si perde completamente l'ordine logico, che ha importanza fondamentale in tutti i trattati.

Essi poi non contengono quasi mai l'etimologia e storia dei nomi, elemento importantissimo pel perfezionamento della terminologia.

Infine essendo fatti da una sola persona, per quanto dotta e laboriosa, hanno sempre un'impronta personale; le inesattezze ed errori che inevitabilmente si riscontrano in opere di questa natura non possono più essere corrette, non essendosi ristampate edizioni ulteriori.

L'opera recente

F. MÜLLER, *Vocabulaire Mathématique (français-allemand).* Leipzig a.1900 p.XII+132.

è voluminoso perchè consta in gran parte di termini antiquati, e di termini proprii all'astronomia, all'astrologia, ecc.

Esso poi si limita in generale a dare la corrispondenza fra le parole francesi e le tedesche.

Eccono un estratto:

Abaciste, *Abacist*
abaisser, *erniedrigen*
abaque, *Abacus.*

Di qui non si ricava alcun significato dei termini. Anzi, essendo i termini matematici in gran parte internazionali, il dizionario si limita a una variazione di desinenze.

Vedasi pure MÜLLER, *Ueber der Mathematische terminologie* BM. a. 1901 p.282-325.

Per quanto possano essere utili i lavori precedenti, nessuno risponde alla questione.

Ritengo che il dizionario matematico, quale ora si intrapprende, avrà un piccolo volume, come ne fa fede la parte che segue.

È sommamente utile che il dizionario sia un lavoro di collaborazione, e che prima della stampa definitiva esso sia visto da un gran numero di persone. E ciò per togliere ogni carattere individuale al lavoro; perchè necessariamente un solo autore imprime al suo lavoro un carattere unilaterale. Inoltre la raccolta riuscirà più completa, potendo ognuno aggiungere quel nuovo termine, o quel nuovo significato d'un termine che crederà più opportuno.

Il libro riuscirà emendato dalle sviste in cui si cade necessariamente in un lavoro di qaesto genere.

Sarà bene che il dizionario contenga solo i termini che trovansi effettivamente nei libri in uso oggigiorno. I termini antichi eccezionalmente possono essere riportati, se c'è qualche vantaggio a richiamarli in uso.

Lo scopo principale del dizionario è quello di poterne estrarre una terminologia da adottarsi in seguito. Ma le discussioni su questa scelta sarebbero attualmente intempestive, prima che il lavoro di raccolta del materiale entro cui si deve scegliere non sia terminato.

Queste le ragioni che esposi nel congresso dei professori italiani di Matematica, tenutosi a Livorno nell'agosto 1901. Ivi si è convenuto di pubblicare un « Dizionario di Matematica », mediante la cooperazione di

Mathesis, società fra gli insegnanti delle scuole secondarie, presiedute dal prof. G. Frattini a Roma,

Periodico di Matematica, diretto dal prof. G. Lazzeri, a Livorno,

Rivista di Matematica, diretta dal prof. G. Peano a Torino.

Aderirono pure:

Il Bollettino di Matematica, diretto dal prof. A. Conti a Bologna,

Il Pitagora, diretto dal prof. G. Fazzari a Palermo.

La prima parte di questo Dizionario si riferisce alla Logica matematica. Un saggio di questa parte fu presentato al congresso medesimo. Completato con aggiunte apportate dai professori Vacca, Vailati e Padoa, qui ne segue un'edizione provvisoria.

I membri e i collaboratori degli enti associati possono pubblicare sul rispettivo giornale le aggiunte, correzioni e osservazioni che crederanno opportune.

Trascorso un tempo sufficiente, si passerà alla stampa definitiva di questa prima parte del Dizionario.

PARTE 1ª — LOGICA MATEMATICA

In questo Dizionario hanno posto i termini generali che incontransi nelle pubblicazioni matematiche. Sono esclusi cioè i termini proprii dell'Aritmetica, della Geometria e delle altre parti della Matematica.

I termini sono accompagnati dalla loro etimologia e da spiegazioni o esempi intorno al loro valore, o ai loro valori, e dalla loro trasformazione nei simboli usati nel « Formulaire de Mathématiques » (*) quando la cosa è possibile. Questi termini non sono però accompagnati da una vera definizione, perchè l'esame di quali si possono definire e quali no, richiederebbe tutta la Logica simbolica.

(*) Abbreviato in Formul. Qui si citerà l'edizione dell'a. 1901, Paris, Carré et Naud.

Addizione logica. Vedi « Somma logica ».

Analisi, *ἀνά-λυ-σις* = so-lu-zione. Opposto a « sintesi ».

Al testo di Euclide, libro 13, secondo Heiberg t.4 p.364, furono aggiunte da qualche commentatore le definizioni di analisi e sintesi, ma poco chiare. La prima, come sta scritta, enuncia una forma di ragionamento errata. Lo stesso fa Pappo libro 7 p.634.

In Archimede, *Della Sfera* libro 2 prop. 4,. l'analisi del problema consta nel porre il problema in equazione, e nella sua risoluzione. La sintesi ne è una specie di verifica o prova.

Il ragionamento analitico consta d'una serie di sillogismi della forma $b \supset c \,.\, a \supset b \,.\supset.\, a \supset c$.

Invece nel ragionamento sintetico i sillogismi hanno la forma

$a \supset b \,.\, b \supset c \,.\supset.\, a \supset c$.

Appartenere lat. adpertinere, ha assunto il valore di « essere parte » (vedi).

Altre volte significa « è un ». (x *appartiene* alla classe a) = ($x \varepsilon a$).

Arbitrio. « Presi ad arbitrio due numeri a e b » vale quanto « Se a e b sono numeri ». Vedi essere.

Articolo. Termine grammaticale.

Diversamente unito al verbo « essere » (vedi) gli dà i valori ε, $=$, $\supset$.

Assioma = *ἀξίωμα* da *ἄξιος* = degno. Vale « proposizione primitiva » indicata nel Formul. con Pp.

Alcuni A. fanno differenza fra assioma e postulato, a seconda del grado di evidenza.

Associativa. Essendo x,y degli individui d'una classe, sia xay un individuo della stessa classe. Il segno a indica un'operazione. Quest'operazione dicesi « associativa » se qualunque siano x,y,z nella classe, si ha: $(xay)az = xa(yaz)$.

Sono associative le operazioni aritmetiche $+$ e $\times$, e le logiche $\cap$ e $\cup$

Il nome « associativo » fu introdotto in questo senso da Hamilton Cambridge J. a.1846 t.1 p.50.

Assurdo lat. absurdus che in origine significava « che suona male ».

(la condizione p_x è in x assurda) = (non esistono degli x che soddisfacciano alla condizione p_x) = ($-\exists\, x \ni p_x$).

Generalmente la condizione p_x è l'affermazione simultanea di più condizioni, e allora dire « il sistema è assurdo » vale quanto « le condizioni sono contradditorie ».

Astrazione. Dicesi in logica matematica « definizione per astrazione » la definizione d'una funzione φx, avente la forma:

$\varphi x = \varphi y \,.=.$ (espressione composta coi segni precedenti),

cioè non si definisce il segno isolato φx, ma solo l'uguaglianza $\varphi x = \varphi y$.

Avere si trasforma in « essere ». Es. « Se si *hanno* due numeri a e b » vale « Siano a e b dei numeri ».

(4 e 6 *hanno* per massimo comune divisore 2) = [$2 = D(4,6)$].

Campo = classe.

Classe = classis, idea primitiva, indicata col simbolo Cls.

Coesistere. (Le condizioni d'un sistema coesistono) = (il sistema non è assurdo).

Coincidere vale « essere eguale ».

Commutativa. Sia xay una funzione di x e di y. Si dice che l'operazione a è commutativa se $xay = yax$.

Sono commutative le operazioni logiche $\cap$ e $\cup$, e le aritmetiche $+$ e $\times$.

Dicesi poi che due operazioni f e g a eseguirsi su una sola variabile x sono commutabili fra loro quando $f(gx) = g(fx)$.

In analisi sonvi numerose coppie di funzioni commutabili.

Questo termine fu introdotto da Servois, Annales de Math. a.1815 p.50.

Compatibili = coesistenti (vedi).

Comune. (Classe comune alle classi a e b) = $a \cap b$.

Comunque = ad arbitrio (vedi).

Conclusione = Tesi (vedi).

Condizione = proposizione contenente variabili.

Se a è una classe, la proposizione « x è un a » in simboli « $x \varepsilon a$ », è una condizione in x.

Viceversa se p_x è una condizione in x, si può considerare la « classe degli x soddisfacenti alla condizione p_x » indicata col simbolo « $x \ni p_x$ », che si legge « x tale che p_x ». Si ha

$$x \ni (x \varepsilon a) = a \qquad x \varepsilon (x \ni p_x) = p_x .$$

Quindi data una classe, risulta determinata una condizione, e viceversa. Sicchè i termini « classe » e « condizione » esprimono la stessa idea sotto due aspetti diversi. Nel Formul. si usa il solo simbolo Cls.

Conseguenza. (La proposizione p è conseguenza della q) = ($q \supset p$).

Contenere. (La classe a è contenuta in b) = (dall'essere a si deduce essere b) = ($a \supset b$).

Contradditorio, Contrario. In logica scolastica il contradditorio del giudizio (proposizione) $a \supset b$ è $-(a \supset b)$, e il contrario è $a \supset -b$.

In matematica più proposizioni condizionali diconsi contradditorie, se il loro prodotto logico è assurdo (vedi).

Conversione. Regola di logica scolastica, per cui

dalla proposizione « qualche a è b » si passa alla « qualche b è a »
e dalla « nessun a è b » si passa alla « nessun b è a ».

Siccome in logica simbolica queste proposizioni si scrivono $\exists a \frown b$, e $-\exists a \frown b$, la conversione è una forma della regola di logica simbolica, detta « commutatività del prodotto logico ».

La conversione ora considerata dicesi pure « conversione semplice ».

Si converte la proposizione « ogni a è b » in « qualche b è a »; e questa operazione dicesi « conversione parziale, o per accidente ». Si noti però che in questo caso la proposizione « ogni a è b » non significa $a \supset b$, ma bensì « $a \supset b \,.\, \exists a$ ».

Corollario da corona, corolla, corollarium = appendice. Così Boezio *Consol.* 3·10 tradusse il greco *πόρισμα* = conseguenza immediata d'un teorema.

Costante. Alcune volte è un pleonasmo. « Sia a una quantità costante » vale quanto « $a \varepsilon Q$ ». Ogni lettera ha un valore costante in una stessa formola, e un valore variabile da formula a formula.

Applicata ad una funzione, la parola « costante » è tradotta con const, simbolo definito nel Formul. §70.

Dare, è un pleonasmo. (Siano dati due numeri a e b) = (siano a e b dei numeri).

Deduzione. Se p e q sono proposizioni, la proposizione « da p si deduce q » chiamasi deduzione, e si indica con « $p \supset q$ ».

Se a e b sono classi, $a \supset b$ si suol leggere « ogni a è b »; e vale quanto « dall'essere a si deduce essere b ».

La deduzione si esprime nel linguaggio ordinario sotto più forme. Vedasi condizione, necessario, sufficiente, conseguenza, ...

Definizione abbreviato in Def. Nel Formul. è un'eguaglianza il cui primo membro è il segno nuovo che si definisce, ed il secondo un gruppo noto di segni. Es. (Numero primo) = (Numero divisibile solo per sè stesso, e per l'unità).

Alcuna volta si definisce un'espressione contenente lettere variabili; e la definizione è preceduta da un'ipotesi. Es.

(Essendo a e b delle frazioni) $.\supset.$ $a+b$ = (espressione composta con a e b e coi segni delle operazioni aritmetiche sui numeri interi).

« Definizione possibile » è un'eguaglianza che, per un possibile ordinamento della scienza, può essere assunta come definizione.

Data una P, si riconosce facilmente se essa sia una definizione possibile. Diventa o no una Def, a seconda della teoria e dell'arbitrio dell'autore.

Il segno $=$ d'una definizione suol leggersi « dicesi, chiamasi, indica, significa, rappresenta ».

Dimostrazione. Una dimostrazione ha in generale per scopo di persuaderci della verità d'una proposizione.

Alcune volte la dimostrazione d'un sistema di proposizioni già chiare, o verificabili coll'esperienza, ha per scopo di analizzarne le mutue relazioni, e di ridurle a un sistema di proposizioni primitive.

Le dimostrazioni sono fatte quasi sempre colla sola logica naturale.

Furono però date delle dimostrazioni in cui si ottiene una proposizione dalle precedenti con una serie di trasformazioni logiche.

Diverso $=$ differente $=$ (distinto) $=$ (non eguale) $= (-\iota)$

Distributiva. Dicesi che l'operazione α è distributiva rispetto alla β se $x\alpha(y\beta z) = (x\alpha y)\beta(x\alpha z)$, e si indica con Distrib(α,β).

Sussistono le proprietà aritmetiche Distrib$(\times, +)$, Distrib$(\uparrow, \times)$, Distrib(lim, $+$), Distrib(lim, $\times$), ecc.

e le logiche Distrib $(\varepsilon,\cap)$, $(\cap,\cap)$, $(\supset,\cap)$, $(\cap,\cup)$, $(\cup,\cap)$, e molte altre.

Il nome fu introdotto da Servois. Vedi *Commutativa*.

E, latino et. In molti casi indica il prodotto $\cap$.

(I numeri multipli di 2 *e* di 3 sono multipli di 6) $=$ $(2N \cap 3N \supset 6N)$.

(I multipli di 6 sono multipli di 2 *e* multipli di 3) $=$ $(6N \supset 2N \cap 3N)$.

Qualche volta significa $\cup$. Es.

(I multipli di 4 *e* i multipli di 6 sono multipli di 2) $=$ $(4N \cup 6N \supset 2N)$.

Eguale. « È eguale » o « eguaglia » si indica col simbolo $=$.

La parola « eguale » quando si presenta sola, è indicata nel Formul. con ι (iniziale di ἴσος). Sicchè $\varepsilon\iota$ vale quanto $=$.

Nel Formul. si ha una sola eguaglianza, detta anche identità o coincidenza. Un'eguaglianza-identità della forma $\varphi x = \varphi y$ da alcuni autori si considera come una specie d'eguaglianza fra x e y, e si indica con nomi speciali.

Eguaglianza è una scrittura della forma $x = y$.

x dicesi il primo membro, y il secondo dell'eguaglianza.

Equazione è la forma latina di « eguaglianza ». Vedi identità.

Equipollenza. Altra forma di eguaglianza, usata da Bellavitis pei vettori. Dopo i lavori di Grassmann e di Hamilton, si indica semplicemente col segno $=$.

Equivalenza. Altra forma di eguaglianza. « Le condizioni p e q sono equivalenti » vale « $p = q$ ».

« Il solido a è equivalente al solido b » vale « Volume di a $=$ volume di b ».

Elemento. Classe contenente un solo individuo.

(La classe a è un elemento) $= [\exists a : x,y \varepsilon a \,.\supset_{x,y}.\, x = y]$.

Esistere. Si indica con $\exists$.

Essere. A seconda dei casi ha i valori ε, $=$, $\supset$, $\exists$.

Es. (7 *è un* numero primo) $=$ ($7 \varepsilon \mathrm{Np}$)
(13 *è la* somma di due quadrati) $=$ ($13 \varepsilon \mathrm{N}^2+\mathrm{N}^2$)
(5 e 7 *sono* numeri primi) $=$ ($5,7 \varepsilon \mathrm{Np}$)
(*Tutti* i multipli di 4 *sono* multipli di 2) $=$ ($4\mathrm{N} \supset 2\mathrm{N}$)
(*Ogni* multiplo di 4 *è* un multiplo di 2) $=$ »
(*L'*uomo *è* mortale) $=$ (uomo $\supset$ mortale)
(13 *è la* somma di 4 e 9) $=$ ($13=4+9$)
(*Sia a* un numero primo; si ha...) $=$ ($a \varepsilon \mathrm{Np} .\supset. \ldots$)
(*Essendo* » » ») » » »
(*Sonvi* quadrati somme di due quadrati) $=$ $[\exists \mathrm{N}^2 \cap (\mathrm{N}^2+\mathrm{N}^2)]$

Fissare è pleonasmo.

(Siano fissati due numeri a e b) $=$ (Essendo a e b due numeri).

Le funzioni d'una coppia di variabili si indicano spesso scrivendo il segno di funzione fra le due variabili. Es. $a+b$, $a-b$,...

Invece di « funzione » dicesi anche « operazione » o « corrispondenza ».

Generale o **universale** dicesi una proposizione, o giudizio, della forma $a \supset b$, ovvero $a-b=\Lambda$, o sostituendo b a $-b$, $ab=\Lambda$.

Giudizio *particolare* è la negazione d'un giudizio universale, cioè della forma $\exists\, a \sim b$.

Una proposizione A dicesi qualche volta *più generale* della B, e la B caso particolare di A, se aggiungendo alla ipotesi di A una nuova ipotesi, si deduce la B.

Per es. se nella prop. $a,b \varepsilon \mathrm{N} .\supset. (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
aggiungo all'ipotesi la condizione $b=1$, e semplifico, ho il caso particolare $a \varepsilon \mathrm{N} .\supset. (a+1)^2=a^2+2a+1$.

« In generale » alcuna volta significa « sempre » ed è un pleonasmo.

Altre volte dire che una proposizione « è vera in generale » significa che ha dei casi di eccezione, ossia che non è vera.

Alcuni A. dicendo che una funzione definita in un intervallo ha « in generale » una data proprietà, intendono che abbia sempre questa proprietà, tolto un numero finito di punti. E considerata in un campo piano ha « generalmente » una data proprietà, quando si debbano eccettuare solo delle linee in numero finito. Ma siccome con una linea si può coprire con continuità tutto il campo piano, questo concetto deve essere maggiormente precisato. Ad ogni modo questo valore del termine « in generale » esce dalla logica pura, perché contiene idee di aritmetica o di geometria.

Gruppo, alcune volte significa Classe, in simboli Cls.

(Gruppo di funzioni, o operazioni) $=$ (classe di operazioni, tale che il prodotto funzionale di due individui di essa appartenga alla classe stessa). $a \varepsilon \mathrm{Cls} .\supset.$ (Gruppo di operazioni in a) $=$

$$\mathrm{Cls}'(aFa) \cap u \ni (x,y \varepsilon u .\supset_{x,y}. xy \varepsilon u)$$

Sottogruppo. Essendo a un gruppo, nel primo o secondo significato, la frase « b è un sottogruppo di a » significa $b \supset a$.

Identità. « Gli oggetti x ed y sono identici » vale « $x=y$ ».

Una proposizione p_x contenente la variabile, o sistema di variabili, x, è un'identità, o è identicamente vera, qualunque sia x in un campo a » significa « comunque si prenda x nel campo a, si ha p_x » ; in simboli $x \varepsilon a . \supset_x . p_x$. Es. $x,y \varepsilon N . \supset . x+y=y+x$.

Alcuni A. chiamano identità un'eguaglianza della forma $x=x$.

Altri chiamano identità l'eguaglianza fra due espressioni, vera per tutti i valori delle lettere. Allora $x+y=y+x$ non è un'identità, perchè non è vera se x e y sono vettori sferici.

Equazione è un'eguaglianza contenente una variabile x, che sta per essere accompagnata dal segno $x \ni$. Sicchè un'eguaglianza si chiama equazione o identità, a seconda della sua posizione nell'enunciato, precisamente come un numero si chiama « termine » o « fattore » a seconda della sua posizione in una formola.

Ideografia, in tedesco « Begriffschrift ». Scrittura in cui ogni idea è rappresentata con un segno. Sono ideografie più o meno complete la scrittura geroglifica degli antichi egiziani, come pure la cinese attuale. Ideografie parziali sono costituite dalle cifre dette arabiche, dai simboli della chimica, dai segni algebrici, ecc. L'ideografia completa, o pasigrafia, fu intravvista da Leibniz, col nome di « characteristica », che ne pose le fondamenta in scritti parzialmente da lui pubblicati, e che ora si vanno pubblicando. Vedasi specialmente:

L. Couturat — *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris a. 1901 pag. 604.

L'unione dei simboli di logica cogli algebrici permise di esprimere completamente in simboli molte parti della matematica.

Tutte le idee generali, contenute nel presente Dizionario, sono riduttibili ai simboli ideografici

$=$ Cls ε $\ni$ $\supset$ $\cap$ $\cup$ $-$ $\exists$ ι $\imath$

leggasi:

è eguale, classe, è, tale, dunque, e, o, non, esiste, eguale, quel.

Indipendente. (Due classi a e b sono indipendenti) $=$ $(\exists a-b . \exists b-a)$.

Due condizioni p_x e q_x contenenti la variabile x sono indipendenti, quando lo sono le classi $x \ni p_x$ e $x \ni q_x$.

Due postulati, o proposizioni primitive, sono indipendenti, se considerando i segni che rappresentano idee primitive come variabili, esse sono in questi segni condizioni indipendenti.

Si prova l'indipendenza d'un sistema di n proposizioni primitive, portando n esempi o interpretazioni dei segni primitivi, che soddisfano a tutte le combinazioni a $n-1$ delle Pp e non alla eccettuata.

Insieme è lo stesso che classe $=$ Cls.

Inverse (legge delle). Vedi negazione.

Ipotesi da *ὑπό-θε-σις* $=$ Sup-po-sizione.

Essendo p e q condizioni, nella deduzione $p \supset q$, p è l'ipotesi.

Logica matematica è la scienza che tratta delle forme di ragionamento che si incontrano nelle varie teorie matematiche, riducendole a formole simili alle algebriche.

Essa ha comune colla logica d'Aristotele il solo sillogismo. Le classificazioni dei varii modi di sillogismi, quando sono esatte, hanno in matematica poca importanza.

Nelle scienze matematiche si incontrano numerose forme di ragionamento irreduttibili a sillogismi.

I principali teoremi di questa scienza si debbono a Leibniz († 1716), Lambert († 1777), Boole († 1864), McColl, Schröder, ecc. Nella RdM. t.7, p.3 si trova l'elenco di 67 memorie pubblicate su questo soggetto nell'ultimo decennio. Altre sono da aggiungere.

Legge associativa, commutativa, distributiva. Vedansi questi nomi.

Legge delle inverse, vedi negazione.

Lemma = $\lambda\tilde{\eta}\mu\mu\alpha$ da $\lambda\alpha\mu\beta\acute{\alpha}\nu\omega$ = assumo.

In Archimede vale proposizione che si assume senza dimostrazione, cioè proposizione primitiva Pp.

Generalmente vale proposizione che si premette ad un teorema onde facilitarne la dimostrazione.

Membro d'un'eguaglianza (vedi).

Moltiplicazione logica vedi « Prodotto logico ».

Necessario. (La proposizione p è condizione necessaria della q) $= (q \supset p)$.

Negazione. Si indica col segno $-$ che si legge « non ».

Si ha: $a \varepsilon \mathrm{Cls} . \supset . -a = a$

« Trasportare », in Logica matematica, significa applicare la regola:

$$a, b \varepsilon \mathrm{Cls} . a \supset b . \supset . -b \supset -a$$

analoga a una regola algebrica.

Questa regola è anche chiamata da alcuni « legge delle inverse ». Chiamasi « proposizione inversa » di $a \supset b$ la $b \supset a$, e « contraria » della $a \supset b$ la $-a \supset -b$. Però, mentre il passaggio da una proposizione alla sua inversa o alla sua contraria è illegittimo, è solo legittimo l'accoppiamento delle due operazioni, che esprime la regola del trasportare.

Nome. Termine grammaticale.

Nome comune = Cls.

Si possono considerare in analisi come « nomi proprii » i segni 0,1,2,..) e, i, π, ecc. Del resto ogni nome comune, o nome d'una classe, è il nome proprio della classe.

La differenza fra nome e aggettivo è puramente grammaticale.

Si dice « 7 è un intero » come pure « 7 è un numero intero ».

In simboli i nomi non hanno nè numeri nè casi.

Non vedi negazione.

Nulla. La classe nulla, classe non contenente individui, fu indicata con N (Nihil) da Leibniz, con 0 da Boole, con $\wedge$ nel Formul. Il suo uso è limitatissimo. Ivi si trasforma (la classe a è nulla) in (non esistono degli a), in simboli $(-\exists a)$.

O quando ha il valore del latino « vel » indica la somma logica $\cup$.

Quando ha il valore del latino « aut » fu chiamato « disgiunzione completa ». « a aut b » vale « $a-b \cup b-a$ ».

Ogni latino omnis. (ogni a è b) $= (a \supset b)$.

Parte. La classe a è parte di b significa $a \supset b$.

Altre volte significa « $a \supset b \,.\, a = b$ ».

Particolare vedi « generale ».

Possibile si esprime con $\exists$ (esistono).

(è possibile determinare, o trovare, un numero quadrato somma di due quadrati) $= [\exists N^2 \cap (N^2 + N^2)]$.

Postulato $=$ *λαμβανόμενον*, è indicato, insieme all'assioma (vedi), con Pp.

Prendere è pleonasmo.

(Siano a e b due numeri, presi ad arbitrio. ma fissi) $=$ (Siano a e b dei numeri).

Preposizione. Termine grammaticale.

Le preposizioni del linguaggio comune nella traduzione in simboli si uniscono col segno di funzione, e qualche volta sono un segno di funzione.

Es. (Somma di 2 *con* 3) $= 2+3$
(2 moltiplicato *per* 3) $= 2 \times 3$
(2 elevato *a* 3) $= 2^3$
(logaritmo *di* 2) $= \log 2$
(3 metri *al* secondo) $=$ 3m/s
(3 metri *in* 2 secondi) $=$ 3m/(2s)
(3 Lire *al* metro) $=$ 3L/m.

Problema $=$ *πρόβλημα* da *προβάλλω* $=$ propongo.

Enunciato d'una condizione (o complesso di condizioni) p_x.

Risolvere il problema è trasformare la classe $x \ni p_x$ in un'altra in cui la lettera x sia scomparsa. Es. $q \cap x \ni (x^2 - 3x + 2 = 0) = \iota 1 \cup \iota 2$.

Prodotto logico di due classi a e $b = a \cap b$, e rappresenta la classe comune agli a e ai b.

La moltiplicazione logica ha le proprietà

$$a \cap a = a \quad a \cap b = b \cap a \quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) \text{ ecc.}$$

Pronome. Termine grammaticale.

Questo, quello, ecc. sono spesso rappresentati da $a, b, \ldots x, y \ldots$

Es. (Un numero più un altro numero vale quanto il secondo numero più il primo) $= (a, b \varepsilon N \,.\supset.\, a + b = b + a)$.

Tale che si esprime con $\ni$.

Proposizione si abbrevia con P.

Alcune P hanno il carattere di definizioni possibili. In una teoria, cioè in un ordinamento delle P relative a un dato soggetto, si scelgono fra queste le definizioni.

Altre P sono indimostrabili; esse enunciano le proprietà delle idee primitive, e si chiamano « proposizioni primitive ».

Le altre P, a seconda delle circostanze, chiamansi teoremi, corollarii, lemmi.

In Logica matematica si opera solo su proposizioni condizionali, o condizioni (vedi).

Proprietà. Sia a una classe; l'« essere un a » suolsi chiamare una proprietà. Sicchè la differenza fra proprietà e classe è puramente grammaticale. « a è proprietà caratteristica di b » vale « $a=b$ ».

Qualche. Essendo a e b delle classi, la proposizione particolare affermativa « qualche a è b » vale quanto « esistono degli a e b » in simboli « $\exists a \cap b$ ».

Quello ha alcune volte il valore di ι.

(Essendo a e b due numeri, e b il maggiore, con $b-a$ si intende *quel* numero che aggiunto ad a dà per risultato b) $=$

$$[a,b \varepsilon \mathrm{N} \,.\, b>a \,.\supset.\, b-a=\iota\, \mathrm{N} \cap x \ni (a+x=b)]$$

Relazione. Una relazione fra due enti è espressa da una condizione fra i due enti. Se x,y sono gli enti variabili, e $p_{x,y}$ è la condizione, risulta determinata la classe delle coppie $(x;y)$ che soddisfano a questa condizione; essa è indicata con $(x;y) \ni p_{x,y}$.

Quindi ogni relazione può essere rappresentata da una classe di coppie.

Ad es. $(x;y) \ni [x,y \varepsilon \mathrm{q} \,.\, x^2+y^2=1]$, se identifichiamo la coppia $x;y$ di numeri reali col punto avente le stesse coordinate, rappresenta la circonferenza di centro l'origine e di raggio 1.

La condizione $p_{x,y}$ si può pure esprimere con una funzione. Pongasi $fy = x \ni (p_{x,y})$. Allora $p_{x,y}$ diventa $x \varepsilon fy$, cioè « x è un individuo della classe fy.

Scolio $=$ *σχόλιον*, vale nota, osservazione.

Se. Siano a e b delle proposizioni. « Se a, allora b » vale $a \supset b$.

Sempre. È un pleonasmo per rinforzare la deduzione.

Sintesi da *σύν-θε-σις* $=$ com-po-sizione. Vedi « Analisi ».

Sillogismo. È la proposizione:

$$a,b,c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, a \supset b \,.\, b \supset c \,.\supset.\, a \supset c.$$

I logici scolastici considerarono più modi di sillogismi, che si trasformano fra loro colla conversione (vedi). Essi hanno poca importanza.

Sistema, qualche volta indica Cls.

Il sistema di due variabili x e y si indica con $(x;y)$ o (x,y).

Sistema di condizioni è l'affermazione simultanea o prodotto logico delle condizioni date. In Logica Matematica il prodotto di più condizioni è una condizione.

Soddisfare. (Gli x tali che *soddisfano* alla condizione p_x) $=$ ($x \ni p_x$).

Somma logica di due classi a e b è la classe formata dagli enti che appartengono ad una almeno delle classi a e b. Si indica con $a \cup b$, e il segno $\cup$ si legge « o » (vedi).

Essa ha le proprietà

$$a \cup a = a \quad a \cup b = b \cup a \quad a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c \quad a \cap (b \cup c) = a \cap b \cup a \cap c \quad \text{ecc.}$$

Sufficiente. (La proposizione p è condizione sufficiente della q $=$ ($p \supset q$).

Supposizione. Forma latina di ipotesi.

Tale. (Gli x *tali* che è soddisfatta la condizione p_x) $=$ (Gli x *tali* che p_x) $=$ ($x \ni p_x$).

Teorema $=$ *Θεώρημα*, da *θεωρέω* $=$ considero, indica una proposizione che si dimostra.

Tesi $=$ *θέσις*. Nella deduzione $a \supset b$, b è la tesi.

Trasportare. Vedi « negazione ».

Tutto. La classe totale, o tutto, fu indicata in logica simbolica coi segni $1, \infty, V$. Esso ha però poca importanza, e fu escluso dal Formulario.

Verbo. Termine grammaticale.

Corrispondono a verbi i simboli ideografici ε, $=$, $\supset$, $\exists$, $>$, $<$.

Verificare $=$ soddisfare (vedi).

Vero. « La proposizione A è vera » vale « A ».

G. Peano

ADDITIONS AU FORMULAIRE a.1901

par

A. Arbicone
T. Boggio
E. Cantoni
F. Castellano
G. Peano, abrégé en (p
G. Vacca » (v

add. indique cette série d'additions : la première série est contenue dans RdM. t.7 p.85-110.

DEUXIÈME SÉRIE

LOGIQUE

§ ⊃ 10·61 Au lieu de $y\mathfrak{z}$ lisez $z\mathfrak{z}$. (p

§| (p.35) Eisenstein (a.1847, p.71-91) a employé le symbole ϖ pour indiquer la substitution.

Il avait observé qu'on ne pouvait employer à cet effet le symbole $=$. Car si dans une formule on veut substituer au nombre m le nombre $m+1$ on ne peut écrire l'égalité absurde $m = m + 1$, mais bien suivant Eisenstein, $m \varpi m + 1$, ou suivant le F, $[(m+1) \mid m]$. (v

ARITHMÉTIQUE

§ ×

1·8 $(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(ab+bc+ca)(a+b+c)$

1·9 $(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)+abcd=$
$(abc+bcd+cda+dab)(a+b+c+d)$

On remarquera que si dans le premier membre de cette P et de la P1·8 au lieu des $+$ on met des $\times$, et au lieu des produits indiqués on fait des sommes, on obtient le second membre, et réciproquement.

8·31 $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)+(a-b)(b-c)(c-a)=0.$

Boggio

§ ⊢

6·1 Dem

F. Lindemann, *Ueber den Fermat'schen Satz betreffend die Unmöglichkeit der Gleichung* $x^n+y^n=z^n$.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München, a.1901 Heft 2, p.185-202.

Così il vincitore di π vinse pure l'ultimo teorema di FERMAT. (p

3·51 $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2=(a+b)(b+c)(c+a)+4abc$

14·321 $(a+b-2c)(a-b)^2+(b+c-2a)(b-c)^2+(c+a-2b)(c-a)^2=0$

·701 $ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+$
$(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)=0$

·800 $a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2=3abc(a-b)(b-c)(c-a)$

Boggio

§ 14·101 $(a+b)^2=a(a-3b)^2+b(b-3a)^2$

·29 $(a+b)^4=(a^2-6ab+b^2)^2+16ab(a-b)^2$

·72 $(a+b)^5=a(a^2-10ab+5b^2)^2+b(a^2-10ab+b^2)^2$

·83 $(a+b)^6=(a-b)^2(a^2-14ab+b^2)^2+4ab(3a-b)^2(3b-a)^2$

·921 $(a+b)^7=a(a^2-21a^2b+35ab^2-7b^3)^2+b(7a^3-35a^2b+21ab^2-b^3)^2$

·931 $(a+b)^8=(a^4-28a^3b+70a^2b^2-28ab^3+b^4)^2+$
$64ab(a-b)^2(a^2-6ab+b^2)^2$

·97 $(a+b)^9=a(a^4-36a^3b+126a^2b^2-84ab^3+9b^4)^2+$
$b(9a^4-84a^3b+126a^2b^2-36ab^3+b^4)^2$ Castellano

22·21 $m\varepsilon N_1 . a\varepsilon R . ma<1 .\supset. (1+a)^m < /(1-ma)$
[$1+a < /(1-a) .\supset. (1+a)^m < 1-ma$] (p

§Num·121 $a,b\varepsilon$ Cls . $f\varepsilon(bfa)$sim $.\supset.$ Num$a \leqq$ Num$b$ (p

Ex. §lim 5·1

§ Σ

3·5 $a\varepsilon N_0 .\supset. \Sigma\{/[(a+r)(a+r+1)]\,|r, 1\cdots m\} = /(a+1)-/(a+m+1)$
[Hp . $r\varepsilon N_1 .\supset. /[(a+r)(a+r+1)]=/(a+r)-/(a+r+1) .\supset.$ P]

Continuation : §Π 4·11

Boggio

4·2 $s_9=(6s^5-20s^4+12s^3-3s^2)/5$
{ Seitz et Gander: *The Analyst*, t.6 p.58 a.1879 }

Arbicone

§Σ 11*n*. Ajoutez :Cardano dans sa *Practica Arithmeticæ*, Mediolani a.1539, fol. D iiii v. a remarqué l'utilité des fractions décimales pour l'extraction des racines carrées et cubiques, ayant observé que

$a,n\varepsilon N_1 .\supset. \sqrt{a}-X^{-n}E\sqrt{(X^{2n}a)} < X^{-n}$
» » $\sqrt[3]{a}-X^{-n}E\sqrt[3]{(X^{3n}a)} < X^{-n}$ (v

20·6 $n,m\varepsilon N_1+1 . x\varepsilon$ (RF1$\cdots n$)sim.. $a\varepsilon$ RF1$\cdots n .\supset.$
$(\Sigma ax^m)(\Sigma a)^{m-1} > (\Sigma ax)^m$ (p

§ Π

4·11 $a,m,n\varepsilon N_1 .\supset.$
$m\Sigma[/\Pi(a+r+0\cdots m)\,|r, 1\cdots n] = /\Pi(a+1\cdots m) - /\Pi(a+n+1\cdots m)$

[Hp . $m=1$. §Σ P3·5 .⊃. Ths (1)

Hp . $m\Sigma|/\Pi(a+r+0\cdots m)\,|r,1\cdots n| = /\Pi(a+1\cdots m) - /\Pi(a+n+1\cdots m)$.⊃.

$(m+1)\Sigma|/\Pi[a+r+0\cdots(m+1)]\,|r,1\cdots n| = \Sigma|/\Pi(a+r+0\cdots m) -$

$/\Pi[a+r+1\cdots(m+1)]\,|r,1\cdots n| = |/\Pi(a+1\cdots m) - /\Pi(a+n+1\cdots m)|/m -$

$|/\Pi[a+2\cdots(m+1)] - /\Pi[a+n+2\cdots(m+1)]|/m = /\Pi[a+1\cdots(m+1)] -$

$/\Pi[a+n+1\cdots(m+1)]$ (2)

(1) . (2) . Induct .⊃. P] Boggio

§ !

5·3 Dem [$r\varepsilon N_1$.⊃. $r/(r+1)! + (r+1)/(r+2)! = /r! - /(r+2)!$.⊃. P]

·4 $\Sigma\{(2r-1)/(r!\,2^r)\,|r,1\cdots n\} = 1 - /(n!\,2^n)$

[$r\varepsilon N_1$.⊃. $(2r-1)/(r!\,2^r) = /[(r-1)!\,2^{r-1}] - /(r!\,2^r)$.⊃. P]

6·21 $C(m,n) = \Sigma[(-1)^r C(m+1,n-r)\,|r,0\cdots n]$

·22 $k\varepsilon N_0$.⊃. $C(m,n) = \Sigma\{C(m-k,n-r)\times C(k,r)\,|r,0\cdots k\}$

·7 $\Sigma\{(-1)^r(2m+1-2r)C(2m+1,r)\,|r,0\cdots m\} = 0$

·8 $m\Sigma\{[(-1)^r/(r+1)]C(m-r-2,r)2^{m-2r-2}\,|r,0\cdots E[(m-1)/2]\}$

$= 2^m - 2$

Boggio

6·7 $m\varepsilon\, 6N_0$.⊃. $\Sigma[C(m,r)\,|r,(0\cdots m)\cap 3N_0] = (2^m+2)/3$

$m\varepsilon\, 6N_0+1 \cup 6N_0+5$.⊃. » $= (2^m+1)/3$

$m\varepsilon\, 6N_0+2 \cup 6N_0+4$.⊃. » $= (2^m-1)/3$

$m\varepsilon\, 6N_0+3$.⊃. » $= (2^m-2)/3$

7·11 $(a+b)^{2n+1} = a[\Sigma(-1)^r C(2n+1,2r)\,a^{n-r}b^r\,|r,0\cdots n]^2 +$

$b[\Sigma(-1)^r C(2n+1,2r)\,a^r b^{n-r}\,|r,0\cdots n]^2$

·12 $(a+b)^{2n} = [\Sigma(-1)^r C(2n,2r)\,a^{n-r-1}b^r\,|r,0\cdots(n-1)]^2 +$

$ab[\Sigma(-1)^r C(2n,2r+1)a^{n-r}b^r\,|r,0\cdots n]^2$

Castellano

§E 1·51 $x,y\varepsilon R$.⊃. $E(x\times y) \geqq Ex\times Ey$

$< (Ex+1)(Ey+1)$

·52 $a,b\varepsilon 1+R$.⊃. $E(b/a) \leqq E(Eb/Ea)$ [P·51 .⊃. P]

2·01 $m,n\varepsilon N_1$.⊃. $m = \Sigma[E(m+r)/n\,|r,0\cdots(n-1)]$

[$(m/n,n)\,|\,(x,a)$ P2·0 .⊃. P] (p

§ Chf

$a\varepsilon\, 11N_0$.=. $\Sigma[\mathrm{Chf}\,X^{-2r}a\,|r,N_0] - \Sigma[\mathrm{Chf}\,X^{-2r-1}a\,|r,N_0]\ \varepsilon\ 11n$

$a\varepsilon\, 4N_0$.=. $\mathrm{Chf}a + 2\mathrm{Chf}\,X^{-1}a\ \varepsilon\ 4N_0$

$a\varepsilon\, 8N_0$.=. $\mathrm{Chf}a + 2\mathrm{Chf}\,X^{-1} + 4\mathrm{Chf}\,X^{-2}a\ \varepsilon\ 8N_0$

$a,b\varepsilon\, N_1$.⊃. $\mathrm{rest}(a,b) = \mathrm{rest}\{\Sigma[\mathrm{Chf}\,X^{-r}a \times \mathrm{rest}(X^r,b)\,|r,N_0],b\}$(p

§ dt 1·95 $x\varepsilon R$. $D(\mathrm{dt}x,X)=1$. $p\varepsilon N_1$.⊃. $\mathrm{Cfr}(X^p x) = \mathrm{Chf}(X^{p+\mathrm{dt}x}x)$

§Np 6·5 $x\varepsilon\, 0\cdots 22$.⊃. $17 + 6\,E(x^2/4)\ \varepsilon\ Np$

{ Fontebasso, Supplemento al PdM. a.1901 p.130 } (p

§ mp 2·8 $x\varepsilon R . dtx\ \varepsilon\ (2\uparrow N_0)\times(5\uparrow N_0) . n = \max[mp(2,dtx), mp(5,dtx)]$
$. \supset . x = Ex + \Sigma[Chf . xX^r \mid r, 1\cdots n]\}$ (p

§Q ❋ 71·1 $a\varepsilon\ qf(1\cdots m : 1\cdots m : 1\cdots m) : x,y\varepsilon\ qF1\cdots m . \supset_{x,y} .$
$\Sigma x^2\times\Sigma y^2 = \Sigma\{[\Sigma[a_{i,r,s}\, x_r y_s \mid (r,s) ; 1\cdots m : 1\cdots m]]^2 \mid i, 1\cdots m\} : \supset .$
$m\varepsilon\ \iota 1\ \cup 2\ \cup 4\ \cup 8$
{ HURWITZ a.1898 GöttingenN. Cfr. IdM. a.1900 p.21. } (v

FONCTIONS ANALYTIQUES

§ lim

8·64 $a,b\varepsilon N_1 . \supset . \lim[\{[b/(2a+x)]|x\}^r 0] \mid r = \sqrt{(a^2+b)} - a$

·91 $a\varepsilon Q . n\varepsilon N_1+1 . \supset . \lim\{[\sqrt[n]{(a-x)}|x]^r 0\}|r = \iota Q \sim x\ni(x^n+x-a=0)$

·92 $\lim\{[\sqrt[n]{(ax)}|x]^r 1\} \mid r = a\uparrow(n-1)$

14·4 Dem [§Σ 3·5 .⊃. P]

16·3 Dem [P·2 . $x=/2$.⊃. P]

21·6 Dem [§Π 4·11 .⊃. P] Boggio

§lim 22·1. Substituez à l'indication de Stern la suivante:
{LAGRANGE a.1798; Œuvres t.7 p.297} (v

22·11 $m\varepsilon N_1 f N_0 . a\varepsilon(N_1 f N_0)cres : r\varepsilon N_0 . \supset_r . m_r \leq a_r : \supset . m_1/a_1 + m_2/a_1a_2 + m_3/a_1a_2a_3 + \ldots \varepsilon Q\text{-}R$ (v
{LAGRANGE a.1798; Œuvres t.7 p. 296} (v

23·6 $a\varepsilon n . \supset . \lim\{\Sigma[C(n-1-r,r) \mid r, 0\cdots n]/$
$\Sigma[C(n+a-r,r) \mid r, 0\cdots n]\} \mid n = [(\sqrt{5}-1)/2]^{a+1}$
Boggio

§ S

5·1 Dem [$S(x^m \mid x, \Theta) = \lim\{\Sigma[(a^r - a^{r+1})(a^r)^m \mid r, N_0] \mid a, \theta, 1\}$
$= \lim\{\Sigma[(1-a)(a^{(m+1)r} \mid r, N_0] \mid a, \theta, 1\}$
$= \lim[(1-a)/(1-a^{m+1}) \mid a, \theta, 1] = /(m+1)$]

Cette dem. est tirée de:

Arzelà, Lezioni di Calcolo infinitesimale; Firenze, Successori Le-Monnier; a.1901.

5·11 $a\varepsilon Q . \supset . S(x^m \mid x, \Theta a) = a^{m+1}/(m+1)$

[Hp . P2·5 .⊃. $S(x^m \mid x, \Theta a) = a\, S[(az)^m \mid z, \Theta]$
$= a^{m+1} S(z^m \mid z, \Theta) = a^{m+1}/(m+1)$]

Boggio

§log 5·1

Note. — Gregorius a S. Vincentio dans son *Opus Geometricum* Antverpiae a.1647 p.594 avait vu la propriété caractéristique de l'aire de l'hyperbole $[S(/,1 \vdash a)]$, qui suit :

$$a,m \varepsilon Q \supset. S(/, 1 \vdash a^m) = mS(/, 1 \vdash a).$$

Alfonso de Sarasa dans l'opuscule : Solutio problematis a. R. P. Marino Mersennio minimo propositi, Antverpiae a.1649 p.7, a reconnu explicitement que les aires de l'hyperbole correspondent aux logarithmes. (v

§C·6 $e \upharpoonleft C = \Pi[(e \upharpoonleft /n)/(1+/n) \mid n, N_1]$ (v

§Fc add. ·33 $Fc(a,1 \cdots n) =$
$/a_1 + \Sigma\{(-1)^r /dtFc(a, 1 \cdots r) \times dtFc[a, 1 \cdots (r+1)] \mid r, 1 \cdots (n-1)\}$

·34 $(-1)^n Fc(a, 1 \cdots n) < (-1)^n Fc(a, N_1) < (-1)^n Fc[a, 1 \cdots (n+1)]$

·41 $(-1)^{n+1}\{Fc(a, N_1) - Fc[a, 1 \cdots (n+1)]\} \varepsilon \theta (-1)^n [Fc(a, N_1)$
$- Fc(a, 1 \cdots n)]$

·42 $b,c \varepsilon N_1 . \mathrm{mod}\, [Fc(a, N_1) - b/c] < \mathrm{mod}\, [Fc(a, N_1) - Fc(a, 1 \cdots n)]$
$\supset. b > ntFc(a, 1 \cdots n) . c > dtFc(a, 1 \cdots n)$ {EULER a.1748 §382}

·51 $m \varepsilon N_1 . m < n \supset. Fc(a, 1 \cdots n) - Fc(a, 1 \cdots m) =$
$(-1)^m dtFc[a_{m+r+1} \mid r, 1 \cdots (nm-1)] [dtFc(a, 1 \cdots m) \times dtFc(a, 1 \cdots n)]$

·71 $a,b,c \varepsilon n . D(a,b) = 1 . \mathrm{mod}\, a < \mathrm{mod}\, b : n \varepsilon N_1 . d \varepsilon N_1 F1 \cdots n .$
$\mathrm{mod}(a/b) = Fc(d, 1 \cdots n) \supset: u = (-1)^{n-1} \times \mathrm{sgn}\, a \times c\, dtFc[d, 1 \cdots$
$(n-1)] . v = (-1)^n \times \mathrm{sgn}\, b \times c \times ntFc[d, 1 \cdots (n-1)] \supset. u,v \varepsilon n .$
$au + bv = c$ {LAGRANGE, BerlinM. a. 1767 p. 175}

Cantoni

$(e-1)/(e+1) = Fc(2, 6, 10, 14, 18, \ldots) = Fc[(4x-2) \mid x, N_1]$
$2/(e^2-1) = Fc(3, 5, 7, \ldots) = Fc[(2x+1) \mid x, N_1]$
$(\sqrt{e}-1)/2 = Fc(3, 12, 20, 28, 54, \ldots)$
$\sqrt{e}-1 = Fc(1, 1, 1, 5, 1, 1, 9, 1, 1, 13, \ldots)$
$(\sqrt[3]{e}-1)/2 = Fc(5, 18, 30, 42, 54, \ldots)$
{ EULER a.1737 PetrC. t.9 (publ. en 1744) p.121 }

$n \varepsilon N_1 \supset.$
$(\sqrt[n]{e}-1)/(\sqrt[n]{e}+1) = Fc(2n, 6n, 10n, \ldots) = Fc(4x-2)n \mid x, N_1]$
$2/(\sqrt[n]{e}-1) - 2n + 1 = Fc(6n, 10n, \ldots) = Fc[(4x+2)n \mid x, N_1]$
{ EULER a.1737 PetrC. t.9 (publ. en 1744 p.132) } (v

§prob (add.) ·4 $n\varepsilon N_1 . \supset .$
$\{\text{prob}[(1\cdots n F 1\cdots n)\text{rcp} \cap f\ni(x\varepsilon 1\cdots m . \supset_x . fx = = x), (1\cdots n F 1\cdots n)\text{rcp}]\}$
$= \Sigma[\{(-1)^n/n! \mid n, 0\cdots n\}]$
·5 $\lim\{\text{prob}[\quad » \quad » \quad]\} \mid n = /e$

Ayant n objets $1\cdots n$, cette formule donne la probabilité que l'on a, en tirant les m objets au hasard, de n'en rencontrer aucun dont le numéro et le rang de tirage coïncident.

À la limite, lorsque n tend vers l'infini cette probabilité $= /e$.

M. Andrade (JP. a.1894 cah.64 p.224) donne une formule analogue plus compliquée, qui donne $e\sqrt{n}$, lorsque $n\varepsilon N_1$. (v

NOMBRES COMPLEXES

§q$_n$
24·7 $a,b\varepsilon Q . \supset . \lim\{[(x+y)/2, 2xy/(x+y)] \mid (x,y)\}^n(a,b) = [\sqrt{(ab)}, \sqrt{(ab)}]$
{GREGORY *App. ad veram circ. quadr.* a.1668 p.7}

Cette P permet de calculer rapidement les racines carrés des nombres, car le premier membre converge rapidement. (v

§q$_n$ 25·1. Voir L. De Sanctis, *Sulla convergenza di alcune serie*, Giornale di Matematiche, a.1901. (p

§ Dtrm

·51 Hp·1 . $u,u'\varepsilon$ Cls'$1\cdots m$. $u = = u'$. $\exists u$. Num$u$ = Numu' . $\supset .$
$\Sigma[(-1)^{(\Sigma u+\Sigma v)} \times \text{Dtrm}(a, u{:}v) \times \text{Dtrm}(a, (1\cdots m) - u' : (1\cdots m) - v) \mid v, (\text{Cls}, 1\cdots m) \cap v\ni(\text{Num}v = \text{Num}u)] = 0$

✱ 2·11 $m\varepsilon N_1 . a,b,c,d\varepsilon\ qF(1\cdots m{:}1\cdots m) : r,s\varepsilon 1\cdots m . \supset_{r,s} . c(r,s)$
$= \Sigma[a(r,t)b(s,t) \mid t, 1\cdots m] . d(r,s) = \Sigma[a(t,r)b(t,s) \mid t, 1\cdots m]$
$: \supset . n\varepsilon 1\cdots m . u\varepsilon$ Cls'$1\cdots m$. Num$u = n$.
$\supset_n . \Sigma[\text{Dtrm}(c,u{:}u) \mid u, (\text{Cls}'1\cdots m) \cap u\ni(\text{Num}u = = n)] =$
$\Sigma[\text{Dtrm}(d,u{:}u) \mid u, (\text{Cls}'1\cdots m) \cap u\ni(\text{Num}u = = n)]$

✱ 2'·1 $m\varepsilon 2N_1+1 . a\varepsilon\ qF(1\cdots m{:}1\cdots m) : r,s\varepsilon 1\cdots m . \supset_{r,s} . a(r,s) =$
$-a(s,r) : \supset . \text{Dtrm}a = 0$

·2 $m\varepsilon 2N_1 . a\varepsilon\ qF(1\cdots m : 1\cdots m) . b\varepsilon\ qF(1\cdots m/2 : 1\cdots m/2) : r,s\varepsilon$
$1\cdots m . \supset_{r,s} . a(r,s) = -a(s,r) = a(m+1-s, m+1-r) : h,l\varepsilon\ 1\cdots m/2$
$. \supset_{h,l} . b(h,l) = a(h, m/2+l) + a(m-h+1, m/2+l) : \supset .$
$(\text{Dtrm}b)^2 = \text{Dtrm}a$ { GÜNTHER Determ. }

·3 $m\varepsilon 2N_1 . a\varepsilon\ qF(1\cdots m : 1\cdots m) : r,s\varepsilon 1\cdots m . \supset_{r,s} . a(r,s) =$
$-a(s,r) : \supset . \text{Dtrm}a = \{\Sigma[(-1)^s a(1,s)\sqrt{[\text{Dtrm}\ (a, 2\cdots m-s\ ;\ 2\cdots m-s)]} \mid s, 2\cdots m]\}^2$

L'expression qui élevée au carré donne la valeur du déterminant hémisymétrique d'ordre pair, est dite le « pfaffien des éléments du déterminant ». JACOBI (JfM. t.2) a indiqué le pfaffien par la notation $(1,2,\ldots\ldots,m)$.

✱ 3·4 $m,n\varepsilon N_1 . a\varepsilon qF(1\cdots m : 1\cdots m) . b\varepsilon qF(1\cdots n : 1\cdots n) .$
$c\varepsilon qF(1\cdots mn : 1\cdots mn) : r,s\varepsilon 1\cdots m . h,l\varepsilon 1\cdots n .\supset_{r,s,h,l}.$
$c[n(r-1)+h, n(s-1)+l] = a(r,s) \times b(h,l) :\supset.$
$\mathrm{Dtrm}c = (\mathrm{Dtrm}a)^n \times (\mathrm{Dtrm}b)^m$ { KRONECKER JfM. t.72 }

✱ 5. $m,n,p\varepsilon N_1 .\supset.$
·1 $\mathrm{Dtrm}[C(n+r+s,r) |(r,s), 0\cdots m : 0\cdots m] = 1$
·2 $\mathrm{Dtrm}[C(n+m+r+s,n) |(r,s), 0\cdots m : 0\cdots m] \varepsilon \iota 1 \cup \iota -1$
·3 $n \geqq p+m .\supset. \mathrm{Dtrm}\ [C(n+r, p+s)|(r,s), 0\cdots m : 0\cdots m]$
$= \Pi[C(n+m-r+1)|r, 1\cdots p] / \Pi[C(m+r,m+1) |r, 1\cdots p]$
{ ZEIPEL, Om Determinanter... Lunds Univ. Ars-Skrift, a.1865}
·4 $m\varepsilon N_1+1 . a\varepsilon N_1F1\cdots m .\supset. \mathrm{Dtrm}\ [C(a_r,s)|(r,s),$
$1\cdots m : 0\cdots(m-1)] = (-1)^{m(m-1)/2}\Pi\{\Pi\ [(a_r-a_s)|s, 1\cdots (r-1)]|r,$
$2\cdots m\} / \Pi[r^{m-r}|r, 2\cdots(m-1)]$
{ STERN, JfM. t.66 a.1865}

Cpl = complément

✱ 8·1 $\mathrm{Hp}1\cdot1 . m=1 .\supset. \mathrm{Cpl}a = 1$
$\mathrm{Hp}1\cdot1 . m\varepsilon N_1+1 . r,s\varepsilon 1\cdots m .\supset.$
$\mathrm{Cpl}(a,r,s) = (-1)^{r+s}\mathrm{Dtrm}[a, (1\cdots m)-\iota r : (1\cdots m)-\iota s]$ Df
$\mathrm{Cpl}(a,r,s)$ est dit complément algébrique de l'élément (r,s) du déterminant a.
·2 $\mathrm{Hp}1\cdot1 : r\varepsilon 1\cdots m .\supset. \mathrm{Dtrm}a = \Sigma[a(r,s)\mathrm{Cpl}(a,r,s) |s,1\cdots m]$
·3 $\mathrm{Hp}1\cdot1 : h,l\varepsilon 1\cdots m . h\neq l .\supset. \Sigma[a(h,s) \mathrm{Cpl}(a,l,s) |s, 1\cdots m] = 0$
·4 $\mathrm{Hp}1\cdot1 . k\varepsilon q . h,l\varepsilon 1\cdots m . h\neq l : r\varepsilon 1\cdots m .\supset_r.$
$\mathrm{Cpl}(a,r,h) = k\mathrm{Cpl}(a,r,l) :\supset. \mathrm{Dtrm}a = 0$
·5 $\mathrm{Hp}1\cdot1 . \mathrm{Dtrm}a = 0 : h,l\varepsilon 1\cdots m .\supset_{h,l}. \mathrm{Cpl}(a,h,l) \neq 0 :\supset.$
$\exists q \frown k \ni [r\varepsilon 1\cdots m .\supset_r. \mathrm{Cpl}(a,r,h) = k\mathrm{Cpl}(a,r,l)]$
·6 $m\varepsilon N_1 . a,b\varepsilon qF(1\cdots m : 1\cdots m) . x\varepsilon q : r,s\varepsilon 1\cdots m .\supset_{r,s}.$
$b(r,s) = a(r,s)+x :\supset.$
$\mathrm{Dtrm}b = \mathrm{Dtrm}a+x\Sigma\{\Sigma[\mathrm{Cpl}(a,r,s) |r, 1\cdots m]|s, 1\cdots m\}$

✱ 9·1 $\mathrm{Hp}1\cdot1 . \mathrm{Dtrm}a = 0 . u,v\varepsilon \mathrm{Cls}'1\cdots m . \mathrm{Num}u = \mathrm{Num}v \geqq 2$
$.\supset. \mathrm{Dtrm}(\mathrm{Cpl}a, u:v) = 0$
·2 $\mathrm{Hp}1\cdot1 . u,v\varepsilon \mathrm{Cls}'1\cdots m . \exists u . \mathrm{Num}u = \mathrm{Num}v .\supset.$
$\mathrm{Dtrm}(\mathrm{Cpl}a, u:v) =$
$(-1)^{(\Sigma u+\Sigma v)} \times (\mathrm{Dtrm}a)^{(\mathrm{Num}u-1)} \times (\mathrm{Dtrm}[a,(1\cdots m)-u:(1\cdots m)-v]$

·3 Hp1·1 : $r,s\varepsilon\, 1\cdots m$.⊃. $\mathrm{Clp}(\mathrm{Cpl}a,\, r,s) = a(r,s)\times(\mathrm{Dtrm}a)\upharpoonright(m-2)$

·4 Hp1·1 .⊃.

$\mathrm{Dtrm}\{\mathrm{Cpl}[\mathrm{Cpl}(a,r,s)\,|(r,s)],\ 1\cdots m\vdots 1\cdots m\} = (\mathrm{Dtrm}a)\upharpoonright(m-1)^2$

·5 Hp1·1 . $r,s\varepsilon 1\cdots m$.⊃. $\mathrm{Dtrm}a = a(r,s)\mathrm{Cpl}(a,r,s)-$

$(-1)^{r+s}\,\Sigma\{\Sigma[(-1)^{p+l}a(r,l)a(p,s)\ \mathrm{Dtrm}(a,\ 1\cdots m-tp-tr\vdots 1\cdots m-tl-ts)$

$|l,\ 1\cdots m-ts]\ |p,\ 1\cdots m-tr\}$

·6 $m\varepsilon \mathrm{N}_1$. $a,b,c,d\varepsilon\ \mathrm{qF}(1\cdots m\vdots 1\cdots m)$: $r,s\varepsilon\ 1\cdots m$.⊃$_{r,s}$. $c(r,s) =$

$\Sigma[a(r,t)b(s,t)\ |t,1\cdots m]$. $d(r,s) =$

$\Sigma[\mathrm{Cpl}(a,r,t)\ \mathrm{Cpl}(b,s,t)\ |t,1\cdots m$:⊃$_{r,s}$. $d(r,s) = \mathrm{Cpl}(c,r,s)$

·7 $m\varepsilon \mathrm{N}_1$. $a\varepsilon\ \mathrm{qF}(1\cdots m;1\cdots m)$: $r,s\varepsilon\ 1\cdots m$.⊃$_{r,s}$. $a(r,s) = a(s,r)$

:⊃$_{r,s}$. $\mathrm{Cpl}(a,r,s) = \mathrm{Cpl}(a,s,r)$

·8 $m\varepsilon\ \mathrm{N}_1$. $a,b,c,d\varepsilon\ \mathrm{qF}(1\cdots m\vdots 1\cdots m)$. $h,k\varepsilon\ \mathrm{q}$: $r,s\varepsilon\ 1\cdots m$.⊃$_{r,s}$.

$c(r,s) = ha(r,s)+kb(r,s)$. $d(r,s) = k\mathrm{Cpl}(a,r,s)+h\mathrm{Cpl}(b,r,s)$:⊃.

$\mathrm{Dtrm}c = \mathrm{Dtrm}a \times \mathrm{Dtrm}b \times \mathrm{Dtrm}d$

{ Siacci Annali di Mat. t.5 p.296 }

Cantoni

§Subst 5·05 $h\varepsilon\mathrm{q}$.⊃. $\mathrm{Dtrm}(a+h) =$

$\Sigma\{h^t\ \Sigma[\mathrm{Dtrm}(a,\ u\vdots u)\ |u,\ (\mathrm{Cls}'1\cdots n)\frown u\ni(\mathrm{Num}u = n-t)]\ |t,\ 0\cdots n\}$

Cantoni

§ Subst 16·2. Voir F. Giudice, *Sulla trasformazione degli integrali*, Le Matematiche pure ed applicate, a.1901. (p

§ π

1·86 $\pi\ \varepsilon\ 4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}/3 + \sqrt{6}/3 - 2\theta\ \mathrm{X}^{-2}$

{ George Peirce, *A curious approximate construction for* π, AmericanB. a.1901 p.426 } (p

3·31 $4/\pi = \Sigma\{[\mathrm{C}(/2,n)]^2\ |n,\ \mathrm{N}_0\} = 1+/4+/(2\times4)^2+\ldots$

{ Forsyth Mm. a.1883 t.12 p.142 } (v

10·6 $a\varepsilon\mathrm{Q}$. $m\varepsilon\mathrm{N}_1$.⊃. $\mathrm{S}[/(a^2+x^2)^{m+1}\ |x,\mathrm{Q}] =$

$\Pi\{(2r-1)/(2r)\ |r,1\cdots m\}\pi/(2a^{2m+1})$

Boggio

§ sin

§sin 14·3. Cette P est commode pour le calcul numérique de $\mathrm{S}\{/\sqrt{[(acx)^2+((bsx)^2]}\ |x,\ \Theta\pi/2\}$, ainsi qu'il résulte de la 14·31 qui suit, a été donnée par Lagrange sous une autre forme.(TurinM. a.1784 t.2; Œuvres t.2 p.272). (v

14·31 $S\{/\sqrt{[(acx)^2+(bsx)^2]}\ |x, \Theta\pi/2\} =$
$\pi\sqrt{2}$ / mod $\lim\{[(x+y)/2, \sqrt{(xy)}]\ |(x,y)\}^n(a,b)\ |n$ (v

9·12 $x\varepsilon$ q-n .⊃. $\pi^2/[s(\pi x)]^2 = \Sigma[(x+n)^2\ |n, n]$
·7 $a,b,m,n\varepsilon$q .⊃. mod$(me^{ia}+ne^{ib}) = m^2+n^2+2mn\cos(a-b)$
11·21 $x\varepsilon$ q- nπ .⊃. D(/tng, q- nπ/2, x) = $-$/(sin$x$)^2
·7 $x\varepsilon$ q- nπ/2 .⊃. D(log sin, q-nπ/2, x) = /tng$x$
12·1 $a\varepsilon$Q .⊃. S(sin$x$ |x, Θa) = 1$-$cos a
[Hp . §S P4·1 .⊃. S(sin$x$ |x, Θa) = $\lim\{(a/n)\Sigma[\sin(ra/n)\ |r, 1\cdots n]\ |n\}$ (1)
P6·3 .⊃. $\Sigma[\sin(ra/n)\ |r, 1\cdots n] = \sin(a/2)\ \sin[(n+1)a/(2n)]\ /\sin[a/(2n)]$ (2)
(1) . (2) .⊃. S(sin$x$ |x, Θa) = $\sin(a/2)\ \lim\{(a/n)\sin[(n+1)a/(2n)]\ /\sin[a/(2n)]\ |n\}$
= $2\sin(a/2)\ \lim\{\sin[(a/2)(1+/n)]\ (a/2n)/\sin[a/(2n)]\ |n\}$
= $2[\sin(a/2)]^2 = 1-\cos a$]
16·4 $S\{(\text{tng}^{-1}x)/(1+x)\ |x, \Theta\} = (\pi/8)\log 2$

Boggio

VECTEURS

§vct *note*, p.192. Voir :
F. Schur, *Ueber die Grundlagen der Geometrie.* MA. t.55 a.1901 p.265.
(p

✱ 3·36 $(u+v)+w = (v+w)+u = (w+u)+v = u+v+w$
Si $u^2=v^2=w^2$ cette P exprime que: Dans tout trièdre les trois plans menés par les arêtes et les bissectrices des faces opposées ont une droite commune.
·5 $(u-w)+v = (v-w)+u = (u+v)-w = u+v-w$
Si $u^2=v^2=w^2$, cette P dit que: Dans tout trièdre les plans menés par les arêtes et les bissectrices extérieures de deux des faces opposées à ces arêtes et la bissectrice intérieure de la troisième face ont une droite commune.
8·601 $(a-c)\times(b-c) = 0 .=. (a-c)^2 = (a-c)\times(a-b)$
·64 $2(c-b)\times[a-(b+c)/2] = (a-b)^2-(a-c)^2$

Boggio

cmp|| cmp⊥

✱ 16·02 Hp P16 .⊃.
(cmp||u)$v = 0 .=. u\times v = 0$ .v. $v=0$
(cmp⊥u)$v = 0 .=. v\varepsilon$ qu .v. $v=0$

23·3 $u,v,$D$u,$D$v\varepsilon$ vctFq .⊃. D($u\times v$) = $u\times$Dv + $v\times$Du
·4 $u,$D$u\varepsilon$ vctFq . mod$u = 1$.⊃. $u\times$D$u = 0$
[$u\times u=1$. P·3 .⊃. P]

Boggio

$\S$vct 34·9 $u,v,w\varepsilon$ vct . $u^2=v^2=w^2=1$. ang$(u;v)=a$. ang$(v;w)=b$. ang$(v,u)=c$. ang$(w;u,v)=a'$. ang$(u;v,u)=b$. ang$(v;u,v=c'$.$\supset$.

sin$c$ sin$a$ + cos$c$ cos$a$ cos$b$ =

sinc' sina' — cosc' cosa' cos$b$ (v

{ CAGNOLI Antonio, *Trigonometria*, 2ª ediz., Bologna a.1804 p.332 } (v

✱ 53·21 Arc$[(o+xe^{ix}a)\,|x,\ \Theta x]$ = S$[\sqrt{(1+x^2)}\,|x,\ \Theta x]$

Arc de la « spirale d'Archimède ». Voir la parabole.

·5 $m\varepsilon$ N_1+1 .$\supset$. Arc$[(o+me^{it}a+e^{mit}a)\,|t,\ 2\Theta\pi]=8m$

[Hp . $t\varepsilon$q .$\supset$. modD$[(o+me^{it}a+e^{mit}a)\,|t,\ q,\ t]=m$ mod$(e^{it}+e^{mit})=$
$2m$ sin$[(m-1)t/2]$ (1)

(1) . P53·1 .$\supset$. Arc$[(o+me^{it}a+e^{mit}a)\,|t,\ 2\Theta\pi]=$
$2m(m-1)$ S$\{$sin$[(m-1)t/2]\,|t,\ 2\Theta\pi/(m-1)\}=8m$]

Le point considéré décrit la « roulette » engendrée par un point d'une circonférence de rayon 1 qui roule, sans glisser, à l'extérieur d'une autre circonférence fixe de rayon $m-1$.

Pour $m=2$ on a la « cardioïde propre » ou « Limaçon de Pascal ».

·6 $t\varepsilon$ $2\Theta\pi$.$\supset$. Arc$[(o+ta+e^{it}ia)\,|t,\ \Theta t]=8\,[\sin(t/4)]^2$

La courbe considérée est dite « cycloïde propre ». Boggio

§ ∇

✱ 61·31 Hp P61 . $u'k\supset\delta u'k$. f, D$f\,\varepsilon$ qF$(u'k)$.$\supset$.

$\nabla(fu,k,p)=(Df)up\times\nabla(u,k,p)$

Cette P donne la règle pour trouver le ∇ d'une fonction de fonction.

·41 $i\varepsilon$ vct$-\iota 0$.$\supset$. $\nabla[i\times(p-a)\,|p,$ pnt$-\iota a,\ p]=i$

·42 $\nabla[i\times U(p-a)\,|p,$ pnt$-\iota a,\ p]=$
$\{i-[i\times U(p-a)]U(p-a)\}/mod(p-a)$

·8 $\nabla[\log(p-a)^2\,|p,$ pnt$-\iota a,\ p]=2U(p-a)\,/$ mod$(p-a)$

·81 $\nabla[\log$ mod$(p-a)\,|p,$ pnt$-\iota a,\ p]=U(p-a)\,/$ mod$(p-a)$

·9 $\nabla[$ang$(p-a,i)\,|p,$ pnt$-\iota a,\ p]=$
$[U(p-a)\cos(p-a,i)-Ui]\,/\,[mod(p-a)\sin(p-a,i)]$ Boggio

v^2 v^3

✱ 70·7 $(u+v)a(v+w)a(w+u)=2\,uavaw$

71·3 $a\varepsilon v^2$.$\supset$. mod$a=$ mod(Ia) Df

·4 $u\varepsilon$ vct . $a\varepsilon v^2$. mod$a=1$.$\supset$.

(cmp$||a)u=$ (cmp$\perp Ia)u$

{ = « composante parallèle à a de u » } Df

(cmp$\perp a)u=$ (cmp$||Ia)u$

{ = « composante normale à a de u » } Df

·41 $(\mathrm{cmp}||a)u = 0 .=. u \varepsilon \mathrm{q}\mathrm{I}a \,.\!\cup\!.\, u = 0$

$(\mathrm{cmp}\,\underline{|}\,a)u = 0 .=. u \times (\mathrm{I}a) = 0 \,.\!\cup\!.\, u = 0$

·5 $\mathrm{ang}(u,a) = \mathrm{ang}[u,(\mathrm{cmp}||a)u]$ Df

·6 $u,v,w \varepsilon \mathrm{vct}-\iota 0 \,.\, v = \varepsilon \mathrm{q}w \,.\, u' \varepsilon \mathrm{q}v + \mathrm{q}w \,.\, a = vaw \,.\supset.$

$\mathrm{ang}(u,u') \geqq \mathrm{ang}(u,a)$

·7 $a,b \varepsilon \mathrm{v}^2 - \iota 0 \,.\supset.\, \mathrm{ang}(a,b) \doteq \mathrm{ang}(\mathrm{I}a,\mathrm{I}b)$ Df

Boggio

✱ 80·2 $o \varepsilon \mathrm{pnt} \,.\, i \varepsilon \mathrm{vct}-\iota 0 \,.\, r \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{mod}\, i \leqq r \,.\supset.$

$\mathrm{Volum}\{\mathrm{pnt} \cap x \ni [\mathrm{mod}(x-o) < r \,.\, (x-o) \times i \;\varepsilon\; \Theta i^2]\} =$

$\pi\,(r^2 - i^2/3)\,\mathrm{mod}\, i$

·3 $o \varepsilon \mathrm{pnt} \,.\, i \varepsilon \mathrm{vct}-\iota 0 \,.\, r \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.$

$\mathrm{Volum}\{\mathrm{pnt} \cap x \ni [\mathrm{mod}[(\mathrm{cmp}\,\underline{|}\,i)(x-o)] < r \,.\, (x-o) \times i \;\varepsilon\; \Theta i^2]\}$

$= \pi r^2\, \mathrm{mod}\, i$

·4 $o \varepsilon \mathrm{pnt} \,.\, i \varepsilon \mathrm{vct}-\iota 0 \,.\, r \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, a \varepsilon \theta\pi/2 \,.\supset.$

$\mathrm{Volum}\{\mathrm{pnt} \cap x \ni [\mathrm{mod}(x-o) < r \,.\, \mathrm{ang}(x-o,i) < a]\} =$

$2\pi r^3\,(1 - \cos a)/3$

·5 $o \varepsilon \mathrm{pnt} \,.\, i \varepsilon \mathrm{vct}-\iota 0 \,.\, a \varepsilon \theta\pi/2 \,.\supset.$

$\mathrm{Volum}\{\mathrm{pnt} \cap x \ni [\mathrm{ang}(x-o,i) < a \,.\, (x-o) \times i \;\varepsilon\; \Theta i^2]\} =$

$\pi(\mathrm{mod}\, i)^3(\mathrm{tng}\, a)^2$

Ces quatre P renferment les règles pour trouver le volume:

d'un segment de sphère de rayon r, dont une des bases est un grand cercle et la hauteur est mod$i$;

d'un cylindre droit de révolution, de rayon r, et de hauteur mod$i$;

d'un secteur sphérique de rayon r dont l'angle au sommet est $2a$;

d'un cône droit de révolution dont l'angle au sommet est $2a$, et la hauteur est mod$i$.

·6 $o,o' \varepsilon \mathrm{pnt} \,.\, a \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \mathrm{mod}(o-o') < a \,.\supset.$

$\mathrm{Volum}\{\mathrm{pnt} \cap x \ni [\mathrm{mod}(x-o) + \mathrm{mod}(x-o') < a]\}$

$= \pi a[a^2 - (o-o')^2]/6$

Cette P exprime le volume d'un ellipsoïde de révolution dont o,o' sont les foyers et le plus grand axe est a. Boggio

✱ 81·2 Hp P80·2 $.\supset.$

$\mathrm{Area}\{\mathrm{pnt} \cap x \ni [\mathrm{mod}(x-o) = r \,.\, (x-o) \times i \;\varepsilon\; \Theta i^2]\} = 2\pi r\, \mathrm{mod}\, i$

·3 Hp P80·3 $.\supset.$ $\mathrm{Area}\{\mathrm{pnt} \cap x \ni [\mathrm{mod}[(\mathrm{cmp}\,\underline{|}\,i)(x-o)] = r \,.$

$(x-o) \times i \;\varepsilon\; \Theta i^2]\} = 2\pi r\, \mathrm{mod}\, i$

·4 Hp P80·4 $.\supset.$ $\mathrm{Area}\{\mathrm{pnt} \cap x \ni [\mathrm{mod}(x-o) = r \,.\, \mathrm{ang}(x-o,i) < a]\}$

$= 2\pi r^3(1 - \cos a)$

·5 Hp P80·5 $.\supset.$ $\mathrm{Area}\{\mathrm{pnt} \cap x \ni [\mathrm{ang}(x-o,i) = a \,.\, (x-o) \times i \;\varepsilon\; \Theta i^2]\}$

$= \pi i^3 \sin a\,/(\cos a)^2$ Boggio

§vct 81·6 $o\varepsilon$ pnt . $a,b,c\varepsilon$ U'(vct=ι0) .⊃. Area[o+U'(vct=ι0)] ∩ $x\ni(x-o\ \varepsilon\ Qa+Qb+Qc = \mathrm{ang}(a;b,c)+\mathrm{ang}(b;c,a)+\mathrm{ang}(c;a,b)-\pi$

{ HARRIOT, a.1603 dans les Mss. inédits, qui vont paraître dans le Bullett. di Storia d. Mat. a.1902, p.1;

GIRARD, a.1629; CAVALIERI, a.1632 }

Cavalieri en a publié le premier une démonstration complète. (v

BIBLIOGRAPHIE RELATIVE À CES ADDITIONS

Andrade	§prob	Gregory	§q_n 24·7
Archimede	§vct 53·21	Günther	§Dtrm
Arzelà	§S 5·1	Harriot	§vct 81·6
Cagnoli	§vct 34·9	Hurwitz	§Q 71·1
Cardano	§Σ 11n	Jacobi	§Dtrm
Cavalieri	§vct 81·6	Kronecker	§Dtrm
De Sanctis	§q_n 25·1	Lagrange	§lim 22·1·11, 23·6 §Fc ·71
Eisenstein	§|	Lindemann	§∧ 6·1
Euler	§Fc	Pascal	§vct 53·5
Fermat	§∧ 6·1	Peirce G.	§π 1·83
Fontebasso	§Np 6·5	Sarasa	§log 5·1
Forsyth	§π 3·81	Schur	§vct n
Gander	§Σ 4·2	Seitz	§Σ 4·2
Giudice	§Subst 16·2	Siacci	§Dtrm
Girard	§vct 81·6	Stern	§Dtrm
Gregorius a S. Vinc.	§log 5·1	Zeipel	§Dtrm 5·3

FIN DU TOME VII

Revue de Mathématiques publiée par G. Peano, t. 8, et **Formulaire de Mathématiques** t. 4.

Prix de l'abonnement 10 fr. pour l'Italie, 11 fr. pour l'Union postale.

Tomes 1 à 7 de la *Revue*, 1 à 3 du *Formulaire*, chaque tome fr. 8.

L'adresser aux librairies Frères Bocca, et Ch. Clausen à Turin (Italie).

Le *Formulaire de Mathématiques* publie toutes les propositions mathématiques exprimées entièrement par les symboles idéographiques. La *Revue* publie les travaux ayant pour but le perfectionnement du Formulaire.

OCT 22 1956
MAR 1 6 1965
APR 30 1907
MAY 21 1907
JUN 4 1907
MAY 27 1909
SEP 2 1918
DUE DEC 20 1917
APR 30 '64 H
231-98 7

3 2044 102 938 578